## Ripartizione e allocazione Pareto efficiente del rischio

(versione del 20.12.2012, modificata da Carlo Zappia su testo di Mauro Caminati)

Dall'analisi delle scelte in condizioni di rischio svolta nel capitolo 12 da Varian emergono considerazioni relative sia alla diversificazione (par. 12.5) che alla ripartizione del rischio (12.6). Per ciò che concerne la ripartizione, o condivisione, dei rischi esistono proposizioni generali che vanno oltre il risultato dell'esempio numerico riportato da Varian.

A livello individuale è possibile dimostrare che un agente *h* avverso al rischio, con avversione assoluta al rischio costante, può essere interessato a sostenere una frazione trascurabile di un certo rischio anche quando la sua utilità attesa per quel rischio, se sostenuto complessivamente, è negativa.
Come dimostrato nella dispensa di Mauro Caminati, (disponibile sul sito dell'insegnamento, ma non in programma per il corso 50-74) a*nche se il consumatore è avverso al rischio, quando le vincite sono sufficientemente piccole, è possibile approssimare il suo comportamento a quello di un consumatore neutrale al rischio.*
La questione è rilevante perché sono esempi di condivisione del rischio ampiamente diffusi nei sistemi economici le società per azioni, le compagnie di assicurazione, i mercati futuri.
Come sempre in economia, è importante ricordare le assunzioni che sorreggono la conclusione enunciata. Quanto detto sopra non vale naturalmente in questa forma precisa se vi sono costi organizzativi: in particolare, costi dovuti a informazioni nascoste (esempio: è conveniente entrare in una partecipazione azionaria di un investimento in ricerca e sviluppo R&S se vi sono informazioni nascoste sulla probabilità di successo?), costi dovuti ad azioni nascoste ( esempio: partecipazione azionaria in investimento di R&S con sforzo di ricerca non osservabile).
Più in generale perché la proposizione valga si deve assumere che non vi siano divergenze individuali nella valutazione del rischio. Tali divergenze possono insorgere quando le probabilità non sono note e non esistono informazioni sufficienti a determinare in modo affidabile e uniforme le probabilità in questione. Nella realtà spesso sono proprio tali divergenze di valutazione a rendere un'iniziativa imprenditoriale appetibile ad un certo investitore, convinto di potere esprimere valutazioni migliori rispetto alla media del mercato. E' proprio tale divergenza di valutazioni a generare

opportunità di profitto, come sostenuto sin dal 1921 da Frank Knight, nel contributo che costituisce il riferimento classico sul tema delle decisioni in condizioni di rischio e incertezza, il volume *Risk, Uncertainty and Profit*.

Passando dal livello individuale al livello del sistema nel suo complesso, il problema della condivisione del rischio può essere affrontato come generalizzazione del problema della contrattazione/scambio fra agenti individuali.

Consideriamo il problema della allocazione di un rischio Y fra due agenti con preferenze che soddisfano la proprietà dell'utilità attesa e preferenze per il consumo certo rappresentate dalle funzioni di utilità $u_A(W_A)$, $u_B(W_B)$.

Siano A, B due agenti con ricchezza iniziale certa $W_A$, $W_B$ che decidono di condividere il rischio di una lotteria L che offre una vincita aleatoria Y.

$Y = Y^1$ se si verifica lo stato 1, che ha probabilità $\pi^1$.

$Y = Y^2$ se si verifica lo stato 2, che ha probabilità $\pi^2$.

La vincita Y viene ripartita fra A e B così che:

$$y_A^1 + y_B^1 = Y^1$$
$$y_A^2 + y_B^2 = Y^2$$

La ricchezza aleatoria $V_i$ dell'agente i (i = A, B) nei due stati è:

$$V_i^1 = W_i + y_i^1 \qquad\qquad V_i^2 = W_i + y_i^2$$

Per identificare le caratteristiche di una allocazione Pareto-efficiente seguiamo la procedura illustrata da Varian nell'appendice al capitolo sull'equilibrio generale di puro scambio. Ogni allocazione Pareto-efficiente può essere identificata dalla massimizzazione dell'utilità di un agente sotto i vincoli di realizzabilità e un vincolo di utilità di riserva (o di partecipazione, in una relazione contrattuale) per l'altro agente. Massimizziamo quindi l'utilità attesa di A sotto questi vincoli.

L'allocazione del rischio è Pareto efficiente se (condizione necessaria) i premi individuali $y_i^1 + y_i^2$ (i = A, B) soddisfano:

*Max* $EU_A(V_A)$

*sotto i vincoli*

(1) $EU_B(V_B) = U^-$, *dove* $U^-$ *è l'utilità attesa di riserva, tipicamente quella della dotazione iniziale*

(2) $y_A^1 + y_B^1 - Y^1 = 0$

(3) $y_A^2 + y_B^2 - Y^2 = 0$

Introducendo i moltiplicatori di Lagrange $\lambda$, $\theta^1$, $\theta^2$ per i vincoli (1), (2) e (3), rispettivamente, possiamo definire la funzione di Lagrange:

$$L = \pi^1 u_A(V_A^1)+ \pi^2 u_A(V_A^2) + \lambda [\pi^1 u_B(V_B^1)+ \pi^2 u_B(V_B^2)- U^-] + \theta^1 [y_A^1 + y_B^1 - Y^1]+ \theta^2 [y_A^2 + y_B^2 - Y^2] \qquad (4)$$

e riformulare il problema come: *Max L*
rispetto alle variabili: $y_A^1$, $y_A^2$, $y_B^1$, $y_B^2$, $\lambda$, $\theta^1$, $\theta^2$

Condizioni di prim'ordine per un massimo interno di *L* sono:

$\partial L /\partial y_i^1 = 0$ i = A, B (5)

$\partial L /\partial y_i^2 = 0$ i = A, B (6)

$\partial L /\partial\lambda = 0$ (7)

$\partial L /\partial\theta^z = 0$ z = 1, 2 (8)

Mentre le (7) e (8) ci indicano semplicemente che i vincoli (1), (2) e (3) devono essere rispettati, le (5) e (6) possono essere scritte come:

$$\pi^1 u'_A(V_A^1)= \theta^1 = \lambda\ \pi^1 u'_B(V_B^1) \qquad (5')$$
$$\pi^2 u'_A(V_A^2)= \theta^2 = \lambda\ \pi^2 u'_B(V_B^2) \qquad (6')$$

Per cui vale, dividendo (5') e (6') membro a membro:

$$MRS_A = (\pi^1 / \pi^2)[ u'_A(V_A^1) / u'_A(V_A^2)] = (\pi^1 / \pi^2)[ u'_B(V_B^1) / u'_B(V_B^2)] = MRS_B \qquad (9)$$

Ne deriva che condizione necessaria affinchè il rischio di una lotteria con vincita aleatoria Y sia *allocato in modo Pareto efficiente* entro un insieme *H* di agenti, è che il premio aleatorio sia ripartito in quote individuali in modo tale da soddisfare la condizione di uguaglianza dei saggi marginali di sostituzione degli agenti.
Deve cioè risultare che $MRS_h$ è uniforme per tutti gli *h* che appartengono a *H*
Questo risultato è una generalizzazione della condizione dell'efficienza paretiana nello scambio fra beni, quando i beni sono considerati beni contingenti alla realizzazione di eventi, come è il caso di un bene di consumo (o una ricchezza disponibile per l'acquisto di beni) il cui valore dipenda dall'esito di una lotteria.

Concludiamo con l'analisi di un caso particolare: supponiamo che la ripartizione/condivisione avvenga fra un agente A avverso al rischio e un agente B neutrale al rischio.
Come sappiamo dal cap. 12 di Varian, l'ipotesi comporta che le preferenze di B per il consumo certo $c_B$ siano rappresentate da una funzione di utilità lineare del tipo :

$$u_B(c_B) = \alpha + \beta\, c_B \qquad (10)$$

Supponendo per semplicità che la ricchezza $V_B$ di B venga interamente spesa per un bene di consumo dal prezzo unitario, possiamo scrivere $V_B = c_B$ , dove $V_B$ è una variabile aleatoria che soddisfa le condizioni (1), (2) e (3). Ne consegue che il saggio marginale di sostituzione di B indotto dalla distribuzione di probabilità del consumo condizionato $((V_B^1, V_B^2, \pi^1, \pi^2)$ è:

$$MRS_B = (\pi^1 / \pi^2)[\, u'_B(V_B^1) / u'_B(V_B^2)] = (\pi^1 / \pi^2)(\beta / \beta) = (\pi^1 / \pi^2) \qquad (11)$$

La condizione necessaria di ottimalità (9) diviene:

$$MRS_A = (\pi^1 / \pi^2)[\, u'_A(V_A^1) / u'_A(V_A^2)] = (\pi^1 / \pi^2) = MRS_B \qquad (12)$$

Ne deriva:

$$[\, u'_A(V_A^1) / u'_A(V_A^2)] = 1 \qquad (13)$$

Essendo A avverso al rischio, la sua utilità marginale per il consumo certo $u'_A(V_A)$ è strettamente decrescente rispetto a $V_A$, così che la (13) comporta:

$$V_A^1 = V_A^2 \qquad (14)$$

Il consumo di A condizionato allo stato 1 è identico al suo consumo condizionato allo stato 2; una determinazione Pareto efficiente delle quote $y_A^1$ , $y_B^1$ , $y_A^2$ , $y_B^2$ della lotteria L, coerente con le condizioni (1) e (2), prevede quindi che tutto il rischio sia sopportato dall'agente B neutrale al rischio, in quanto B non richiede alcun premio per il rischio, mentre l'agente A non sopporta rischio alcuno.
Le quote $y_A^1$ , $y_B^1$ , $y_A^2$ , $y_B^2$ della lotteria L, coerenti con le condizioni (1) e (2), sono Pareto efficienti se soddisfano la condizione (14); tenendo conto della (3), l'allocazione Pareto efficiente del rischio nel caso particolare in esame prevede quindi: $y_A^1 = y_A^2$.

Questo caso è estremamente rilevante in quanto spesso da un lato dello scambio vi è un agente (ad esempio una impresa assicurativa) che condivide il rischio con tanti singoli agenti avversi al rischio (i contraenti una polizza), attraverso la stipula di singole relazioni contrattuali. Anche se l'impresa assicurativa può essere considerata in principio avversa al rischio, potendo offrire contratti a molti soggetti è in grado di operare una diversificazione del rischio, e diviene nei fatti un agente neutrale rispetto al rischio.