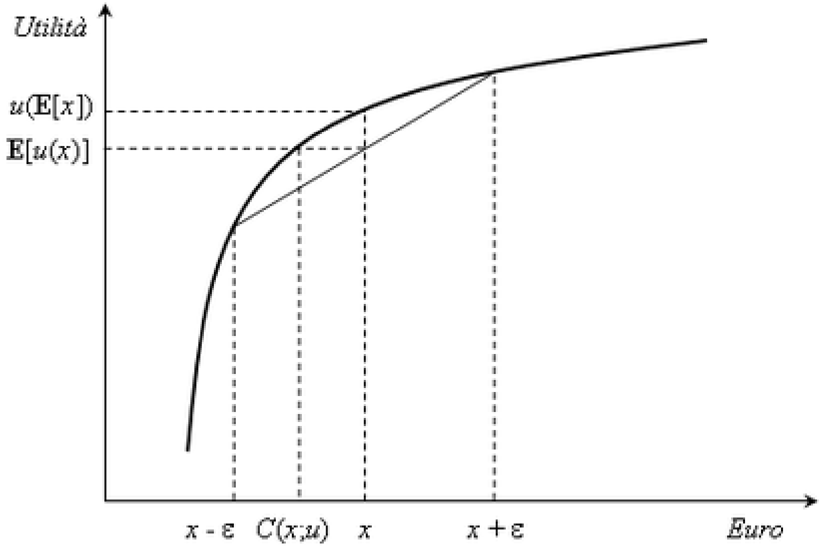
Scelte in condizioni di rischio e utilità attesa (Varian cap. 12)

Prima di proporre alcuni esercizi in questo file vengono presentati alcuni concetti solo in parte presenti nel testo di Varian.

Nella figura è rappresentata una funzione di utilità rispetto al reddito monetario, *x*, per un soggetto *avverso al rischio*. La funzione *u*(*x*) è crescente, ma a tassi decrescenti: quindi ha utilità marginale nel reddito positiva, $du/dx>0$, ma decrescente ($d^2u/dx^2<0$). Il reddito può essere pensato come un bene di consumo composito con prezzo pari a 1.

I valori x+ε e x-ε sono interpretabili come un reddito *condizionato* alla realizzazione di un evento esogeno, come nel caso di una lotteria o di una scommessa. La lotteria ha valore atteso x, data una probabilità di realizzazione dell'evento che, nella figura, è ipotizzata π=1/2. La figura rappresenta



quindi una situazione analoga alla disponibilità un biglietto di una *lotteria* che garantisce x+ε con probabilità ½, e x-ε con probabilità ½. Nel par. 12.4 di Varian la figura è disegnata per valori x=10 e ε=5 e per analoghe probabilità.

Naturalmente questa è una rappresentazione semplificata: in generale si può parlare, come nei par. 12.1-3 del testo, di un paniere di consumo (c_1,c_2) con probabilità (π_1,π_2), dove $\pi_1+\pi_2=1$, con valore atteso $\pi_1 c_1 + \pi_2\ c_2$. Nell'esempio del par. 12.1, x+ε=35000 e x-ε=25000 con probabilità $\pi_1=0.01$ $\pi_2=0.99$. Più in generale ancora, se vi sono n "*stati di natura*" che condizionano il consumo (indicati con s, ove s=1, 2 … n, e con probabilità π_s tali che $\Sigma_s\ \pi_s=1$), il valore atteso è $\Sigma_s \pi_s x_s$

La figura consente di identificare graficamente (E sta per *expected*/atteso):

- **E(x)**=π(x+ε)+(1-π)(x-ε) è in *valore atteso* della lotteria, che in questo esempio, poiché le probabilità sono ½ e ½ è uguale a x e quindi non è indicato esplicitamente nella figura
- **u[E(x)]** è l'*utilità del valore atteso* della lotteria, quando questo è considerato come un valore certo
- **E[u(x)]** è l'*utilità attesa* della lotteria secondo la funzione di utilità von Neumann-Morgenstern: u = π u(x+ε) + (1-π) u(x-ε). Se parliamo di un paniere di consumo condizionato l'utilità attesa è u = π_1 u(c_1)+π_2 u(c_2).

La figura rappresenta un soggetto *avverso al rischio*, in quanto vale **u[E(x)]>E[u(x)]**. Infatti un soggetto avverso al rischio preferisce un valore certo ad una lotteria che garantisce quel valore solo in media come valore atteso (la lotteria pagherà comunque o x+ε o x-ε e il soggetto è avverso al fatto che non sa con certezza quale dei due pagamenti riceverà). Se non lo fosse sarebbe *neutrale al rischio* e in questo caso la sua funzione di utilità u(x) sarebbe lineare.

Oltre a quanto già desumibile nel capitolo di Varian, è necessario identificare:
- C(x,u) è l'*equivalente certo* alla lotteria, cioè quel valore certo la cui utilità equivale per il soggetto all'utilità attesa della lotteria. C è anche il prezzo massimo che il soggetto è disposto a pagare per avere il biglietto della lotteria.
C si determina come il valore che risolve l'equazione **u(C)=E[u(x)]**
- x-C è il *premio per il rischio,* ossia la valutazione del rischio che, per il soggetto, rappresenta partecipare alla lotteria, espresso in termini di reddito. Per scambiare C con il biglietto della lotteria l'agente avverso al rischio richiede almeno x-C.
- x+ε-C è la somma massima per assicurarsi contro l'eventualità di ottenere x-ε invece che x+ε**.** Un soggetto che abbia una dotazione iniziale x+ε e voglia assicurarsi *completamente* contro l'eventualità di rimanere con x-ε dopo la realizzazione dell'evento sarà infatti disposto a spendere per l'assicurazione al massimo un *premio assicurativo* **p** tale che **u(x+ε–p)= E[u(x)]**

ESEMPI DI DOMANDE per la prova scritta dell'esame di Microeconomia.

Una sola delle cinque risposte fornite per ogni domanda è corretta.

1. Un certo soggetto può partecipare alla lotteria che assegna una vincita c_1 = 64 con probabilità 1/2 e c_2 = 16 con probabilità 1/2. La funzione di utilità dell'agente A per il consumo certo c è: $U(c)$ = $3c^{1/2}$. Indicare rispettivamente il valore atteso della lotteria e l'utilità attesa della lotteria

a) E(L)=18, EU(L)=18
b) E(L)=40, EU(L)=40
c) E(L)=40, EU(L)=18
d) E(L)=18, EU(L)=40
e) nessuna delle altre risposte indicate è corretta

2. Cosa si intende per *equivalente certo* di una lotteria?

a) il valore atteso della lotteria
b) l'utilità attesa della lotteria
c) la somma di denaro la cui utilità è pari all'utilità attesa della lotteria
d) l'utilità del valore atteso della lotteria
e) nessuna delle altre risposte indicate è corretta

3. L'agente economico dell'esercizio 1 può scegliere di ricevere una somma c con certezza oppure partecipare alla lotteria che assegna una vincita c_1 = 64 con probabilità 1/2 e c_2 =16 con probabilità 1/2. Quale sarà la sua decisione?

a) partecipare alla lotteria se $c < 40$
b) non partecipare alla lotteria, qualunque c gli venga offerto
c) partecipare comunque alla lotteria perché propenso al rischio
d) partecipare alla lotteria se $c < 36$
e) nessuna delle altre risposte indicate è corretta

4. Cosa si intende per *premio per il rischio*?

a) è la soddisfazione che un soggetto riceve dalla partecipazione ad una lotteria
b) è la somma di denaro che misura la rischiosità della lotteria rispetto al suo valore minimo, data una certa funzione di utilità

c) è la somma di denaro che misura la rischiosità della lotteria rispetto al suo valore massimo, data una certa funzione di utilità
d) è la somma di denaro che misura la rischiosità della lotteria rispetto al suo equivalente certo, data una certa funzione di utilità
e) nessuna delle altre risposte indicate è corretta

5. Un venditore di computer sta aspettando l'arrivo di un carico di microchips da giorni. Ritiene che ci sia ormai una percentuale solo del 25% di probabilità che finalmente domani la spedizione arrivi. Se la spedizione arriva davvero domani potrà portare a termine i suoi progetti di commercio e guadagnare 1600 Euro per ogni microchip. Altrimenti non potrà rispettare il contratto e guadagnerà zero. L'agente ha una funzione di utilità attesa von Neumann-Morgenstern e vuole massimizzare il valore atteso di $w^{1/2}$, con w che indica i suoi guadagni unitari. Un amico gli offre oggi di acquistare i suoi diritti sul carico. Quale è il prezzo minimo al quale l'agente sarà disposto a cedere i diritti su ogni microchip in arrivo all'amico?
a) 1600
b) 400
c) 100
d) 40
e) nessuna della altre risposte indicate è corretta

6. Il venditore dell'esercizio 5 è decisamente preoccupato dall'eventualità di non poter portare a buon fine il suo progetto di commercio (ricordiamo che la probabilità che il carico non arrivi è ormai del 75%). Valuta quindi la possibilità di assicurarsi contro questa possibilità. Quale è il premio assicurativo massimo che sarebbe disposto a pagare per avere con certezza l'incasso che otterrebbe con l'arrivo di ogni microchip?
a) 1600
b) 1500
c) 400
d) zero
e) nessuna delle altre risposte indicate è corretta

7. La ricchezza di Anna è $W_1 = 100$ se si verifica lo stato 1, $W_2 = 400$ se si verifica lo stato 2. I due stati si verificano con probabilità $\pi=1/3$, $1-\pi=2/3$. La sua funzione di utilità per la ricchezza è $U(W) = W^{1/2}$. Pagando un premio $\gamma=1/3$ per ogni Euro assicurato ad una assicurazione, Anna è in grado di trasferire ricchezza dallo stato 2 allo stato 1 al tasso $(dW_2/dW_1) = \gamma / (1 - \gamma)$. Se Anna acquista la quantità ottima d'assicurazione, a quanto ammonta la sua ricchezza se si verifica lo stato 1?
a) 100
b) 120
c) 150
d) 300, poiché il premio è equo da un punto di vista attuariale e Anna è avversa al rischio, quindi si assicura completamente
e) nessuna delle altre risposte indicate è corretta

8. La ricchezza di Carlo è $W_1 = 0$ se si verifica lo stato 1, $W_2 = 500$ se si verifica lo stato 2. I due stati si verificano con probabilità $\pi=1/3$, $1-\pi=2/3$. La sua funzione di utilità per la ricchezza è $U(W) = W$. Pagando un premio $\gamma=1/2$ per ogni Euro assicurato ad una assicurazione, Carlo è in grado di trasferire ricchezza dallo stato 2 allo stato 1 al tasso $(dW_2/dW_1) = \gamma / (1 - \gamma)$. Se Carlo acquista la quantità ottima d'assicurazione, a quanto ammonta la sua ricchezza se si verifica lo stato 1?
a) zero, poiché il premio non è equo dal punto di vista attuariale e Carlo è neutrale rispetto al rischio
b) 100
c) 150

d) 200
e) nessuna delle altre risposte indicate è corretta

9. La ricchezza di Andrea è $W_1 = 0$ se si verifica lo stato 1, $W_2 = 500$ se si verifica lo stato 2. I due stati si verificano con probabilità $\pi=1/3$, $1–\pi=2/3$. La sua funzione di utilità per la ricchezza è $U(W) = W^{1/2}$. Pagando un premio $\gamma=1/2$ per ogni Euro assicurato ad una assicurazione, Andrea è in grado di trasferire ricchezza dallo stato 2 allo stato 1 al tasso $(dW_2/dW_1) = \gamma / (1 – \gamma)$. Se Andrea acquista la quantità ottima d'assicurazione, a quanto ammonta la sua ricchezza se si verifica lo stato 1?

a) 100, poiché il premio è troppo alto per assicurarsi completamente, anche se Andrea è avverso al rischio
b) 120
c) 250
d) 500
e) nessuna delle altre risposte indicate è corretta

SOLUZIONI
1. C
2. C
3. D – la lotteria ha una utilità attesa pari a ½ $3(64^{1/2})$+ ½ $3(16^{1/2})=18$, e quindi un equivalente certo C pari a 36, ottenibile da U(C)=18, quindi $3(C^{1/2})=18$. Allora un valore certo inferiore a 36 induce il soggetto a partecipare alla lotteria
4. D
5. C (vedi esercizio svolto Assicurare un carico di merce)
6. B (vedi esercizio svolto Assicurare un carico di merce)
7. D (vedi commento sotto)
8. A – Il soggetto neutrale rispetto al rischio ha curve di indifferenza lineari, inclinate come il rapporto fra le probabilità, nel piano dei beni contingenti. Infatti la sua utilità attesa è: $\pi\, u(c_1) + (1-\pi)\, u(c_2)$ con u(c)=c (oppure $u=\alpha\, c + \beta$, comunque lineare), per cui $MRS = \pi/(1-\pi)$. Siamo quindi sostanzialmente nel caso dei beni perfetti sostituti. Se il premio assicurativo non è equo, non si assicura (vincolo di bilancio più inclinato della curva di indifferenza, poiché $\gamma > \pi$); se il premio è equo, tutte le combinazioni sul vincolo di bilancio sono indifferenti fra di loro, quindi assicurarsi è una possibilità come altre con stesso valore atteso, come è ovvio per un soggetto avverso al rischio; la terza situazione, premio non equo ma inferiore alle probabilità, non si verifica (l'impresa assicurativa non può fare profitti positivi in questa situazione).
9. A – Il soggetto si può muovere lungo un vincolo di bilancio pari a $W_2= -\gamma/(1 – \gamma)\, W_1 + 500 = -W_1 + 500$ (prima condizione per l'ottimo), e sceglie ove è soddisfatta anche la condizione di tangenza $MRS=\gamma/(1 – \gamma)$ cioè $\pi U'(W_1)/(1–\pi)U'(W_2)= \gamma/(1 – \gamma)$, in questo caso pari a $(½)W_2^{½}/W_1^{½} = 1$ da cui $W_2=4W_1$ (seconda condizione per l'ottimo). La scelta è il paniere (100,400).

COMMENTO ESERCIZIO 7 (in risposta a e-mail del 2.3.2018).

La ratio del 7 è che: a) il soggetto è avverso al rischio (si vede dalla funzione di utilità), b) il premio assicurativo è equo (pari alla probabilità), quindi si assicura completamente, il che vuol dire che K=300, corrispondente alla perdita che può avere con dotazione (100,400). Allora $W_2=400-(1/3)300=300$ e $W_1=100-(1/3)300+300=300$. Se il premio non fosse equo dobbiamo valutare se gli conviene assicurarsi comunque per un $K<300$ (e in casi estremi potrebbe essere k=0)
questo è quello che succede nell'esercizio 9 (attenzione: nell'esercizio 7 il premio è equo, nel 9 no!) Naturalmente anche il 7 potrebbe essere risolto con il metodo del 9, valutando MRS=premio/1-premio e scrivendo il vincolo di bilancio, ma siccome la teoria ci dice che il soggetto si assicura completamente non c'è bisogno di farlo. Cordialmente, CZ