UNIVERSITÀ
DI SIENA
1240

# Analisi Statistica del Reddito e delle Disuguaglianze

## Capitolo 2

## La distribuzione del reddito: indici di disuguaglianza

Reddito individuale vs. totale vs. equivalente

Modelli distributivi*

Indici di concentrazione:

- Curva di Lorenz
- Indice di Gini

Indici di diseguaglianza:

- Indice di Atkinson
- Indici di Entropia Generalizzata

Cenno agli Assiomi (Cap. 3)

* Parte di questo paragrafo costituisce un **approfondimento**.

# Reddito individuale vs. totale vs. equivalente

- Nell'analisi della distribuzione dei redditi, oltre alla necessità di analizzare le varie componenti del reddito, è necessario anche individuare **l'unità di riferimento**. Ovviamente a seconda dei dati rilevati può essere più opportuno avere informazioni relative ai singoli individui (che non sono esposte alle differenze derivanti dalle dimensioni e dalla struttura delle famiglie) oppure alle famiglie. In questo caso la variabile reddito totale familiare non può essere confrontata tra nuclei con differenti caratteristiche.
- E' necessario introdurre il cosiddetto "reddito equivalente", attraverso le scale di equivalenza.
- L'Appendice 2 tratterà in dettaglio questo argomento; adesso introduciamo solamente il concetto.

# Confronto tra redditi di famiglie con differenti caratteristiche socio-demografiche

Famiglia “A” 30.000 Euro annui

4 componenti

$$\begin{cases} Genitori \\ Figlio\, 13\; anni \\ Figlio\, 7\; anni \end{cases}$$

Famiglia “B” 20.000 Euro annui

2 componenti

$$\left\{ Coppia\ di\ adulti \right.$$

# Reddito PRO-CAPITE

- Famiglia “A”: $$\frac{30.000 \in}{4} = 7.500 \in$$

- Famiglia “B”: $$\frac{20.000 \in}{2} = 10.000 \in$$

- <u>Vantaggio</u>: Definizione semplice e confrontabile
- <u>Difetto</u>: non tiene conto delle “<u>Economie di scala</u>” presenti nelle famiglie

# Reddito Equivalente

Nella misura tradizionale della povertà si utilizza una variabile monetaria che deriva dal *Reddito Familiare Disponibile*, definito:

- Reddito Equivalente

Il reddito familiare disponibile viene diviso per un coefficiente (numero indice economico) definito:

- Scala di equivalenza

# Esercizio: Scale OECD - Oxford

SCALA OECD 70 – 50 (Oxford)
1 per il primo adulto
0.7 per ogni successivo adulto
0.5 per ogni figlio sotto i 16 anni

- SCALA OECD “modificata” da EUROSTAT (1997)

1 per il primo adulto
0.5 per ogni successivo adulto
0.3 per ogni figlio sotto i 16 anni

<u>Esercizio per la prossima lezione</u>: confrontare il benessere delle due famiglie utilizzando la Scala 70-50 e successivamente la scala 50-30.

# Modelli per la distribuzione del reddito - 1

- Quando si analizzano le distribuzioni di reddito, si può cercare di ricondurle a modelli teorici, sia per scopi puramente descrittivi, sia per formulare schematicamente una determinata teoria sui meccanismi distributivi.
- Nel caso in cui si utilizzino i modelli per scopi descrittivi, devono essere trovate delle funzioni di densità o di ripartizione per interpolare i dati nel miglior modo possibile.

# Modelli per la distribuzione del reddito - 2

Lo scopo consiste nel trovare funzioni matematiche che generino distribuzioni di frequenza che si adattino bene alle distribuzioni di reddito osservate, e che abbiano anche un fondamento teorico. Esistono numerosi modelli tra i quali scegliere la forma analitica che meglio si adatta ad interpolare la distribuzione empirica di nostro interesse.

Di seguito verranno illustrati alcuni modelli parametrici.

# Modelli per la distribuzione del reddito – 2
# Il modello di Pareto (noto anche 80-20)

Il primo modello è stato proposto da Pareto nel 1895, introdotto con l'obiettivo di interpolare la parte destra (superiore) della distribuzione del reddito; non è però in grado di ben modellare la parte sinistra della distribuzione.

Per gli obiettivi del corso, la parte sinistra è forse la parte più interessante e importante della distribuzione.

Il modello di Pareto si basa sulla constatazione che in numerose distribuzioni di reddito osservate, **l'elasticità** della funzione $G(y)=1-F(y)$ (frequenze retrocumulate delle unità statistiche) rispetto a $y$ risulta all'incirca costante.

# Modelli per la distribuzione del reddito – 3
# Il modello di Pareto

- Da questo deriva la seguente formulazione matematica del modello di Pareto:
- 
- $$G(y) = 1 - F(y) = Ky^{-\alpha} \qquad (2.1)$$

- dove *K* e *α* sono costanti determinabili sulla base dei dati osservati. Pareto propose anche due forme più generali della (2.1).
- La (2.1) è l'equazione di un'iperbole, che in forma logaritmica diventa:

- $$\log G(y) = \log K - \alpha \log y \qquad (2.4)$$

# Modelli per la distribuzione del reddito – 4
# Il modello Lognormale

- Un altro importante modello è il Lognormale.
- In generale, una variabile ha distribuzione Lognormale, se il suo logaritmo ha distribuzione normale:
- $$F(y) = N\left[\left(\frac{\log y - \mu}{\sigma}\right);0,1\right] \qquad (2.5)$$
- dove $\mu$ è il logaritmo della media geometrica dei redditi e $\sigma^2$ la varianza dei redditi.

# Modelli per la distribuzione del reddito* - 5

- In letteratura sono stati introdotti altri modelli distributivi in due parametri: la distribuzione Gamma, proposta da Ammon (1895) e successivamente reintrodotta da Salem e Mount (1974) per analizzare i redditi degli Stati Uniti, e la distribuzione di Weibull, presentata da Bartels e Van Metile (1975).
- Altri modelli fanno riferimento alle distribuzioni generalizzate Gamma e Beta, oppure appartengono alla famiglia dei modelli di distribuzione di Burr: si tratta del modello Singh-Maddala (1976), noto anche come Burr12, e il modello di Dagum (1977), noto come Burr3.

- * Da qui in poi, questo paragrafo costituisce un a**pprofondimento**.

# Modelli per la distribuzione del reddito – 6

## Il modello Singh-Maddala

- Il modello di Singh-Maddala, si basa sull'ipotesi che l'elasticità della funzione *G(y)* (frequenze retro cumulate delle famiglie) rispetto a *y*, <u>cresca all'aumentare dei livelli di reddito, per poi stabilizzarsi</u>.
- Il modello ha la seguente forma:
- $F(y) = 1 - G(y) = 1 - (1 + ay^b)^{-c}$ (2.6)
- I parametri (*a,b,c*) possono essere stimati con la regressione non lineare, minimizzando la somma dei quadrati degli scarti tra i valori osservati *G(y)* e i corrispondenti valori stimati.

# Modelli per la distribuzione del reddito – 7
# Il modello Dagum

- Il modello di Dagum si basa su tre parametri:
- *b*, una costante di dimensione, che dipende dall'unità di misura della variabile *y*;
- *p* e *a*, parametri che dipendono dal grado di ineguaglianza della distribuzione.
- Questo modello può essere generalizzato mediante l'introduzione di un ulteriore parametro *α*, ed assume la seguente forma:
- $$F(y) = \alpha + (1-\alpha)\left(1+(y/b)^{-a}\right)^{-p} \qquad (2.7)$$

# Modelli per la distribuzione del reddito – 8
# Il modello Dagum

Possiamo avere tre tipi di distribuzione di Dagum: 1, 2 e 3, che corrispondono rispettivamente a $\alpha$=0 (modello con 3 parametri), 0<$\alpha$<1, e $\alpha$<0.

Il modello Dagum 2, ammette che possano esserci anche individui con reddito negativo o nullo con $F(0)= \alpha$. (ex. 1 Redditi individuali lavoratori autonomi, oppure ex. 2 tutta la popolazione compresi i non redditieri)

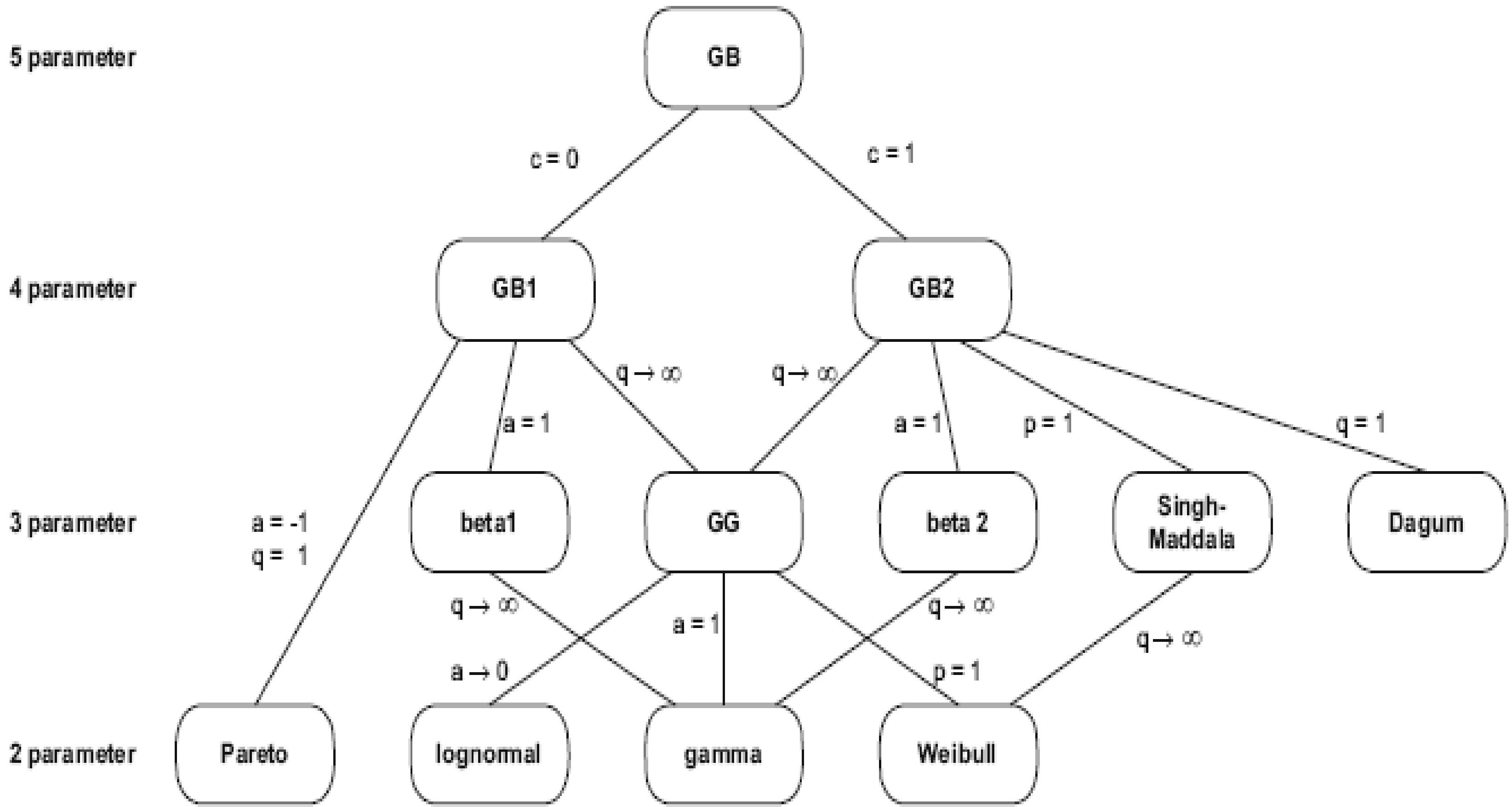
Il modello Dagum 3 richiede che tutti gli individui abbiano un reddito maggiore di un reddito minimo assegnato, $y0$>0. (ex. Analisi redditieri che LAVORANO in un certo settore economico)

Anche in questo caso, la stima dei parametri del modello può essere effettuata con vari metodi econometrici.

# Modelli per la distribuzione del reddito – 9
# Il modello Beta Generalizzato

- Vediamo adesso altri modelli come il generalizzato Beta di primo e secondo tipo (GB1 e GB2); si tratta di distribuzioni con quattro parametri, molto importati perché non solo interpolano bene i dati, ma anche perché includono tutti i modelli menzionati sopra, come casi limite o casi particolari.
- Il successo empirico dei modelli GB2 è stato confermato da quelli teorici di generazione del reddito elaborati di Parker, che hanno mostrato come i guadagni (salari individuali) seguano una distribuzione del tipo GB2.

# Albero delle distribuzioni




- Fonte: Dastrup *et al.* (2007), *Journal of Economic Inequality*

# Curva di Lorenz - 1

- La curva di Lorenz (Max O. Lorenz, 1905) è uno strumento grafico proposto per l’analisi della disparità nella distribuzione di un certo attributo. Solitamente questo attributo è il reddito, ma non sono escluse altre numerose applicazioni di questo strumento. Di seguito ci concentreremo proprio sul reddito.
- La curva di Lorenz è una misura relativa della disuguaglianza che consente di rappresentare graficamente la quota di reddito totale percepita da una porzione (frazione cumulata) di popolazione **ordinata** per livelli non decrescenti di reddito.

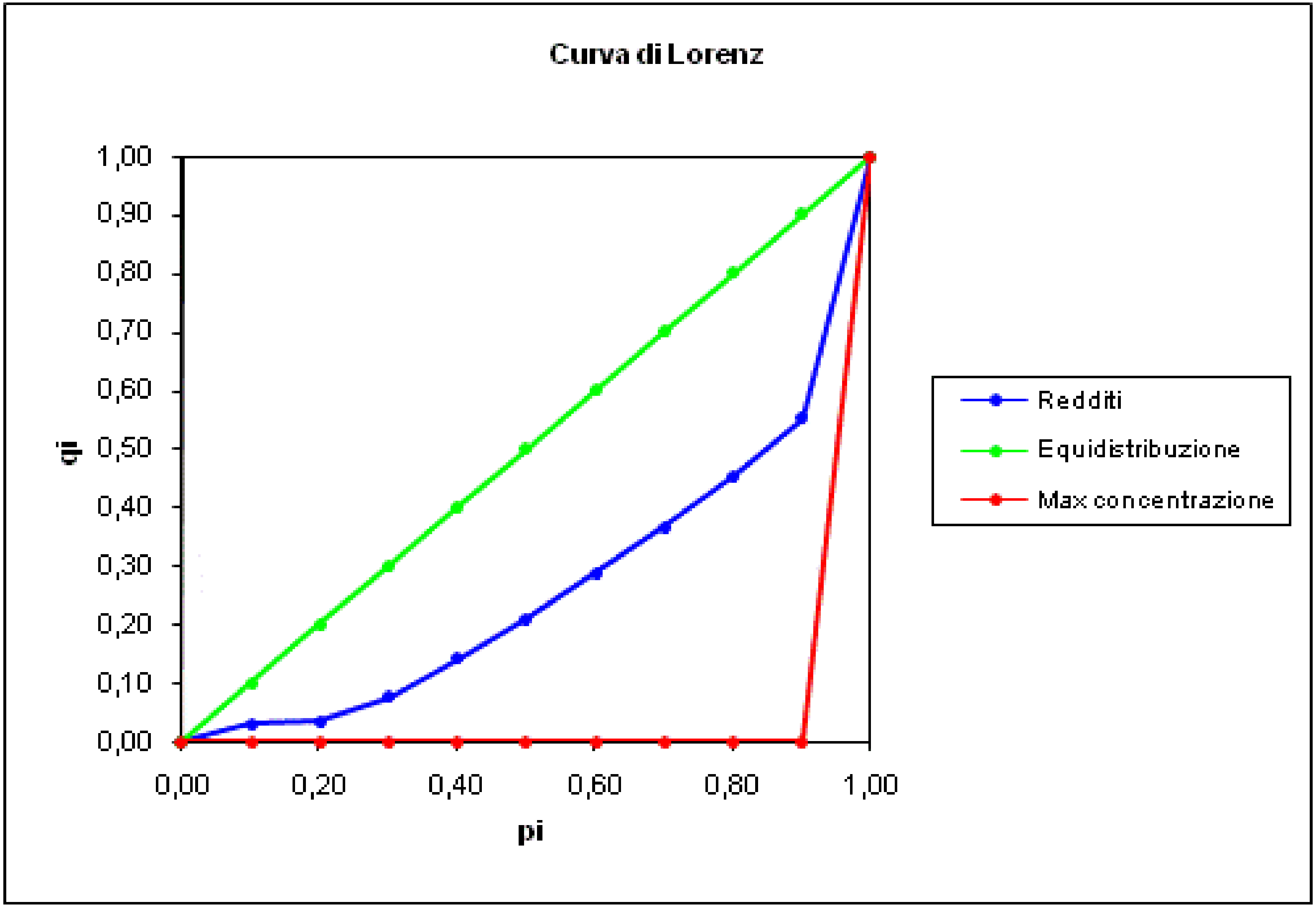
# Curva di Lorenz - 2

- La curva di Lorenz è la relazione che lega ciascuna quota cumulata della popolazione con la corrispondente quota del reddito totale posseduta da queste persone.
- Esistono due casi estremi di distribuzione tra gli individui: **l'equidistribuzione**, dove ciascun individuo ha la stessa quantità della media cioè il k% della popolazione ha il k% del reddito totale, e la **massima concentrazione**, nella quale un solo individuo ha tutto il reddito e gli altri hanno un reddito pari a zero.
- Poiché per analizzare la disuguaglianza gli individui vengono ordinati per redditi crescenti, avremo una curva che si trova sempre al di sotto della bisettrice, in quanto il k% più povero della popolazione possiede sicuramente meno del k% del reddito complessivo, ed avrà una inclinazione positiva e crescente.

# Curva di Lorenz - 3

- Da un punto di vista di analisi delle funzioni, la curva è sempre convessa, e questo deriva dal fatto che – come appena accennato sopra - per costruirla tutte le unità di analisi sono ordinate per livelli di reddito non decrescenti.
- Come già affermato la curva di Lorenz informa sul grado di disuguaglianza della distribuzione, e quanto più questa curva si trova vicina alla bisettrice e tanto più la distribuzione è egualitaria.

# Curva di Lorenz - 4



# Indice di Gini - 1

- A partire dall’area compresa tra la curva e la retta di equidistribuzione si possono definire gli indici di concentrazione, che valutano la tendenza della variabile oggetto di studio a concentrarsi su poche delle n unità statistiche oggetto d’indagine. Una misura sintetica della disuguaglianza molto diffusa è l’indice di Gini (1914).
- Questo indice fornisce un’immediata interpretazione geometrica della curva di Lorenz.

# Indice di Gini - 2

- L'indice di Gini è calcolato come il rapporto tra l'area compresa tra la diagonale (la linea di uguaglianza perfetta, retta a 45°) e la curva di Lorenz, e l'area del triangolo sottesa alla diagonale. Utilizzando la simbologia riportata nella Figura 2.2:
- $$G = \frac{A}{A+B} \qquad (2.21)$$
- Poiché l'area (A+B) e pari a ½, allora G=2A=2(1/2-B)=1-2B. Se il reddito fosse distribuito in modo perfettamente omogeneo tra i redditieri, la curva di Lorenz corrisponderebbe alla bisettrice, A=0 e G=0. Se invece tutto il reddito appartenesse ad un solo individuo, l'area B sarebbe uguale a 0 e l'area A sarebbe uguale a ½, da cui G=1.

# Indice di Gini - 3

- Esistono molte altre formule alternative per calcolare il valore dell'indice di Gini (Xu, 2004). Una tra le più diffuse si può ottenere attraverso alcuni passaggi partendo dalla definizione (2.21):
- $$G = 1 + \frac{1}{N} - \frac{2}{N^2 \bar{y}} \sum_{i=1}^{N} (N + 1 - i) y_{(i)} \qquad (2.22)$$
- L'indice in questa formulazione può essere interpretato come il gap atteso tra i redditi di due individui selezionati in modo casuale dalla popolazione:
- $$G = \frac{2}{N^2 \bar{y}} \sum_{i=1}^{N} i \left( y_{(i)} - \bar{y} \right) \qquad (2.23)$$
- dove N è la numerosità della popolazione, $\bar{y}$ è il reddito medio, e gli individui sono ordinati per valori non decrescenti del reddito.

# Indice di Gini - 4

- Ovviamente, per tutte le formulazioni proposte in letteratura, l'indice assume valori compresi tra 0, dove tutti gli individui percepiscono lo stesso reddito (assenza di ineguaglianza) e 1, dove solo un individuo possiede tutto il reddito disponibile (perfetta ineguaglianza). Maggiore risulta essere il valore di questa area e maggiore risulta essere la disuguaglianza nella distribuzione del reddito.
-
- <u>Esercizio per la prossima lezione</u>: utilizzando la formula (2.23)

$$G = \frac{2}{N^2 \bar{y}} \sum_{i=1}^{N} i\left(y_{(i)} - \bar{y}\right)$$

- dimostrare che, con un campione di N redditieri, l'indice è pari a zero nel caso di equidistribuzione, e **tende** a 1 nel caso di massima concentrazione.

# Cenno agli Assiomi (Cap. 3)

- Assioma B o di trasferimento di Bonferroni, Pigou e Dalton: il trasferimento di reddito da un individuo ad un altro avente reddito inferiore deve far diminuire la misura di disuguaglianza (povertà). Si parla di principio di trasferimento decrescente se il valore dell’indice si riduce in seguito ad un trasferimento progressivo in modo tanto maggiore quanto più basso è il reddito del soggetto beneficiario.

- Assioma dell’anonimità (o simmetria): l’indice deve essere insensibile a permutazioni dei redditi. Ovvero se un ricco e un povero si scambiano i redditi, il valore dell’indice non deve mutare poiché le identità dei soggetti sono irrilevanti.
- (Fondamentale nelle indagini campionarie per la privacy)

# Cenno agli Assiomi (Cap. 3)

- Assioma dell'indipendenza dalla media (o indipendenza di scala): se tutti i redditi vengono moltiplicati per una costante, l'indice non cambia. Se vale questa proprietà l'indice è detto **relativo**.
- Assioma dell'indipendenza dalla popolazione: se ogni reddito viene replicato k volte, la disuguaglianza, o il livello di povertà della nuova distribuzione sono uguali alla distribuzione di partenza.
- Assioma della scomponibilità per gruppi: se l'indice può essere espresso come una somma ponderata dei valori che questo assume in ciascun sottogruppo (supposto che la popolazione possa essere suddivisa in gruppi), più un termine che misura la disuguaglianza tra i gruppi. $I = I_W + I_B$ dove il primo esprime la diseguaglianza all'interno dei gruppi (*within groups*) e dipende dalla dispersione delle risorse all'interno di ciascuno dei gruppi considerati, mentre il secondo esprime la disuguaglianza tra gruppi (*between groups*) e riflette solo le distanze tra i redditi medi dei gruppi.

# Indice di Gini - 5

- L’indice di Gini **soddisfa** le proprietà di simmetria, di indipendenza dalla media e dalla popolazione e il principio del trasferimento. Facendo riferimento a questa ultima proprietà, e considerando la formula (2.22), possiamo notare come la sensibilità di G ad un trasferimento di reddito da un ricco ad un povero non dipende dai livelli di reddito dei due individui, bensì dalla loro differenza di rango nella scala dei redditi.
- L’indice di Gini **non soddisfa** il principio di trasferimento decrescente, e nemmeno la <u>proprietà di scomponibilità esatta tra gruppi</u> della popolazione

# Indice di Atkinson - 1

- Consideriamo adesso un importante indice di disuguaglianza definito “etico”, in quanto deriva da una funzione di benessere sociale, identificando la disuguaglianza con la perdita di benessere sociale causata da una distribuzione disuguale dei redditi.
- Atkinson (1970) ha presentato questo indice rivoluzionando la ricerca nell’ambito delle misure di disuguaglianza, evidenziando che ogni indice incorpora un giudizio di valore.
- Questo indice si basa su una struttura delle preferenze collettive corrispondenti ad una funzione di benessere sociale, separabile in senso additivo e simmetrica nei redditi individuali.

# Indice di Atkinson - 2

- Si possono definire più indici di Atkinson in base al valore di un parametro interpretato come coefficiente di avversione alla disuguaglianza; quando il parametro aumenta l'indice aumenta, poiché viene data più importanza alle code basse della distribuzione. Questo indice si può definire nel modo seguente:
- $$A = 1 - \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{y_i}{\bar{y}} \right)^{1-\varepsilon} \right]^{1/(1-\varepsilon)} \qquad (2.28)$$
- dove $\varepsilon$ è l'avversione alla disuguaglianza.

# Indici di entropia generalizzata - 1

- Molto importanti sono anche gli indici di entropia generalizzati, *general entropy* (GE); si tratta di una classe di indici basata sulla teoria che misura il valore informativo (entropia) di un sistema di eventi incerti.

- L'assunto su cui si basa la teoria è che quanto minore è la probabilità che l'evento incerto si verifichi, tanto maggiore è il valore informativo dell'evento stesso (e viceversa).

# Indici di entropia generalizzata - 2

- Avvalendosi di alcune analogie formali e reinterpretando opportunamente alcuni concetti di base della teoria dell’informazione, è possibile riformulare la misura dell’entropia in termini di disuguaglianza (Cowell, 1995). Questi indici sono espressi nella seguente formula generale:

- GE(α)= $\frac{1}{\alpha^2-\alpha}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right)^{\alpha}-1\right]$ (2.29)

# Indici di entropia generalizzata - 3

- La misura della GE attribuisce pesi diversi a diverse parti della distribuzione del reddito, a seconda del valore assegnato al parametro $\alpha$, che può assumere qualsiasi valore reale. Per bassi valori di $\alpha$, GE è più sensibile alle variazioni lungo le code della distribuzione, e per alti valori di $\alpha$, GE è più sensibile alle variazioni nella parte centrale della distribuzione. I valori più utilizzati di $\alpha$ sono 0, 1 e 2.

# Indici di entropia generalizzata - 4

- GE(0) = L, detto anche deviazione logaritmica media (*mean logarithmic deviation*):
- GE(0) = L= $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln\frac{\bar{y}}{y_i}$ (2.30)
- GE(1) = T, la misura di entropia di Theil (1967):
- GE(1) = T = $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i}{\bar{y}}\ln\frac{y_i}{\bar{y}}$ (2.31)
- GE(2) è la metà del quadrato del coefficiente di variazione:
- GE(2) = $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right)^2-1\right]$ (2.32)

# Indici di entropia generalizzata - 5

- La *general entropy* (GE) è una misura che varia tra 0 e 1, dove zero rappresenta una distribuzione equa, e alti valori dell'indice rappresentano più alti livelli di ineguaglianza, 1 si ha in presenza di massima ineguaglianza.
- Tutti gli indici di entropia generalizzata soddisfano gli assiomi di simmetria, indipendenza dalla media e dalla popolazione; l'indice L è inoltre coerente con l'assioma B di trasferimento di Bonferroni, Pigou e Dalton.
- Gli indici di entropia generalizzata godono della importante proprietà di scomposizione; possono essere scomposti per sottopopolazioni, individuando la quota di disuguaglianza presente in una popolazione dovuta alle diversità fra i gruppi (Regioni, Province, ecc…) e la quota di disuguaglianza dovuta alle diversità delle unità statistiche (famiglie o individui) all'interno dei gruppi.

# Indici di entropia generalizzata - 6

- Caso di Studio:

scomposizione dell'indice di Theil, Albania

Table 10: Decomposition of the GE(1) inequality index (Theil).

| Level of Decomposition | Number of Units | Within-Group Inequality | Between-Group Inequality | % Between-Group Inequality |
|---|---|---|---|---|
| **Albania** | **1** | **15.05** | **0** | **0** |
| Urban - rural | 2 | 13.85 | 1.20 | 8.0 |
| Strata | 4 | 14.51 | 0.54 | 3.6 |
| Strata – urban / rural | 6 | 13.65 | 1.40 | 9.3 |
| Prefectures | 12 | 13.71 | 1.34 | 8.9 |
| Districts | 36 | 13.17 | 1.88 | 12.5 |
| Communes/ Municipalities | 374 | 12.50 | 2.55 | 16.9 |
| **Rural** | **1** | **13.74** | **0** | **0** |
| Communes | 309 | 11.40 | 2.34 | 17.0 |
| **Urban** | **1** | **14.02** | **0** | **0** |
| Municipalities | 65 | 13.27 | 0.75 | 5.3 |

Source: Neri, Ballini and Betti (2005).