DAL DATO
ALL'INFORMAZIONE GESTIONALE

Strumenti statistici per supportare sistemi di controllo di gestione e di comunicazione integrata

Duccio Stefano Gazzei

Con il contributo di:
Gian Piero Cervellera e Gianni Betti

Introduzione

La Statistica Aziendale è una materia in continua evoluzione.

A differenza di altre discipline quantitative, che per buona parte si basano su uno stabile *corpus* di teorie che ne costituiscono lo "zoccolo duro" concettuale di base, la Statistica Aziendale è costretta a modificare in continuazione gli strumenti utilizzati perché si trasforma l'oggetto principale del suo interesse: l'Azienda appunto.

Quando ci si domandi come organizzare un progetto formativo che si basi su tecniche di Statistica Aziendale, è quindi fondamentale contestualizzare il progetto stesso al tipo di azienda ed al momento nei quali ci si trova ad operare.

Ci è quindi sembrato subito importante ricercare un modello di riferimento al quale poterci ispirare. Quest'ultimo avrebbe dovuto fondare nella sinergia tra le diverse funzioni il suo principale elemento di forza.

La scelta è caduta sulla rivisitazione di un "impianto" concettuale che oggi sta avendo un certo sviluppo e che è noto come *Balanced Scorecard* (BS).

In linea generale, secondo le logiche del BS, la buona performance di una azienda (sia questa pubblica che privata), si ottiene dall'azione combinata delle attività dirette verso quattro "linee" strategiche:

- **L'efficienza interna**: l'ottimizzazione dell'utilizzo delle risorse produttive interne dato un certo livello di produzione;
- **L'efficienza esterna**: la ricerca continua dello sviluppo dei volumi di produzione (servizi) date le risorse produttive interne disponibili e il n° di clienti attuali;
- **Il cliente**: lo studio della capacità di soddisfazione del cliente interno ed esterno;
- **L'innovazione**: l'analisi dei processi aziendali per assicurare all'azienda la capacità di creare valore costantemente nel tempo.

Se si segue questo approccio nella comprensione degli *Strumenti statistici per supportare sistemi di controllo di gestione e di comunicazione integrata*, ci si muove dalla consapevolezza che nessun indicatore di risultato, preso singolarmente, può consentire di catturare in modo esaustivo la complessa e multiforme situazione aziendale.

E' invece indispensabile costruire un sistema organico di indicatori di prestazione tra loro collegati che permettano al *management* di valutare i risultati di gestione di un'azienda in modo globale e tempestivo. Tali indicatori devono essere dei parametri che ci portino a capire i legami causa-effetto che generano i risultati aziendali, guardando anche al di fuori dell'azienda, verso il cliente, il mercato e il futuro.

Questa dispensa (come si sono svolte le giornate del corso) segue questa impostazione.

Dopo una prima parte dedicata alla presentazione del BS, infatti, i quattro capitoli che seguono avranno come argomento proprio le quattro linee strategiche che rappresentano le “prospettive” della buona gestione.

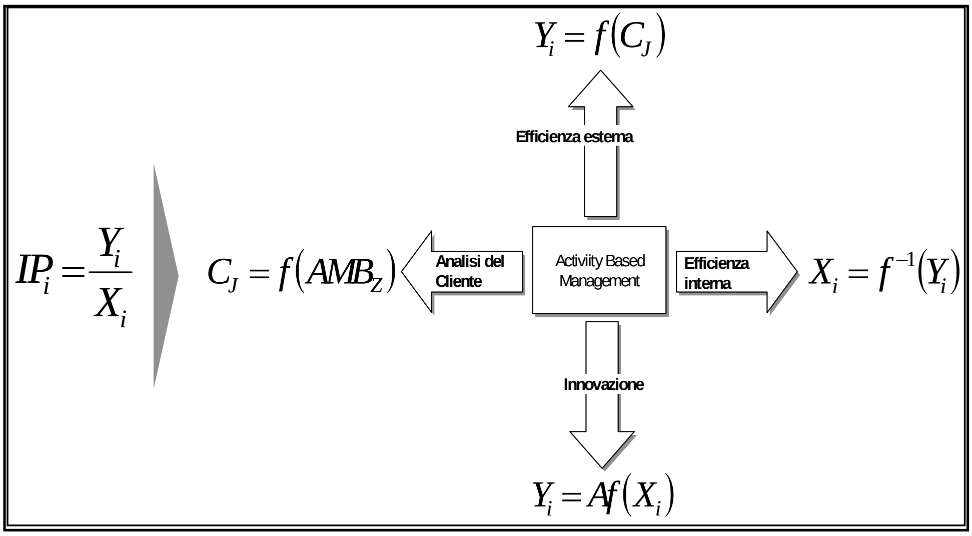
Per ogni “prospettiva” approfondiremo le tecniche più moderne per realizzare un efficace impianto di misurazione basato su misure statistiche.

Ed il dato potrà diventare, finalmente, informazione.

Capitolo 1. Il Balanced Scorecard System: un sistema integrato e bilanciato di misura della performance

Tra i diversi approcci alla misurazione della *performance* aziendale, sviluppati dalla teoria alla pratica nel corso degli ultimi dieci anni, si distingue quello di Kaplan e Norton, due studiosi statunitensi, proposto agli inizi degli anni '90: il *Balanced Scorecard System* (BS).
Il BS nasce a seguito di un'indagine, condotta dai suoi autori, la quale coinvolse i vertici di importanti società americane, per analizzare i sistemi in uso di misurazione della *performance* aziendale.
Come accennato nell'introduzione, questo approccio parte dalla consapevolezza che nessun indicatore di risultato, preso singolarmente, sia in grado di indagare appieno la situazione aziendale, e quindi riconosce l'esigenza di costruire un sistema organico di indicatori di prestazione tra loro collegati i quali permettono al *management* di valutare i risultati di gestione di un'azienda in modo globale e tempestivo.
Tali indicatori sono dei parametri che portano a capire i legami di causa-effetto che generano i risultati aziendali, guardando anche al di fuori dell'azienda, verso il cliente, il mercato e il futuro.
Il BS supera il ruolo del "cruscotto gestionale", denominato *Tableau de Board,* su cui ci soffermeremo più avanti, orientato per lo più all'interno dell'azienda e al monitoraggio delle *performance* consuntive.
In particolare, nella nostra accezione, il BS, propone di misurare la *performance* aziendale lungo quattro dimensioni (o prospettive) rilevanti, fissate a partire da quelle che sono considerate le determinanti chiave del successo competitivo.

Figura 1: Le dimensioni del Balanced Scorecard System



La prospettiva detta della "**efficienza interna**", studia i processi aziendali con l'obiettivo di individuare quelli *core* per la soddisfazione del cliente e dell'azionista.

La prospettiva “**innovazione**”, analizza i processi aziendali per assicurare all’azienda la capacità di creare valore costantemente nel tempo.
La prospettiva “**analisi del cliente**”, analizza le esigenze del cliente al fine di poterle meglio soddisfare.
La prospettiva “**efficienza esterna**”, mira al conseguimento dei migliori risultati economici e monetari al fine di soddisfare le aspettative del cliente.

Le quattro prospettive in oggetto sono strettamente integrate e possono essere lette a sistema, in quanto creano una struttura chiara e quantitativamente coerente per indirizzare i piani operativi di ogni unità funzionale verso gli obiettivi globali d’azienda.

$$\begin{cases} X_i = f^{-1}(Y_i) \\ Y_i = f(C_j) \\ C_j = f(AMB_z) \\ Y_i = Af(X_i) \\ A = f(t) \end{cases} \qquad [1.1]$$

dove:
Y_i = generico aggregato *output*
X_i = generico aggregato *input*
C_j = tipologia del cliente j
AMB_z = variabili di contesto ambientale
A = indice di progresso ambientale funzione del tempo t

La prima delle relazioni sta a significare che le azioni che vengono svolte da chi opera nella prospettiva dell’**efficienza interna**, devono portare alla fissazione del giusto volume di consumo delle risorse (X_i), dato il livello della produzione (Y_i).
Le dinamiche attraverso le quali viene determinato il giusto livello di produzione (Y_i), vengono analizzate nella seconda relazione della [1.1]. Siamo qui sulla prospettiva dell’**efficienza esterna** e la produzione è funzione delle caratteristiche e delle aspettative della clientela (C_j).
Quest’ultime (C_j) vengono analizzate in relazione alle variabili territoriali di contesto (AMB_z), nell’ambito della prospettiva del **cliente** (terza relazione della [1.1]).
Le ultime due relazioni studiano la prospettiva della **innovazione:** l’oggetto dell’interesse è qui l’indice A e come questo si muove in funzione del tempo *t*.

La [1.1], quindi, dietro le formalizzazioni matematiche, sta a ricordarci che per contentare i propri azionisti, il *management* deve portare l’azienda a risultati reddituali e monetari adeguati; per conseguire quest’obiettivo è, però, necessario soddisfare le aspettative dei propri clienti; e ciò richiede che i processi aziendali siano in grado di garantire elevata qualità del prodotto/servizio a costi contenuti.

Ed allora “*…le aziende, nell’impostare il sistema di reporting direzionale, dovrebbero selezionare quei parametri che meglio sono in grado di stimolare comportamenti volti a conseguire la prescelta strategia e i relativi obiettivi….forse, negli ambienti produttivi, sarebbe necessario sviluppare un* *maggior coordinamento tra i dati operativi (per la gran parte misure di tipo fisico-tecnico predisposte per i manager di produzione) e i parametri economico-finanziari" (Kaplan,1983).*

Nelle parole di Kaplan, studioso di *management* statunitense, riecheggia l'importante considerazione che i sistemi di misurazione della *performance* debbano fornire a tutto il corpo aziendale le linee guida da seguire, spiegando a ogni dipendente quali risultati si aspettino da lui e indicandogli le azioni da intraprendere per conseguire quei risultati.
Tali sistemi hanno un forte impatto sulla definizione degli obiettivi, sulla comunicazione della strategia all'interno dell'organizzazione e sul cambiamento degli individui.
Diventa quindi critico, per disporre di un efficace sistema di misurazione delle prestazioni, riuscire a mantenere un costante allineamento tra la *vision*, la strategia, gli obiettivi, i programmi di azione, i parametri di misurazione dei risultati e i sistemi premianti.
Le aziende che vorranno affrontare le sfide competitive dei prossimi anni conseguendo gli obiettivi attesi, dovranno adottare un approccio più efficace alla misurazione e alla gestione delle *performance* aziendali.
La capacità di sopravvivere di tutte le organizzazioni dipenderà dalla capacità del *management* di focalizzarsi su ciò che è veramente importante per il mantenimento del vantaggio competitivo aziendale, gestendo le risorse in modo più efficace e misurando sistematicamente il progresso verso gli obiettivi prefissati.
Un'azienda che voglia acquisire o conservare risultati di successo deve disporre di un sistema di misurazione della *performance* che vada oltre i semplici risultati puramente economici-finanziari. Questi ultimi possono essere molto volatili e non tengono conto di due variabili fondamentali per il conseguimento del vantaggio competitivo nel lungo periodo: il giudizio del cliente circa l'offerta dell'azienda e il comportamento dei dipendenti.
Le informazioni circa la *performance* aziendale, per stimolare efficaci interventi di miglioramento, devono essere predittive e focalizzate sulle determinanti ultime della *performance* stessa.
Il BS, allora, introduce accanto ai tradizionali indicatori finanziari, anche misurazioni che consentono di controllare la prestazioni dei processi di *business*, la capacità di innovazione e soprattutto, la percezione dell'azienda da parte del cliente.

Sezione 1. La prospettiva dell’efficienza interna

La prima parte della nostra analisi si svolge nell’ambito della ricerca dell’efficienza interna.
Si tratta, in sostanza, di determinare il corretto utilizzo delle risorse, dato un volume di produzione atteso.
Dal punto di vista formale ci concentreremo sulla prima delle relazioni della [1.1] dove la variabile *X* rappresenta:

a) spese per il personale;
b) altre spese (per materie prime e capitale).

Le due voci, infatti, raggruppano i “fattori produttivi” utili per ottenere un livello di produzione prefissato.
Molte realtà aziendali stanno affrontando un periodo della sua vita caratterizzato dalla necessità urgente di dover operare forti riduzioni strutturali al costo del lavoro, dettate dalle esigenze urgenti di risanamento del Conto Economico.
Gli interventi che seguiranno (come ci insegna il BS) dovranno legare efficienza interna, aumento della produzione/ricavi, investimenti e ricerca di soddisfazione del cliente. Quindi se prendiamo la “visione” rappresentata formalmente dalla [1.1], possiamo dire che la ricerca dell’efficienza interna è il primo *step* di una stima simultanea dell’intero sistema.

Lo scopo del *management* può essere definito come l’integrazione delle strategie con la misurazione dei processi.
Il controllo dell’andamento aziendale diventa un supporto decisionale efficace solo se le scelte direzionali possono essere focalizzate correttamente e pianificate sotto forma di obiettivi misurabili.
Per gestire meglio un’azienda è necessario conoscere “ciò che si fa“, ovvero quei processi che vengono svolti per progettare, realizzare, promuovere, vendere ed erogare i prodotti e servizi al cliente finale.
Particolare cura deve essere rivolta soprattutto a quei processi *core* che rappresentano “ciò che si fa meglio di tutti gli altri”.
Di conseguenza, i progetti volti al miglioramento dei risultati della gestione aziendale devono interessare quelle attività e quei processi che creano valore per il cliente: diviene, quindi, essenziale spostare l’attenzione del management sulle attività e sui processi gestionali .
L’individuazione dei processi, ovvero delle sequenze di attività che erogano prodotti, servizi, informazioni o procedure, coerenti con gli obiettivi strategici di un’azienda per la soddisfazione di un bisogno specifico del cliente, costituisce un primo passo verso il miglioramento delle transazioni cliente-fornitore interno.
Comprendere le modalità di svolgimento di questi scambi consente di intervenire, in modo continuo e sistematico, affinché ogni unità organizzativa agisca per il soddisfacimento dei bisogni dei clienti, interni e esterni, a beneficio dell’azienda nel suo insieme.
Quest’approccio alla gestione aziendale, che si basa sul concetto di attività e di processo gestionale, prende il nome di *Activity Based Management*.

Capitolo 2. L'Activity Based Management: lo strumento per la pianificazione strategica delle risorse umane.

2.1 L'Activity Based Management

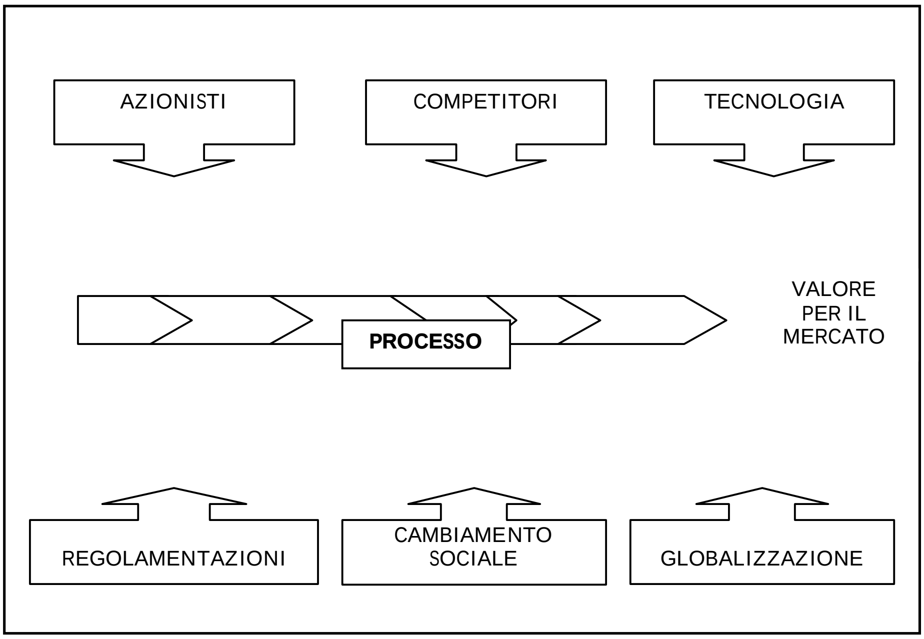
L'**Activity Based Management (ABM)** si propone come un forte stimolo all'adeguamento dei meccanismi di governo delle aziende. Affinché tale stimolo possa essere raccolto concretamente nell'ambito di un'organizzazione aziendale è necessario dare inizio ad un processo di maturazione che porti ad evidenziare una reale necessità di cambiamento.
Il primo passo da compiere è prendere coscienza di come le aziende debbano operare in contesti nuovi, caratterizzati dai cambiamenti avvenuti nei mercati, nelle tecnologie e nelle organizzazioni.
La condizione necessaria per innescare il processo di cambiamento dei meccanismi di governo dell'azienda sta nel riconoscere che nessuna organizzazione può ignorare gli effetti positivi e negativi dell'evoluzione degli scenari competitivi.
Quanto detto appare di difficile applicazione pratica perché, mentre può risultare semplice condividere concetti e teorizzare modelli, lo è molto meno riconoscere la validità e l'applicabilità degli stessi al contesto in cui si intende operare.

L'ABM è lo strumento operativo attraverso il quale si riesce a:

- analizzare l'azienda;
- individuare le logiche economiche e strategiche dei processi di impresa;
- individuare le priorità di cambiamento e la direzione da imprimere allo stesso;
- prevedere gli effetti delle possibili alternative;
- decidere per l'alternativa migliore;
- influenzare il comportamento di coloro che vengono coinvolti nel cambiamento;
- motivare questi ultimi sulle prestazioni che garantiscono l'ottenimento dei risultati previsti;
- eseguire correttamente le decisioni di cambiamento;
- controllare gli effetti delle azioni adottate con misure e metodi congrui.

Inoltre tale strumento consente non solo di guardare l'interno dell'organizzazione (processi interni e costi) ma anche lo scenario che costituisce il suo ambiente esterno (clienti, azionisti, competitori, evoluzione del mercato), dando all'azienda il massimo dell'informazione (Fig. 2).

Figura 2 – Ambiente interno ed esterno per l'azienda



Il presupposto concettuale per fare ciò è dato dal fatto che una gestione orientata al valore non può che misurare la dimensione lungo la quale il valore è generato, e cioè il PROCESSO.
La scelta del processo come struttura di riferimento caratterizza i sistemi avanzati di misurazione dell'azienda rispetto a quelli tradizionali, insufficienti per governare un contesto multievolutivo.
Dal punto di vista metodologico, la forza dell'ABM è data dalla sua universalità nella visione frattale dei processi la quale mette in evidenza anche un altro aspetto: tra un processo di livello superiore e quello di livello a esso inferiore esiste un rapporto cliente-fornitore, concettualmente lo stesso che lega due attività attraverso il meccanismo *input-output.*

L'ABM può essere visto come uno specchio.
A differenza delle misurazioni tradizionali focalizzate su indicatori di costo, i sistemi ABM forniscono ai manager una nuova immagine delle attività che consumano risorse per generare prodotti.
L'approccio per attività nasce come risposta alle crescente esigenza di un sistema avanzato di governo delle aziende.
Storicamente le prime applicazioni dell'approccio *activity-based* sono la risposta a necessità di ridefinizione dei sistemi di calcolo dei costi, conseguenti ai profondi cambiamenti avvenuti.
Sostanzialmente il bisogno di informazioni accurate sui processi produttivi, sulle risorse impiegate e sulle relazioni tra questi elementi ed i prodotti ottenuti non hanno trovato risposte soddisfacenti nei sistemi tradizionali .
Tali modelli, focalizzati su indicatori prevalentemente contabili, scaturiscono da tecniche che non tengono conto dell'aumentata complessità dell'aziende e non recepiscono i cambiamenti nella tecnologia e nell'organizzazione dei processi.

La comprensione dei costi aziendali attraverso la comprensione delle attività presenta una serie di vantaggi e di opportunità.
L'approccio per attività non è una tecnica, per quanto innovativa, di gestione dei costi. In realtà le attività sono gli elementi su cui basare la gestione dell'intera azienda e non solo dei suoi costi.
Il costo di un'attività è un'informazione importante, ma la sua determinazione non è l'obiettivo principale di un progetto ABM. Esso rappresenta uno degli indicatori di *performance* di ogni singola attività; consente di misurare l'assorbimento di risorse da parte delle attività al fine di ottenere un determinato *output*.
Per affrontare e risolvere il problema dell'ottimizzazione delle risorse impiegate, bisogna stabilire precise relazioni tra i fattori produttivi impiegati, le attività svolte e gli *output* ottenuti.
La valutazione dell'efficienza delle risorse impiegate non può essere fatta basandosi esclusivamente sui dati di costo poiché dipende dal valore generato da ciascuna attività.
Il concetto di valore legato alla singola attività è molto importante, in quanto ci permette di considerare un'attività come una microimpresa monoprodotto. L'output prodotto rappresenta l'oggetto di scambio economico.
Uno scambio è da considerarsi economico se esiste un cliente che attribuisce valore ad un bene ed è disposto a pagare un prezzo per ottenerlo. Se tale condizione non è verificata, significa che l'attività può essere eliminata o migliorata attraverso il ridisegno del processo in cui è inserita.
Questo controllo dell'efficacia delle attività e dei processi ha una valenza economica prevalente nei confronti del controllo orientato all'efficienza dei sistemi tradizionali.
Occorre, pertanto, rendere espliciti i legami di tipo logico tra tutte le attività aziendali e impiegare meccanismi operativi in grado di gestire tali legami in modo efficace ed efficiente.

2.2 L'analisi per attività e la costruzione del modello ABM

La **prima fase** di un "progetto ABM" è l'analisi delle attività aziendali e la mappatura dei processi gestionali (*Process mapping*).
In essa si cerca di pervenire alla identificazione degli *output* principali (prodotti, servizi, informazioni, regole, procedure, principi, norme) dell'impresa al fine di ricostruire i processi che li hanno generati.

Si tratta, in genere, di:
- scomporre un'organizzazione complessa in attività elementari più facili da gestire;
- definire un modello di riferimento per i processi gestionali;
- ricostruire una mappa dei legami di tipo logico tra le attività lungo i processi gestionali.

Gli **obiettivi** che stanno alla base della mappatura dei processi gestionali possono essere così riassunti:
- comprendere in che modo le risorse aziendali (umane, tecnologiche e di struttura) vengono impiegate;
- rendere esplicite le interdipendenze che esistono tra le differenti attività anche se svolte da funzioni aziendali distinte;

- imputare i costi delle attività aziendali, soprattutto di quelle legate a processi di natura manageriale e di supporto, agli *output*, oggetti ultimi di calcolo, quali i prodotti, i servizi, le tipologie di clienti, i canali distributivi, le aree geografiche;
- determinare il mix ed il livello appropriati di risorse da assegnare ai processi (*budgeting* di processo);
- semplificare i processi gestionali identificando le attività che non aggiungono valore al processo di costruzione dell'output, ovvero quelle attività ridondanti e non necessarie, che assorbono risorse, aumentando i costi aziendali, senza però generare benefici significativi in termini di posizione competitiva detenuta dall'azienda.

La costruzione di un modello di gestione delle attività e dei processi aziendali risponde a finalità molteplici. La revisione del sistema di contabilità direzionale (*Activity Based Costing*) è solo uno dei risultati più immediati.
Si tratta di giungere: 1) alla **riprogettazione dei flussi di processo** sulla base dell'analisi del valore dei processi (*Process Value Analysis*) e delle relative procedure informativo-informatiche (*Business Process Reengineering*); 2) al **ridisegno dei ruoli organizzativi** (identificazione di *Business Process Owner* e di team interfunzionali permanenti di processo) e delle **professionalità** (*Skill Inventory and Planning*).

2.3 La costruzione della mappa dei processi di azienda

Per effettuare la mappatura dei processi, che porterà, poi, alla definizione di un "Dizionario delle attività", si deve scegliere tra due diverse strategie:

a) **Approccio per funzioni aziendali**: parte dall'analisi organizzativa e porta a migliorare l'efficienza dei processi seguendo la suddivisione dei compiti proposta dalla struttura organizzativa e prendendo in esame le attività realizzate all'interno di ciascuna funzione aziendale.
Le attività si rilevano attraverso il ricorso ad interviste dirette o con la somministrazione di questionari al fine di comprendere come i diversi operatori occupino il loro tempo, piuttosto che come dovrebbero impiegarlo secondo quanto riportato nei mansionari.
La identificazione delle attività risponde alla esigenza di avviare un'approfondita analisi circa le modalità di impiego delle risorse per la successiva applicazione di metodi di imputazione dei costi di struttura basati sull'assorbimento delle attività da parte dei prodotti e servizi offerti.
Legando le risorse alle attività con i "driver di risorsa" e individuando per ogni attività *output* e fattori di complessità, è possibile operare un primo grande riequilibrio dei costi attraverso strumenti, ad esempio, di Controllo Statistico di Processo.

b) **Approccio per obiettivi di processo**: parte dal cliente e porta a migliorare l'efficacia dei processi.
Questi vengono individuati a partire dalle aspettative dei clienti che si desidera soddisfare e, di conseguenza, da quelle variabili, interne d'azienda o esterne d'ambiente, dalle quali dipende il successo (i cosiddetti Fattori Critici di Successo – FCS), intendendo per successo la capacità dell'azienda di produrre un adeguato livello di redditività.

Attraverso questo approccio, si dà maggiore enfasi, sin dagli inizi dell'analisi, alla dimensione trasfunzionale di processo, piuttosto che rimanere legati ai raggruppamenti stabiliti dalla struttura organizzativa, consentendo di evidenziare le interdipendenze tra le differenti unità in relazione agli obiettivi di carattere strategico dell'azienda.
L'approccio di cui si parla cerca, in sostanza, l'efficacia del processo, la cui esistenza è motivata dalla sua capacità di offrire prodotti, servizi, metodologie o procedure in grado di contribuire alla piena soddisfazione del cliente.

Nella pratica, si tende a combinare i due approcci, nelle diverse fasi del progetto.

In sintesi, i due approcci si differenziano per:

Il punto di partenza

Nell'approccio per funzioni aziendali si considerano i confini delineati dalla struttura organizzativa mentre in quello per obiettivi di processo si considerano gli obiettivi di carattere strategico e i fabbisogni dei clienti .

L'oggetto di analisi

Alla stessa stregua, nell'approccio per funzioni aziendali vengono prese in considerazione le attività svolte dalla singola sotto-unità organizzativa: nell'altro, l'attenzione è posta sul processo interfunzionale predisposto per consentire il raggiungimento degli obiettivi d'impresa e sulla soddisfazione dei bisogni dei clienti.

La finalità perseguita

Che nell'approccio per funzioni aziendali è la verifica dell'efficienza, mentre in quello per obiettivi di processo è la ricerca dell'efficacia.

La "mappatura" porterà alla realizzazione di un "Dizionario delle attività" ove saranno identificate tre tipologie di processi:

a - Processi strategici: sono i processi in cui si intende superare la concorrenza e che forniscono le capacità dell'organizzazione richieste per il futuro

aa - Processi operativi: sono i processi che realizzano i prodotti/servizi della organizzazione

aaa - Processi di supporto: sono i processi che aggiungono efficienza ed efficacia ai processi operativi.

In un sistema ABM le due principali dimensioni di riferimento sono rappresentate dai processi di azienda e dalle attività che da essi scaturiscono. Esse rappresentano due chiavi di lettura di informazioni distinte ma interdipendenti.
La comprensione della struttura dei processi è legata alla comprensione delle caratteristiche dei prodotti e servizi, che ne costituiscono l'*output* finale.

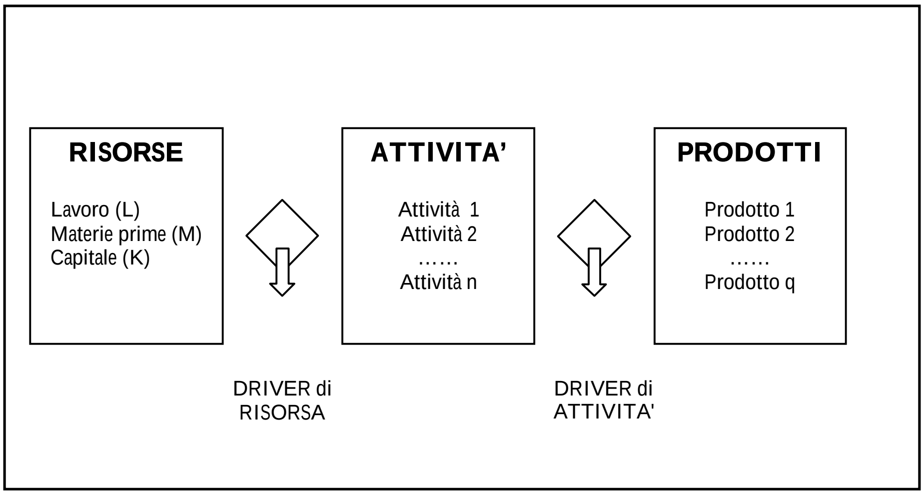
2.4 Lo schema base della metodologia ABM

La costruzione di un modello di gestione delle attività e dei processi aziendali ABM si basa sulla considerazione generale che sono le attività e non i prodotti a generare i costi. I prodotti, invece, consumano attività in modo differenziato. Non tutte le attività producono valore aggiunto.

Un'attività aggiunge valore se è:

- conforme alle richieste del cliente;
- non ridondante;
- non duplicata;
- non eliminabile attraverso un ridisegno dei processi,
- efficiente (la differenza tra il valore riconosciuto dal mercato e il costo dell'*output* ne consente il miglioramento continuo).

Figura 3: Lo schema base di una logica ABM



Lo schema in Figura 3 mostra come funzioni, in genere, un "impianto" ABM.

La comprensione dei rapporti causa/effetto tra attività e processi consente di isolare quelle leve (***driver***) agendo sulle quali è possibile influenzare le attività e il loro svolgimento (questi sono i *drivers* nell'approccio qui adottato), e di identificare quegli indicatori di *performance* la cui misura guida la direzione e l'intensità delle azioni a tutti i livelli.

Le attività consumano risorse secondo le logiche individuate dai cosiddetti "Driver delle Risorse". Le attività contribuiscono alla realizzazione dei *q* prodotti secondo le logiche individuate dai cosiddetti "Driver delle Attività".

2.5 Le attività di una logica ABM

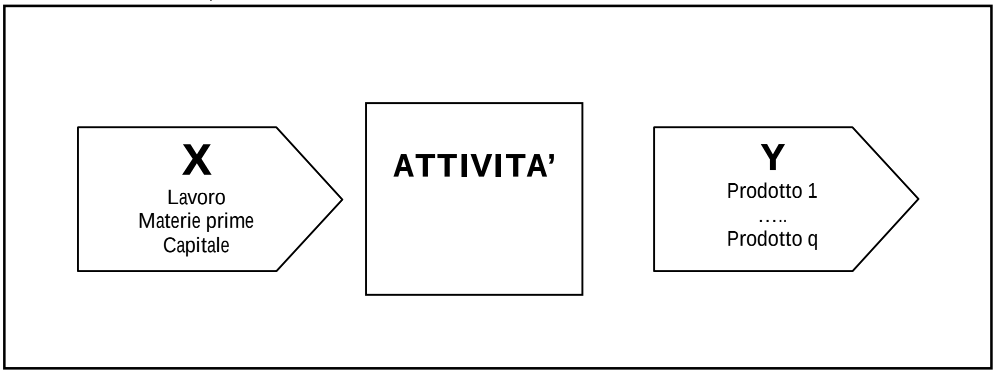
Le decisioni di intervento e gli obiettivi strategici di un'impresa passano attraverso le attività per la loro attuazione.

Calare le strategie sulle attività vuol dire passare dalle politiche di azienda alle azioni sui processi; ciò permette di fornire supporto alle decisioni e di evidenziare le opportunità di miglioramento.

Se, per esempio, si decide di aumentare il livello di servizio ai clienti da parte del *front-office* di una banca, sarà sempre possibile analizzare i processi e le attività per capire

quali siano quelle critiche per il raggiungimento dell'obiettivo e quindi quali *target* fissare per quelle attività e per chi le svolge, oppure come ridisegnare l'intero processo, eliminando o modificando più attività , nel caso in cui la prestazione richiesta sia al di fuori del processo esistente.
Ogni singola attività non rappresenta una semplice operazione elementare più o meno ripetitiva caratterizzata da un determinato meccanismo e da un *output* standardizzato, ma è, invece, un processo produttivo multi-*output* che trasforma *input* (*L, MP, K*) in *output* (Prodotto *1,…,q*) in modo diretto se si tratta di attività operative o in modo indiretto se si tratta di attività strategiche o di supporto.

Figura 4: Le attività come processi



L'approccio per attività è un approccio quantitativo in quanto ogni attività è contraddistinta da un *output* che deve poter essere misurato.

Le modalità di funzionamento delle n attività (Figura 3) possono essere "catturate" attraverso *n* relazioni ***Y = f(X)*** dove ***Y*** indica l'aggregato dei prodotti (*output*) ed ***X*** l'aggregato delle risorse consumate (*input* - fattori produttivi).
Per misurare la *performance* di un'attività *i* è necessario tenere sotto controllo l'indice di produttività:

$$IP_i = \frac{Y_i}{X_i} \quad [2.1]$$

esso aumenta se cresce *Y* o se diminuisce *X*.

Capitolo 3. La misura della performance e le frontiere di produzione

3.1 La misura della performance.

Per *performance* di un soggetto, sia esso economico oppure no, si intende, in senso generale, la sua continua azione volta al raggiungimento degli obiettivi da lui medesimo prefissati.
Le misure di *performance* indicano quale sia il grado di raggiungimento di tali obiettivi: in altri termini il rapporto tra la misura del risultato ottenuto e quella del risultato più elevato possibile.
Quando oggetto dell'analisi sono i processi produttivi attivati da un'impresa, l'obiettivo più importante ed immediato che ci si propone di raggiungere è costituito, per ogni processo, dalla massimizzazione dell'indice [2.1]: questo risultato può essere ottenuto aumentando la produzione (Y) mantenendo costanti le risorse adoperate (X), oppure minimizzando l'utilizzo delle risorse a parità di livello di prodotto ottenuto.
Queste considerazioni portano direttamente a definire la *performance* produttiva complessiva di un'azienda come l'insieme delle azioni volte a conseguire il maggior livello di efficienza tecnica o produttiva su tutti i processi attivati, ognuno di essi "monitorato" da relazioni di tipo [2.1].

Le **misure di *performance* produttiva** hanno quindi il compito di indicare:

- la capacità di una unità economica di trasformare gli input in output (**misure di produttività**)
- il grado di raggiungimento del potenziale massimo di produzione possibile (**misure di efficienza tecnica**).

Tra le definizioni più efficaci di **produttività** e di **efficienza** si può citare quella formulata da Nisticò-Prosperetti (1990); nella loro opinione, con produttività si deve considerare "*il rapporto tra i risultati dell'attività produttiva ed i mezzi impiegati per ottenerli*", cioè, tra gli *output* e gli *input* di un processo di produzione, intendendo, invece, con efficienza "*il grado di aderenza del processo di produzione osservato ad uno standard di ottimalità".*
Tali *standard* sono determinati dalla **funzione di produzione** (teorica) che sintetizza l'insieme di tutti i processi di produzione che l'impresa può attuare ed esprime la massima quantità di output che è possibile ottenere per ogni data combinazione di input; cioè, si considerano efficienti i processi produttivi che si collocano sulla frontiera dell'insieme delle possibilità di produzione.
Formalmente, se ipotizziamo, secondo quanto già espresso in Figura 3, che per ogni attività vi sia un insieme di coppie (*x*,*y*), chiamate "Piani di produzione", dove:

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ è il vettore delle quantità di *input*;

$\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ è il vettore delle quantità di *output*.

Tali "Piani" hanno la caratteristica di essere tecnicamente realizzabili dall'azienda:

$$Y = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) / \mathbf{x} \in R_+^I, \mathbf{y} \in R_+, (\mathbf{x},\mathbf{y})\, \grave{e}\ realizzabile\} \qquad [3.1]$$

L'utilità di questa definizione deriva dal fatto che si possono evidenziare due ulteriori concetti:

- **frontiera** dell'insieme
- **interno** dell'insieme

Ciò, per ogni attività, permette la distinzione fra i piani di produzione che appartengono alla frontiera, denominati efficienti e quelli che invece si trovano all'interno, detti inefficienti.
Naturalmente definendo l'efficienza in questo modo è possibile anche arrivare ad una sua misura in termini di distanza (per mezzo di un numero reale) tra il piano di produzione preso in considerazione e la frontiera dell'insieme stesso: di conseguenza, un piano efficiente ha una distanza pari a zero ed uno inefficiente ha una distanza strettamente positiva.
Se l'indice [2.1], quindi, oltre che rappresentare la base concettuale di riferimento, può essere ritenuto anche una misura di produttività dell'attività considerata, un possibile indicatore del **grado di efficienza tecnica** (**GET**) dell'attività stessa, può essere ricavato come rapporto tra l'output del processo di produzione osservato e quello che si sarebbe potuto ottenere impiegando le stesse quantità di fattori produttivi in modo efficiente (*standard*).

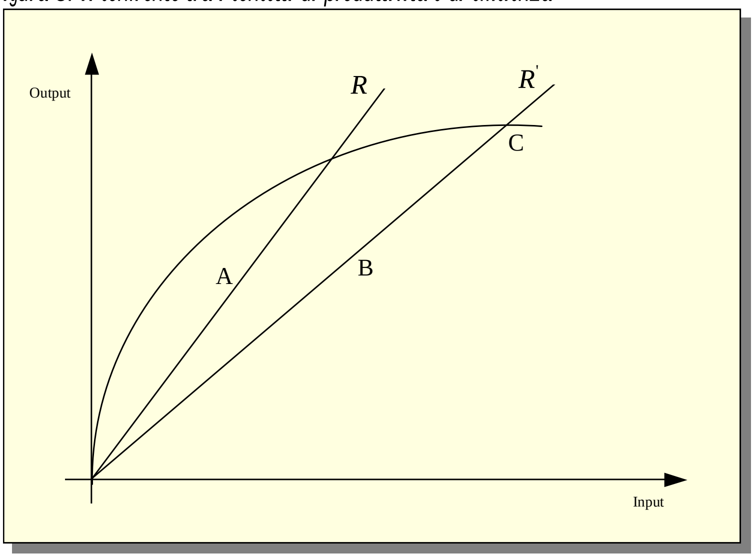
$$GET = \frac{Y_0}{Y} \qquad [3.2]$$

dove:

Y_0 è l'output osservato;
$Y=f(x)$ è l'output della funzione di produzione standard di efficienza.

Se raffiguriamo quanto stiamo dicendo su un grafico (Fig.5), i processi di produzione *B* e *C* possiedono lo stesso livello di produttività totale; giacciono infatti entrambi sulla stessa semiretta caratterizzata, in ogni punto, dallo stesso rapporto *output-input*. Tra le due unità di produzione solo *C* risulta però efficiente.

Figura 5: Il confronto tra i concetti di produttività e di efficienza



Consideriamo adesso i processi *A* e *C*. Il grafico mostra *A* maggiormente produttivo di *C*, collocandosi quest'ultimo sulla semiretta *OR'*, associata ad un livello output-input più basso. Nonostante ciò *C* risulta efficiente mentre *A* è inefficiente perché giace sotto la frontiera di produzione. In presenza di rendimenti costanti di scala la funzione di produzione è rappresentata da una semiretta; in questa circostanza i processi più produttivi sono anche i più efficienti e viceversa.
A questo punto, quindi, è ulteriormente confermata, la differenza tra i concetti di produttività ed efficienza.
Se si considera una situazione di lungo periodo o di un'impresa con rendimenti di scala costanti, la cui funzione di produzione è rappresentata da una retta, allora è chiaro che i concetti di produzione ed efficienza coincidono.
In un'ottica di breve periodo, invece, quando si confrontano più processi di produzione, un differenziale di produttività non comporta necessariamente un differenziale di efficienza e viceversa.
Ecco che si delinea il rapporto funzionale che lega il grado di efficienza di un'attività al suo livello di produttività: quest'ultimo indica quale rapporto vi sia tra i risultati dell'attività produttiva e i mezzi impiegati per ottenerli. Il risultato è una misura della capacità dell'organizzazione economica studiata di trasformare risorse in prodotti.
Quando si verifica un incremento di produttività, significa che è cresciuto il rapporto *output/input*, cioè che l'organizzazione economica è riuscita ad ottenere un maggiore prodotto con le stesse risorse e lo stesso *output* con minore utilizzo di fattori produttivi: in entrambi i casi questo si concretizza in una diminuzione relativa di costo per unità di prodotto che avrà ripercussioni benefiche sul suo prezzo di vendita.
E fino a che punto un'azienda può incrementare il rapporto *output/input*? Fino a che questa raggiunge lo *standard* ottimale del suo processo produttivo che, nella maggior parte dei casi, corrisponde alla situazione in cui si riesce ad ottenere il volume e il livello qualitativo massimi di prodotto con le risorse produttive disponibili. Ogni impresa, a fronte di un peculiare processo produttivo, ha un suo *standard* ottimale teorico ed il rapporto di quest'ultimo con il processo di produzione osservato è il suo grado di efficienza tecnica.
L'efficienza del processo produttivo può essere analizzata, nell'ambito della teoria microeconomica, attraverso l'impiego di modelli di ottimizzazione.
Dato un set di fattori produttivi ed i prezzi relativi, un'impresa è efficiente dal punto di vista tecnico e allocativo, se ottiene il massimo prodotto potenziale, impiegando gli input in un rapporto ottimale secondo le conoscenze tecnologiche, in modo da minimizzare i costi.
In generale, l'efficienza è misurabile, confrontando le *performance* reali dell'impresa con la migliore raggiungibile, espressa da una funzione che rappresenta, perciò, una frontiera.
Per definizione, una funzione di produzione esprime il livello massimo di output che può essere prodotto date le quantità di fattori produttivi. In modo analogo una funzione di costo individua il costo minimo che si deve sostenere per produrre un livello di output prestabilito, dati i prezzi degli input.
Infine una funzione di profitto specifica il massimo profitto che può essere ottenuto noti i prezzi dell'output e dei fattori produttivi.
E' evidente come il termine "frontiera" sia significativo per ognuna delle precedenti specificazioni, dal momento che le funzioni pongono un limite all'intervallo di variazione della variabile dipendente.

Note le risorse consumate e gli *output* prodotti dalle attività, la loro rappresentazione rispetto alla funzione di produzione ci consente di valutare i risultati dell'impresa: quanto più quelle sono posizionate sotto le frontiere di produzione, tanto maggiore è il livello di inefficienza che caratterizza le loro scelte di produzione.
Tornando alla [3.2], supponendo di osservare il comportamento di un'unità economica che impiega la quantità di *input* espressa dal vettore x^A, per produrre la quantità di *output* y^A, $y=f(x)$ rappresenta la frontiera, il piano di produzione del soggetto in questione sarà tecnicamente efficiente se, con la quantità di input, riesce ad ottenere il livello di output espresso dalla frontiera, e tecnicamente inefficiente se $y^A < f(x^A)$.
Una misura della efficienza tecnica del processo di produzione in esame è espresso dal rapporto:

$$0 \le y^A / f(x^A) \le 1 \quad [3.3]$$

L'efficienza tecnica è raggiunta quando l'output osservato è massimo in relazione ai fattori impiegati (*output efficiency*), o, viceversa, quando, dato il livello di produzione e della tecnologia, gli input sono impiegati nella minima quantità possibile (*input efficiency*).
Nella logica ABM diventa molto importante conoscere se per l'attività *i* :

- l'aggregato degli *output* è o meno endogeno. Se è esogeno, l'unica leva per aumentare IP è rappresentata dall'aggregato dei fattori produttivi;
- l'aggregato degli *output* è rappresentato dai prodotti finali. E' questo il caso che si presenta per la maggior parte delle attività operative.

Quando si tratta di attività di supporto, è necessario capire con attenzione se gli *output* siano comunque rappresentati da quantità misurabili e riconducibili ai prodotti finali (servizi, tipologie di clienti, canali distributivi, aree geografiche, etc.) o da "forniture qualitative" (attività di coordinamento, segretariali, etc.);

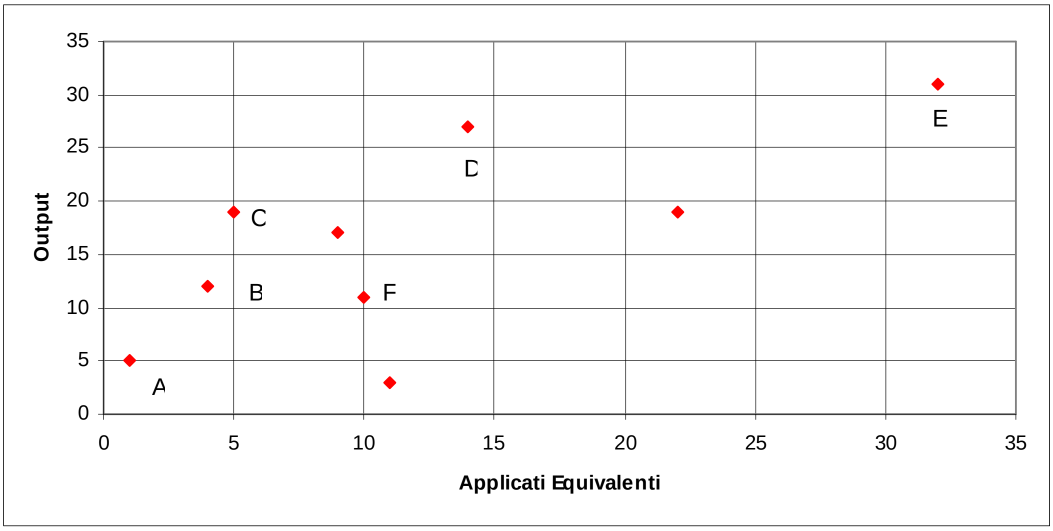
- è possibile creare dei legami funzionali-armonici con le altre attività svolte dalle diverse unità organizzative, per costruire il "sistema delle interdipendenze" (attività, *input*, *output*, fornitori, clienti, misure quantitative delle risorse impiegate) che dovrebbe permettere all'azienda di raggiungere determinati obiettivi strategici.

In realtà, la corretta identificazione dell'output prodotto da ciascuna attività rappresenta un passaggio fondamentale per poter giungere all'individuazione di una misura dell'output prodotto da ciascuna attività elementare lungo il processo che ci permetta di confrontare gli aggregati di attività differenti.
L'individuazione di tale misura è fondamentale poiché ci consente di organizzare la raccolta di informazioni relative ai volumi di output ottenuti in un determinato arco temporale di riferimento.
Tali informazioni consentono non solo di determinare quale volume di output è stato prodotto dall'attività *i* durante il periodo di tempo considerato, ma se esistono differenze nell'ambito dello stesso processo .

3.2 Le frontiere di produzione

In una nota rassegna, Forsund, Lovell e Schmidt[1] suggeriscono una classificazione dei metodi di stima delle funzioni frontiera di produzione, proponendo una prima generale suddivisione in funzioni parametriche e funzioni non parametriche. Nella prima classe, si identificano i modelli stocastici e deterministici, e questi ultimi a seconda della procedura di stima adottata, si suddividono in matematici e statistici.
Al di là delle terminologie adottate nelle classificazioni, il problema che i vari ricercatori che si sono occupati della questione si sono posti, è sempre stato lo stesso: come fare a trasformare in una misura reale il concetto teorico di funzione di produzione.
Rappresentando graficamente tale problematica, abbiamo riportato in un grafico a dispersione (vedi Figura 6) una serie di coppie di valori *x* ("Applicati equivalenti") ed *y* ("Output") che corrispondono ad una serie di processi produttivi (A, B,…,F) attivati da altrettante aziende.

Figura 6: Coppie di valori x ("Applicati equivalenti") ed y ("Output") che corrispondono ad una serie di processi produttivi (A, B,…,F) attivati da altrettante aziende.

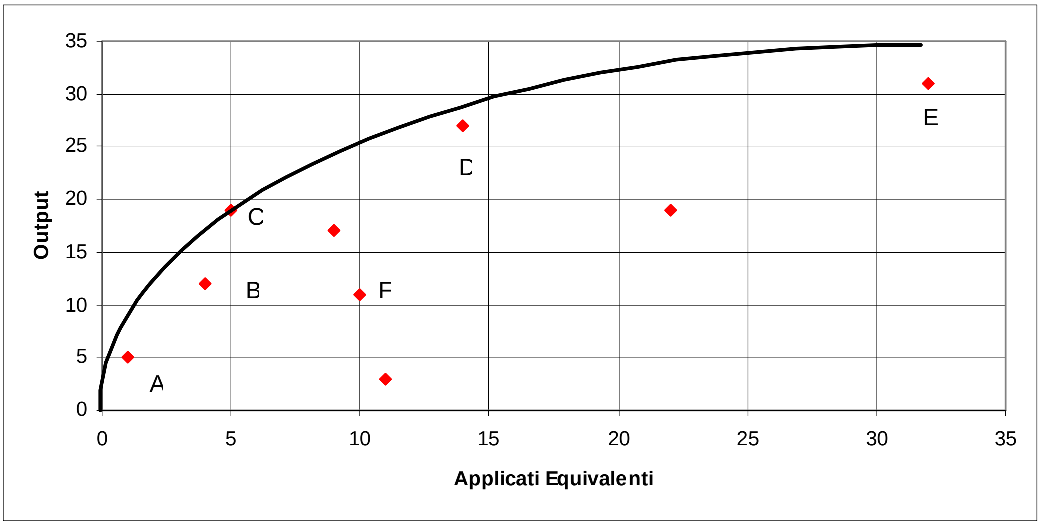


Dal momento che, in generale, l'efficienza è misurabile, confrontando le *performance* reali dell'azienda con la migliore raggiungibile, espressa da una funzione che rappresenta, perciò, una frontiera, come fare per definire una funzione di produzione che esprima il livello massimo di output che può essere prodotto date le quantità di fattori produttivi?
Abbiamo riportato una serie degli esempi più rappresentativi di risposte a questo quesito. Si tratta di una rassegna di quattro metodi che si differenziano molto sia per le caratteristiche tecniche degli strumenti matematico-statistici utilizzati, che per gli ambiti aziendali nei quali essi sono stati pensati ed applicati.
Senza aver la pretesa di voler esaurire qui la tematica, vogliamo comunque sottolineare come i modelli riportati negli esempi 1 e 2 si adattano bene alle imprese della grande produzione, mentre i modelli degli esempi 3 e 4 sono più adatti al mondo dei servizi, per esempio banche e pubblica amministrazione.

[1] F. R. Forsund, C. A. K. Lovell, P. Schmidt, *A survey of frontier production functions and their relationship to efficiency measurement*. Journal of Econometrics, 1980.

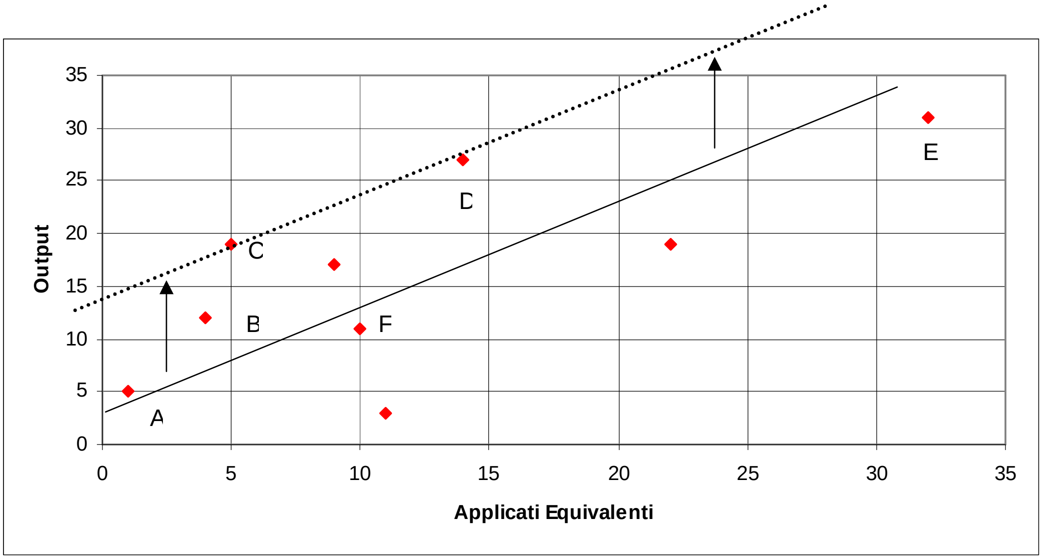
ESEMPIO 1: Funzione parametrica – Modello deterministico - matematico

Figura 7: AIGNER D.J., CHU S.F. (1968), "On Estimating the Industry Production Function", The american Economic Review, n°4, pp.826-835



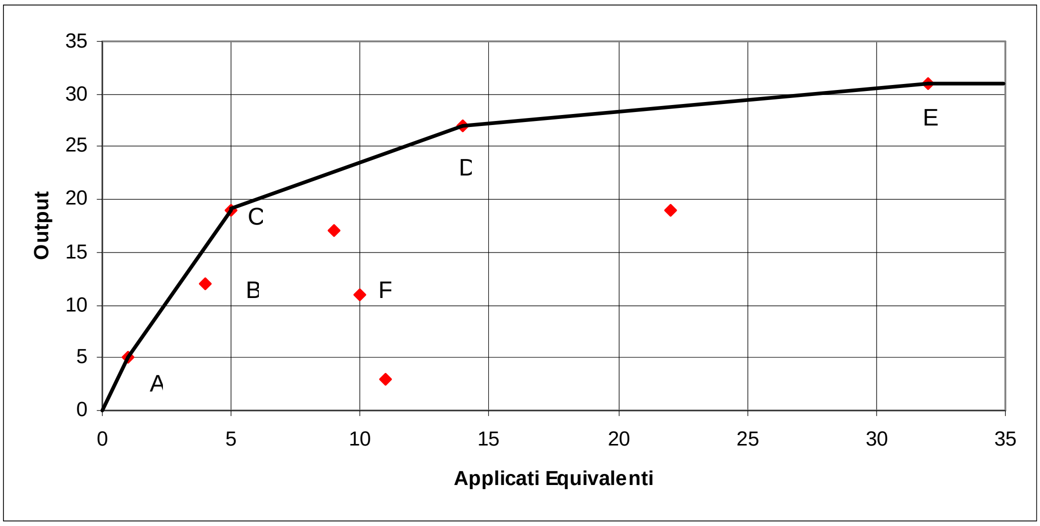
ESEMPIO 2: Funzione parametrica – Modello deterministico - statistico

Figura 8: Modified Ordinary Least Squares (MOLS) - Greene W.H. ed altri



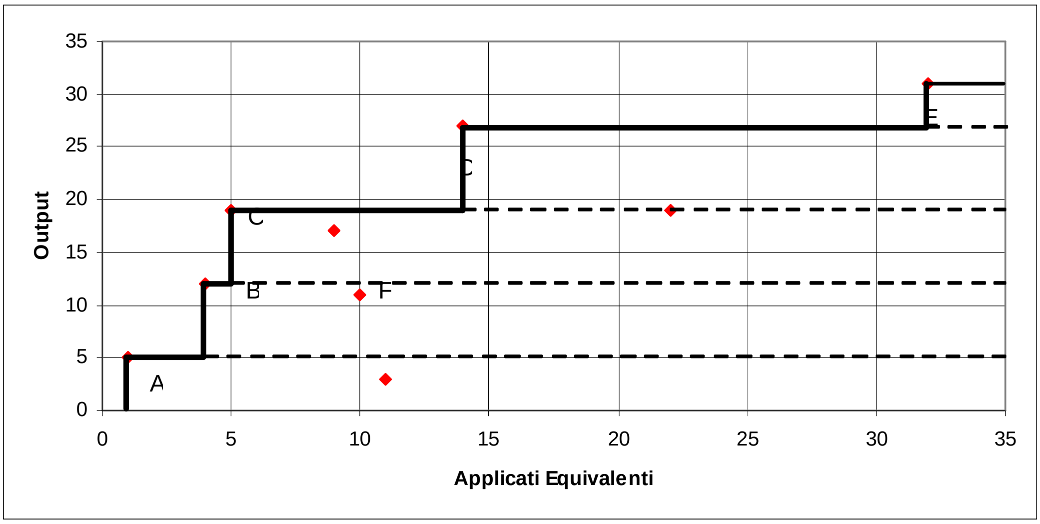
ESEMPIO 3: Funzione non parametrica – Modello Data Envelopment Analysis (DEA)

Figura 9: CHARNES A., COOPER W.W., RHODES E. (1978), "Measuring the efficiency of decision making units", European Journal Of Operational Research, 2 (6), 429-444



ESEMPIO 4: Funzione non parametrica – Modello Free Disposal Hull (FDH)

Figura 10: DEPRINS D., SIMAR L., TULKENS H. (1984), "Measuring Labor-Efficiency in Post Offices", The Performance of Public Enterprises: Concepts and Measurement, Amsterdam, North-Holland, pp.243-267



Capitolo 4. Il modello di Regressione Lineare Semplice

La relazione matematica più semplice tra due variabili è la regressione lineare semplice, rappresentata dalla retta

$$\hat{Y}_i = a + bX_i \qquad [4.1]$$

dove

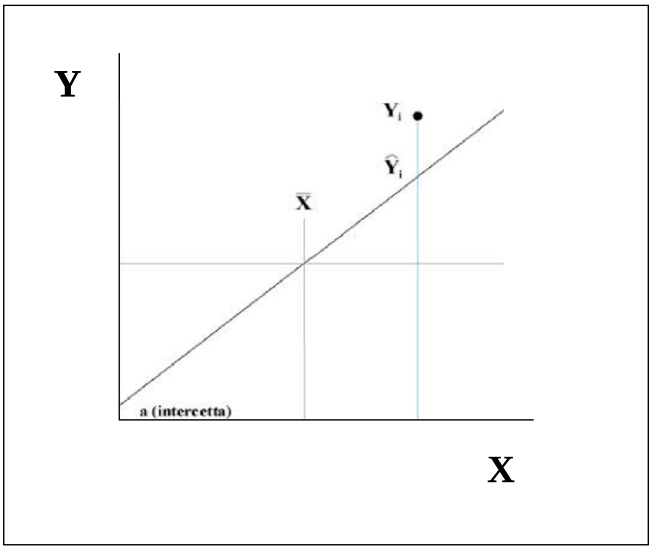
- $\hat{Y}_i$ è il valore stimato per il valore X dell'osservazione i;
- X_i è il valore empirico di X per l'osservazione i;
- *a* è l'intercetta della retta di regressione;
- *b* è il coefficiente angolare ed indica la quantità di cui varia Y al variare di una unità di X.

La rappresentazione grafica evidenzia che il termine costante *a*, chiamato **intercetta,** fissa la posizione della retta rispetto all'asse delle ordinate:

- *a* è il valore di *Y*, quando *X* è uguale a 0.

Due rette che differiscano solo per il valore di *a*, quindi con *b* uguale, sono tra loro parallele.

Figura 11: Funzione scarto verticale del valore osservato dalla retta



Come evidenzia il diagramma cartesiano precedente, ogni punto sperimentale ha una componente di errore ***e**$_i$*, che rappresenta lo scarto verticale del valore osservato dalla retta (quindi tra la *Y* osservata e quella proiettata perpendicolarmente sulla retta). Utilizzare un qualsiasi punto sperimentale per stimare *a* porterebbe ad avere tante stime diverse quanti sono i punti sperimentali, tutti affetti appunto da un errore diverso. Di conseguenza, come punto di riferimento per stimare *a* e costruire la retta, viene utilizzato il punto identificato dai valori medi di *Y* e di *X* ($\bar{X}$ e $\bar{Y}$), che rappresenta il baricentro della distribuzione (dal quale essa passerà sempre).

Nel calcolo della retta di regressione, l'intercetta *a* è stimata a partire da ***b*** e dalle medie delle variabili *X* e *Y* sulla base della relazione

$$a = \overline{Y} - b\overline{X} \qquad [4.2]$$

Di conseguenza, l'unica reale incognita è il valore del coefficiente angolare ***b*.**
Per calcolare la retta che meglio approssima la distribuzione dei punti, è utile partire dall'osservazione che ogni punto Y_i si discosta dalla retta di una certa quantità $\boldsymbol{e_i}$ detta errore o **residuo**

$$Y_i = a + bX_i + e_i \qquad [4.3]$$

Ognuno di questi valori e_i può essere positivo oppure negativo:

- è positivo quando il punto Y_i sperimentale, è sopra la retta (come nella figura precedente);
- è negativo quando il punto Y_i sperimentale, è sotto la retta.

Per costruire la retta che descrive la distribuzione dei punti, i principi ai quali riferirsi possono essere differenti e da essi derivano metodi diversi.
Gli statistici hanno scelto il metodo dei minimi quadrati. La retta scelta è quella che riduce al minimo la somma dei quadrati degli scarti di ogni punto dalla sua proiezione verticale (parallelo all'asse delle *Y*). E' un valore del tutto identico alla devianza e permette analisi simili a quelle dell'ANOVA.
In modo più formale, indicando con
- Y_i il valore osservato od empirico e con
- $\hat{Y}_i$ il corrispondente valore sulla retta,
si stima come <u>migliore interpolante,</u> quella che minimizza la sommatoria del quadrato degli scarti dei valori osservati (Y_i) rispetto a quelli stimati sulla retta ($\hat{Y}_i$):

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = min \qquad [4.4]$$

Poiché

$$e_i = Y_i - (a + bX_i) \qquad [4.5]$$

è possibile scrivere

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - (a + bX_i))^2 = min \qquad [4.6]$$

e da essa

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \overline{Y} - b(X_i - \overline{X}_i))^2 = min \qquad [4.7]$$

Eguagliando a zero le derivate parziali, si trova il valore di ***b*** che minimizza tale sommatoria

$$\sum (X_i - \overline{X}_i))^2 \left[b - \frac{\sum (X - \overline{X})(Y - \overline{Y})}{\sum (X - \overline{X})^2} \right]^2 + \sum (Y - \overline{Y})^2 - \frac{\left[\sum (X - \overline{X})(Y - \overline{Y})\right]^2}{\sum (X - \overline{X})^2}$$

Dopo semplificazione, il valore di *b* risulta uguale al rapporto della **codevianza** di *X* e *Y* con la devianza di *X*, che è più facile ricordare come

$$b = \frac{Cod_{xy}}{Dev_x} \qquad [4.8]$$

La **codevianza** è un concetto non ancora incontrato nel corso di statistica, poiché serve nello studio di due variabili: stima come X e Y variano congiuntamente, rispetto al loro valore medio. E' definita come la **sommatoria dei prodotti degli scarti di X rispetto alla sua media e di Y rispetto alla sua media:**

$$Cod_{xy} = \sum (X - \overline{X})(Y - \overline{Y}) \qquad [4.9]$$

Come per la devianza, anche la codevianza ha una formula empirica od abbreviata che permette un calcolo più rapido

$$Cod_{xy} = \sum (xy) - \frac{\sum x \sum y}{n} \qquad [4.10]$$

e preciso a partire dai dati campionari.
Infatti evita l'uso delle medie, che sono quasi sempre valori approssimati e impongono di trascinare nei vari calcoli alcuni decimali.

In conclusione, il coefficiente angolare b è calcolato dalle coppie dei dati sperimentali *X* e *Y* come

$$b = \frac{\sum (X - \overline{X})(Y - \overline{Y})}{\sum (X - \overline{X})^2} \qquad [4.11]$$

che ne definisce il significato, oppure dalla equivalente formula rapida od empirica

$$b = \frac{\sum (xy) - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} \qquad [4.12]$$

Dopo aver calcolato ***b***, si stima *a* :

$$a = \overline{Y} - b\overline{X} \qquad [4.13]$$

Noti i valori dell'**intercetta a** e del coefficiente **angolare *b*,** è possibile procedere alla **<u>rappresentazione grafica della retta.</u>**
Anche a questo scopo, è importante ricordare che la retta passa sempre dal baricentro del diagramma di dispersione, individuato dal punto d'incontro delle due medie campionarie $\overline{X}$ e $\overline{Y}$.

Di conseguenza, è sufficiente calcolare il valore di $\hat{Y}_i$ corrispondente ad uno solo e qualsiasi valore di X_i (ovviamente diverso dalla media), per tracciare la retta che passa per questo punto calcolato e per il punto d'incontro tra le due medie.

Se non sono stati commessi errori di calcolo, qualsiasi altro punto $\hat{Y}_i$ stimato nella rappresentazione grafica deve risultare collocato esattamente sulla retta tracciata. E' un procedimento semplice, che può essere utilizzato per verificare la correttezza di tutti i calcoli effettuati.

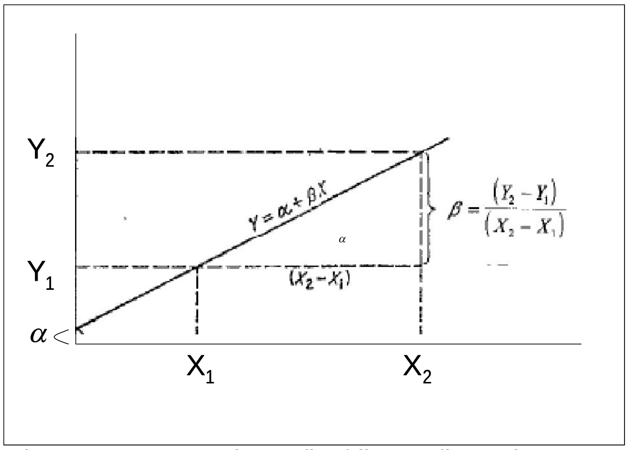


Figura 12: Rappresentazione grafica della retta di regressione

Un esempio

Per sette giovani donne, indicate con un numero progressivo, è stato misurato il peso in Kg e l'altezza in cm.

Tab. 41 - Misure di peso ed altezza rilevate su un campione di giovani donne

Individui	1	2	3	4	5	6	7
Peso (Y) in Kg.	52	68	75	71	63	59	57
Altezza (X) in cm.	160	178	183	180	166	175	162

Vogliamo calcolare la retta di regressione che evidenzi la relazione tra peso ed altezza.

Occorre individuare quale sia la variabile indipendente, che deve essere indicata con X, e quale la variabile dipendente, indicata con Y. Tra queste due serie di misure, la variabile indipendente è l'altezza e la variabile dipendente è il peso. Infatti ha significato stimare quanto dovrebbe pesare un individuo in rapporto alla sua altezza, ma non viceversa.

Successivamente, dalle 7 coppie di dati si devono calcolare le quantità

$$\sum(XY) = 76945; \quad \sum X = 1204; \quad \sum Y = 445; \quad \sum X^2 = 207598; \quad n = 7$$

che sono necessari per

<u>la stima del coefficiente angolare b</u>

$$b = \frac{\sum(xy) - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} = \frac{76945 - \frac{1204 * 445}{7}}{207598 - \frac{1204^2}{7}} = 0{,}796$$

che risulta uguale a 0,796

<u>la stima dell'intercetta a</u>

$$a = \overline{Y} - b\overline{X} = 63{,}571 - 0{,}796 * 172 = -73{,}354$$

che risulta uguale a -73,354.

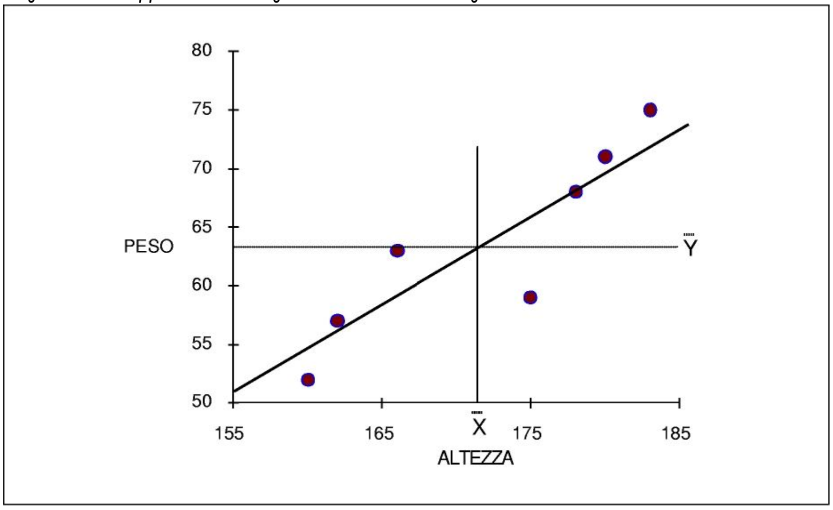
Si è ottenuta la retta di regressione

$$\hat{Y}_i = -73{,}354 + 0{,}796\ X_i$$

con la quale è possibile stimare i punti sulla retta, corrispondenti a quelli sperimentalmente rilevati.

<u>**Per tracciare la retta è sufficiente calcolare un solo altro punto,**</u> oltre quello noto individuato dall'incrocio delle due medie, che identifica il baricentro della distribuzione. Di norma, ma non necessariamente, è scelto entro il campo di variazione delle X_i empiriche; successivamente, si deve prolungare il segmento che per estremi ha il punto stimato ed il baricentro della distribuzione, come nella figura di seguito riportata.

Figura 13: Rappresentazione grafica della retta di regressione



Qualsiasi altro valore di $\hat{Y}_i$, stimato a partire da un generico X_i , sarà collocato su questa retta, se non sono stati commessi errori di calcolo in una fase qualsiasi del procedimento. Nel sua interpretazione biologica, il valore calcolato di **b indica che in media gli individui che formano il campione aumentano di 0,796 Kg. al crescere di 1 cm. in altezza.**

E' quindi ovvio che, se l'altezza delle 7 giovani fosse stata misurata in metri (1,60; 1,78; ...), il coefficiente angolare b sarebbe risultato uguale a 79,6 (cento volte il valore precedentemente stimato), indicando l'incremento di 79,6 kg. per l'aumento di 1 metro in altezza. Nello stesso modo e simmetricamente, se il peso fosse stato stimato in ettogrammi (520, 680, ...) e l'altezza sempre in centimetri, il coefficiente angolare b sarebbe risultato uguale a 7,96 indicando un aumento medio del peso di hg. 7,96 per un aumento di 1 cm in altezza. Sono concetti utili, quando si devono confrontare due o più coefficienti angolari di rette di regressione e fornire interpretazioni di tipo ecologico od ambientale.

Il valore predittivo della regressione

La retta di regressione è sovente usata a scopi predittivi, per stimare una variabile conoscendo il valore dell'altra. Ma è necessario procedere con cautela: in questa operazione spesso viene dimenticato che, sotto l'aspetto statistico, qualsiasi previsione o stima di *Y* è valida solamente entro il campo di variazione sperimentale della variabile indipendente *X*.

Questo campo di variazione comprende solo i valori osservati della *X*, usati per la stima della regressione. Per valori minori o maggiori, non è assolutamente dimostrato che la relazione trovata tra le due variabili persista e sia dello stesso tipo.

L'ipotesi che la relazione stimata si mantenga costante anche per valori esterni al campo d'osservazione è totalmente arbitraria; estrapolare i dati all'esterno del reale campo d'osservazione è un errore di tecnica statistica, accettabile solamente nel contesto specifico della disciplina studiata, a condizione che sia motivato da una maggiore conoscenza del fenomeno. In alcuni casi, questo metodo è utilizzato appunto per dimostrare come la legge lineare trovata non possa essere valida per valori inferiori o superiori, stante l'assurdità della risposta.

Nell'esempio del paragrafo precedente, la relazione trovata tra Y e X con la retta di regressione è valida solamente entro un'altezza compresa tra 160 e 183 centimetri. E' da ritenere statisticamente errato usare la retta stimata per predire valori di Y in funzione di valori di X che siano minori di 160 o maggiori di 183 centimetri.
Come dimostrazione semplice di tale principio, nei vari testi di statistica sono riportati esempi anche divertenti, ma è possibile usare la retta calcolata.
Una bambina alla nascita di norma ha un'altezza (lunghezza) di circa 50 centimetri.
Che peso dovrebbe avere, se la relazione precedente fosse applicabile anche al suo caso?

La **prosecuzione della retta stimata**

$$\hat{Y}_i = -73{,}354 + 0{,}796\ X_i$$

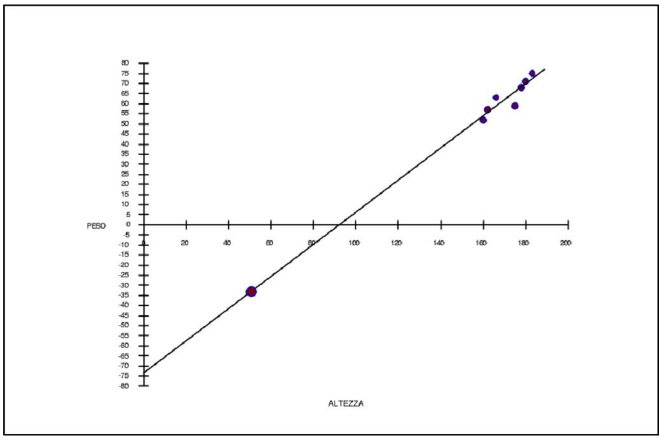
per una **lunghezza (X_i) uguale a 50 cm.**

-73,354 + 0,796.50 = -33,554

fornisce un **peso medio (Y_i) uguale a Kg. -33,554.**

E' una risposta chiaramente assurda, evidenziata nella figura, poiché la **relazione lineare calcolata per giovani da 160 a 183 cm. non può essere estesa a dimensioni diverse.** E' intuitivo che gli effetti saranno tanto più distorti, quanto maggiore è la distanza dai limiti sperimentali utilizzati per il calcolo della regressione.

Figura 14: Rappresentazione grafica della retta di regressione



Anche nella ricerca ambientale, **l'evoluzione temporale** e la **diffusione spaziale** di un fenomeno sono casi ricorrenti di uso della regressione lineare a fini predittivi. I dati, se ordinati secondo il periodo, sono chiamati **serie temporali o storiche,** mentre sono chiamate **serie territoriali,** quando ordinate sulla base della distanze dal luogo di rilevazione. Sono particolarmente importanti per lo studio dell'aumento (o della diminuzione) dei tassi di inquinamento ad iniziare da un certo momento oppure per analizzare la diffusione geografica di un inquinante a partire da una fonte. Una serie temporale può essere scomposta in 4 componenti:

- la **componente di fondo,** detta **trend,** che ne rappresenta l'evoluzione più importante, a lungo termine;

- le **oscillazioni periodiche, stagionali, o cicliche** che si ripetono con regolarità ad intervalli costanti; - le **variazioni casuali,** non riconducibili a nessuna causa costante;

- gli **eventi eccezionali,** che sono in grado di modificare le tendenze di medio o di lungo periodo.

Per esse e per le serie territoriali, tra i metodi specifici è utilizzata la regressione, in particolare per predire la tendenza di fondo.
Per approfondimenti sull'argomento delle serie storiche o territoriali, si rinvia a trattazioni specifiche.

APPENDICE 1. Misure di performance per la pubblica amministrazione

A.1.1 Introduzione

L'esercitazione, tutta sviluppata in ambiente Excel, si pone l'obiettivo di stimare un modello di analisi della performance dell'efficienza negli uffici di stato civile. In particolare, si prendono, come caso di studio, dati relativi ad undici uffici di stato civile in Belgio (Fiandre).
Lo scopo è quello di determinare , per ogni singolo ufficio, il numero efficiente di applicati equivalenti[2] (*input*) sulla base di grandezze in qualche modo legate alla produzione degli stessi (*output*)

A.1.2 La misurazione dell'efficienza sulla base del numero degli abitanti del comune

Come primo approccio di studio fu proposto di misurare la performance degli applicati equivalenti (*input*), sulla base del numero degli abitanti del comune (*output*)[3].

Tab.A.1.1 –Dati sugli 11 uffici di stato civile in Belgio (Fiandre)

CITTA	INPUT	ABITANTI
A	15,9	37.588
B	18,7	52.310
C	25,1	67.923
D	27,2	68.366
E	29	76.273
F	34,8	61.499
G	38,5	65.798
H	43,1	75.515
I	45	76.384
J	55,2	85.015
K	64,3	115.982

Le variabili rappresentano

CITTA: Il codice che identifica le città
INPUT: Addetti-equivalenti
ABITANTI: Prima variabile di Output: rappresenta il n° di abitanti del Comune

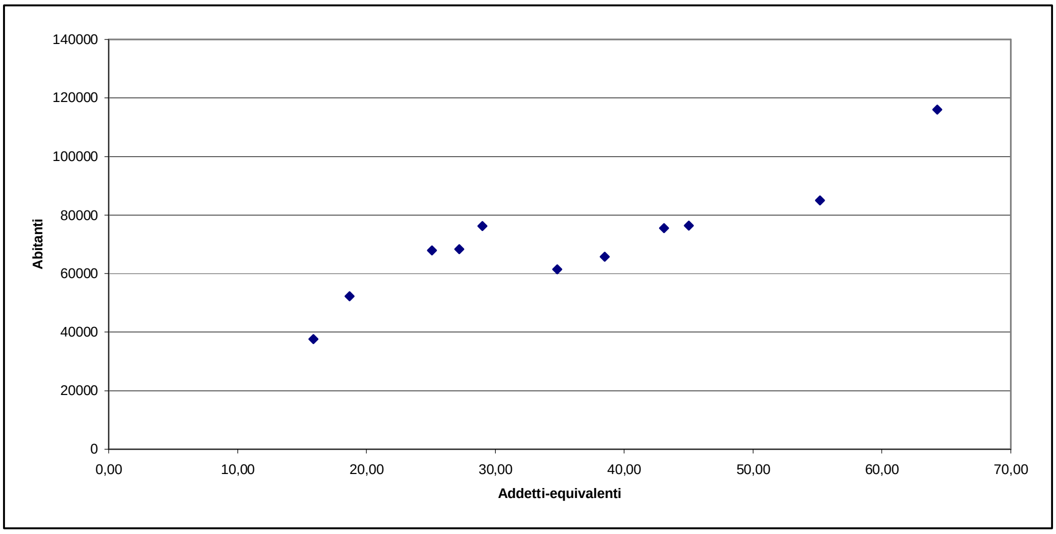
2 Il numero di applicati equivalenti sono calcolati rapportando il numero delle ore effettivamente lavorate al numero delle ore lavorabili da n°1 dipendente nel periodo di studio.

3 Con il termine "*output*" si intende la produzione degli uffici. In questa particolare accezione si desume che essa sia comunque collegata al numero degli abitanti del comune e quindi viene scelta tale grandezza come "*proxy*" della produzione, cioè dell'*output*

A.1.3 L' analisi preliminare

Prima di procedere ad un'analisi particolareggiata della performance, fondamentale quando si vogliano analizzare standard di produttività, si ritiene sempre utile effettuare un'indagine preliminare, a scopi conoscitivi ed esplorativi, finalizzata ad eliminare possibili cause di distorsione dei risultati, ma anche, più in generale, ad approfondire la conoscenza "tecnica" della realtà produttiva. A tal fine, l'indagine grafica è da considerarsi come una tra le metodologie più utili per comprendere la natura della relazione che, eventualmente, intercorre tra due variabili.
Nel caso in esame, si riporta il grafico costruito mettendo in relazione le due variabili oggetto di studio: l'*output* (n° di abitanti del comune) nell'asse delle ordinate e l'*input* (il numero degli applicati equivalenti) nelle ascisse.

Figura A.1.1: Relazione esistente tra le variabili di input con quelle di output

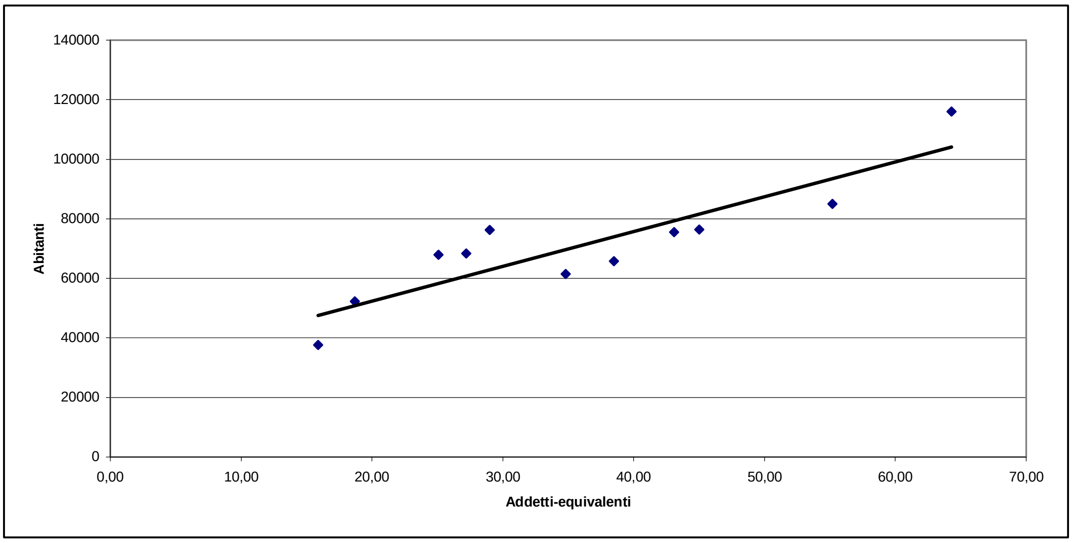


Analizzando il grafico risulta evidente l'esistenza di una relazione lineare crescente tra le due grandezze: infatti al crescere del numero dei minuti lavorati aumenta l'*output*.

A.1.4 La determinazione dello standard produttivo: l'approccio parametrico con i minimi quadrati

Una volta determinato che esiste relazione funzionale, nasce il problema di *stimarla*, cioè di formulare un'equazione matematica che indichi quale debba essere l'*output* al variare dell'*input*.
In questa accezione, in particolare, si vuole stimare un modello che dia un'indicazione media dell'*output*: ovvero, siamo interessati a stimare una funzione che sia indicatrice di quale debba essere l'*output* **medio atteso** al variare dell' *input*. Da un punto di vista grafico si pone il problema, quindi, di dare un'interpretazione matematica alla seguente linea di tendenza:

Figura A.1.2: Linea di tendenza esistente tra la relazione delle variabili di input con quelle di output



La linea di tendenza riportata è una retta di equazione

$$y = \alpha + \beta * x \tag{A.1.1}$$

dove:

y = *output*
x = *input*
α = *intercetta* della funzione
β = *coefficiente angolare* della funzione

I coefficienti ignoti costanti, α e β, esprimono proprio gli standard produttivi medi attesi. In particolare:

- β esprime lo standard produttivo medio atteso al variare dell' *input*, infatti interviene nella [A.1.1] moltiplicando il fattore *x*. Essendo sia α che β due costanti, quando si incrementa di un valore unitario la variabile *x,* si ha una variazione della stima di *y* proporzionale al coefficiente β. Nel caso di studio ad esempio, β è la misura di quanto aumenta il numero dell'*output* all'aumentare di un singolo applicato equivalente;
- α, anch'esso costante, è la misura dello standard medio produttivo al netto della variabile *x.* Infatti se poniamo *x=0* otteniamo dalla [A.1.1] $y = \alpha$. Tale coefficiente è esprimibile come la misura della produttività quando non c'è lavoro, quindi quando non c'è produzione. E' quindi espressione della produttività minima media attesa per ogni ufficio.

Le stime dei parametri α e β si ottengono tramite il metodo dei minimi quadrati. Esso consiste, sostanzialmente, nel determinare i valori dei parametri che rendono minima la somma dei quadrati delle differenze (residui) tra i valori osservati e stimati di *y*. Sostanzialmente, si tratta di minimizzare, nel caso di un unico input che produce un solo *output* (come nell' esempio), la funzione ausiliaria[4]:

$$\sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum (y_i - \alpha - \beta * x_i)^2 \qquad [A.1.2]$$

dove,

y_i sono i valori dell' *output* (nell'esempio, il n° di abitanti) osservati

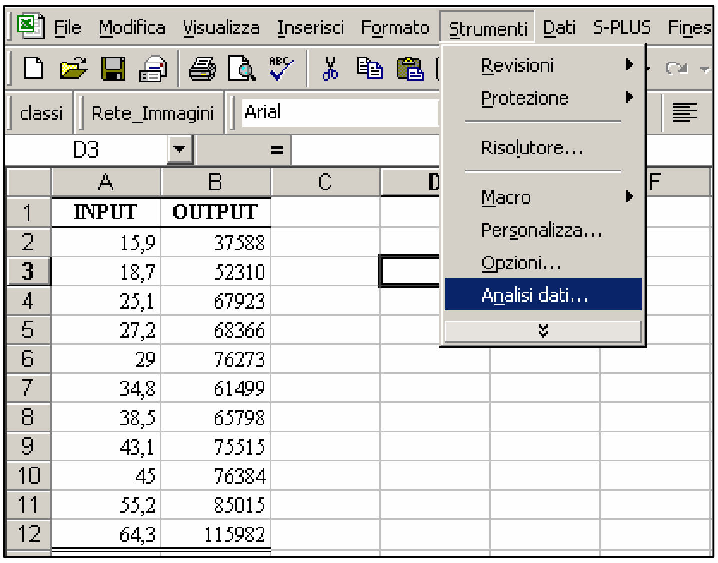
$\hat{y}_i$ sono i valori dell' *output* (nel caso in esame, il il n° di abitanti) stimati

Sotto determinate ipotesi è possibile dimostrare che gli stimatori così ottenuti sono *BLUE* (*Best Linear Unbiased Estimator*)[5] ossia i migliori stimatori lineari corretti.

La capacità di un modello teorico di interpretare la realtà può essere valutata con un indice costruito rapportando la *varianza spiegata* dalla funzione di regressione alla *varianza totale di Y (coefficiente di determinazione)* che, variando in un intervallo compreso tra zero ed uno, esprime la dipendenza della variabile *Y* dalle variabili indipendenti[6].

Di seguito si riporta l'*output* della procedura "regressione" del programma Excel,

- Il programma Excel ha, all'interno delle sue funzioni, dei sotto programmi per alcune elaborazioni statistiche, tra le quali la regressione lineare. Per attivarle, basta cliccare prima sul menù "strumenti" poi sul comando "analisi dati" e quindi sulla procedura regressione.



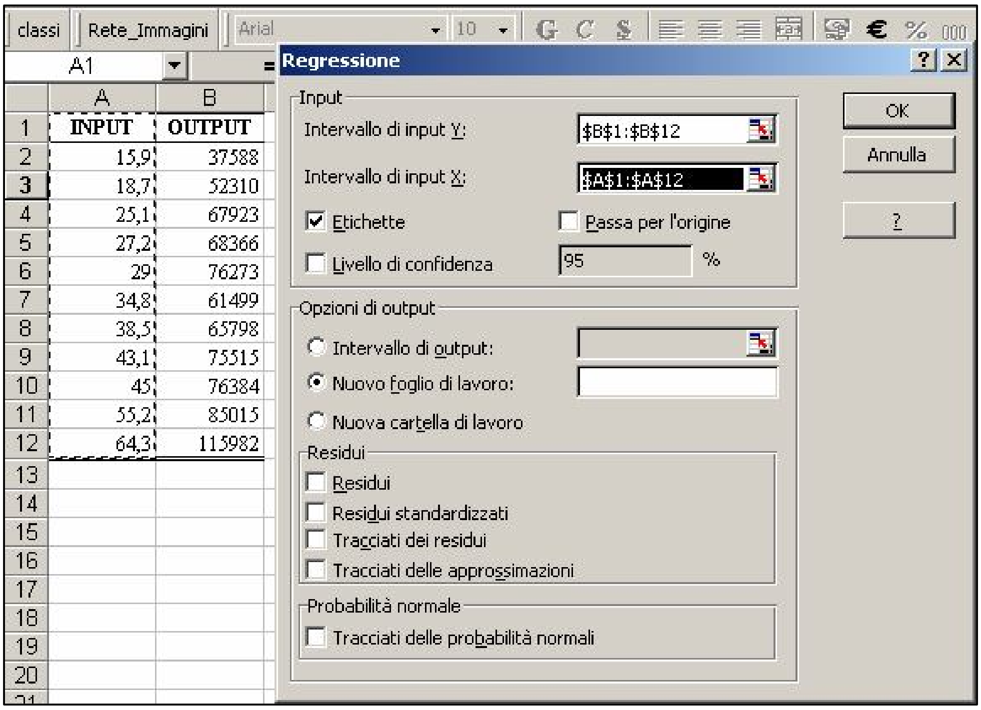
---

[4] crf appendice metodologica

[5] Uno stimatore è lineare quando risulta da una combinazione lineare dei valori campionari, è corretto se la sua media è pari al parametro da stimare ed è il migliore quando ha varianza minima.

[6] Un valore di tale coefficiente pari ad uno indicherà l'esistenza di una correlazione perfetta nel campione, ossia la precisa corrispondenza tra il valore previsto (stimato) e quello effettivo di Y; un valore pari a zero indica invece la totale assenza di legame lineare tra le variabili e quindi l'equazione di regressione non fornisce alcun aiuto nella stima di Y.

- Apparirà la maschera di inserimento dati nello spazio relativo all'intervallo di input y, il programma prevede che si inserisca la colonna della variabile dipendente, mentre nello spazio relativo all'intervallo di input x il programma prevede che si inseriscano una o più colonne delle variabili indipendenti.



- Il programma restituisce l'*output* seguente[7]:

[7] Breve cenno sulla formattazione della tabella e breve cenno sulle statiche di maggiore interesse (cfr. appendice per maggiori dettagli)

- ✓ STATISTICA DELLA REGRESSIONE: in questa tabella sono riportati tutti i più comuni indici costruiti sulla base delle varianze di cui un breve cenno è riportato nella nota a piè di pagina n°5
- ✓ ANALISI DELLA VARIANZA (parte superiore): in questa tabella sono riportate tutte le statistiche relative alle misure delle varianze del modello che sono alla base della costruzione degli indici di determinazione. La statistica *Significatività F* (in alto a destra) riporta la probabilità che tutti i parametri stimati siano uguali a zero e quindi che non esista legame lineare. Nell'esempio si ha una probabilità pari a zero che sia α che β siano uguali a zero.
- ✓ ANALISI DELLA VARIANZA (parte inferiore): in questa tabella sono riportati come prime statistiche (prima colonna a sinistra) i risultati delle stime sia dell'intercetta che degli altri coefficienti. Nella seconda colonna sono riportati gli errori standard delle stime, che ci esprimono l'ordine di grandezza dell'errore medio standard commesso nello stimare i coefficienti. Nella terza colonna è riportato il valore della statistica t utile per il calcolo delle probabilità riportate nella colonna 4, che esprimono la probabilità che ogni singolo coefficiente sia pari a zero. Nell'esempio si risulta probabilità pari a zero che l'intercetta sia uguale a zero e probabilità pari a zero che il coefficiente beta sia uguale a zero.

Tabella A.1.2: Output della procedura regressione

OUTPUT RIEPILOGO					
Statistica della regressione					
R multiplo	0,89				
R al quadrato	0,79				
R al quadrato corretto	0,77				
Errore standard	9.537,17				
Osservazioni	11,00				
ANALISI VARIANZA					
	gdl	*SQ*	*MQ*	*F*	*Significatività F*
Regressione	1	3.077.525.216,24	3.077.525.216,24	33,83	0,00
Residuo	9	818.617.675,95	90.957.519,55		
Totale	10	3.896.142.892,18			
	Coefficienti	*Errore standard*	*Stat t*	*Valore di significatività*	
Intercetta	29.028,92	7.791,43	3,73	0,00	
INPUT	1.167,68	200,74	5,82	0,00	

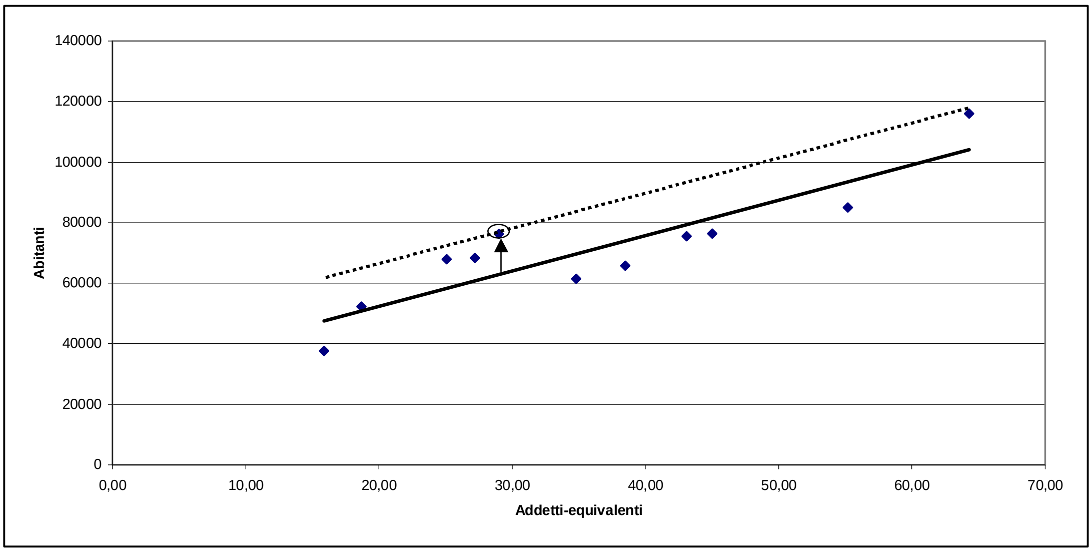
Il coefficiente "R al quadrato" *(coefficiente di determinazione)* è pari a 0,79 il che significa che il modello ha una ottima capacità di interpretare la realtà.
L'Intercetta è pari a 29.028,92, a cui corrisponde il numero di abitanti minimo a cui ogni ufficio si deve riferire
Il coefficiente β *(INPUT)* è pari a 1.167,68 che significa che ad ogni applicato equivalente mediamente corrispondono 1.168 circa abitanti.
Alla luce dei risultati ottenuti la [A.1.1] è riscrivibile nel seguente modo:

$$y = 29.028,92 + 1.167,68 \ * x \qquad [A.1.3]$$

A.1.5 La funzione di frontiera

Sulla base dei risultati della funzione di regressione, si è ottenuto il coefficiente β che esprime il rapporto intercorrente tra ogni applicato equivalente ed il numero degli abitanti del comune. Osservando il grafico, tuttavia, risulta evidente che non tutti gli uffici analizzati si trovano posizionati lungo la retta di regressione. Infatti, alcuni di essi sono collocati al di sopra di essa. In termini produttivi, questo significa che, se si ipotizza che lo lo "*standard produttivo medio*" (il coefficiente β) sia costante, gli applicati hanno servito più abitanti rispetto alla media, cioè hanno la capacità di aumentare il numero minimo di abitanti da servire per ogni ufficio.
Si può, quindi, ricavare una funzione di frontiera spostando la funzione media ottenuta dalla regressione per farla passare sulla città che si trova ad essere più elevata (E)

Figura A.1.3: Funzione di frontiera data la relazione delle variabili di input con quelle di output



Sulla base della frontiera è possibile ottenere i Gradi di Efficienza delle varie città (vedi tabella A.1.3):

$$Grado\ di\ Efficienza\,(GET) = \frac{Y\ reale}{Y\ \ frontiera} \qquad [A.1.4]$$

Tab.A.1.3 – GET degli 11 Uffici di stato civile in Belgio (Fiandre)

CITTA	INPUT	ABITANTI	FRONTIERA	GET
A	15,9	37.588	60.976,41	0,62
B	18,7	52.310	64.245,91	0,81
C	25,1	67.923	71.719,05	0,95
D	27,2	68.366	74.171,18	0,92
E	**29**	**76.273**	**76.273**	**1**
F	34,8	61.499	83.045,54	0,74
G	38,5	65.798	87.365,95	0,75
H	43,1	75.515	92.737,27	0,81
I	45	76.384	94.955,86	0,8
J	55,2	85.015	106.866,2	0,8
K	64,3	115.982	117.492,1	0,99

A.1.6 Osservazioni al lavoro

"Il lavoro presentato fu contestato dagli amministratori delle città con GET più basso asserendo che il numero degli abitanti non rappresentava bene la produzione degli uffici di stato civile. Fu chiesto di considerare come OUTPUT il lavoro effettivamente prodotto e non quello desunto dal numero degli abitanti del comune"

A.1.7 La misura del lavoro effettivamente prodotto: l'*output* omogeneizzato

Nel caso degli uffici comunali, come per la maggior parte delle aziende pubbliche, l'*output* è formato da più servizi. Questi ultimi non sempre hanno caratteristiche fisiche chiaramente identificabili che possono quindi essere utilizzate per la misurazione.

E' quindi necessario pervenire ad una misura omogeneizzata dell'*output*. Essa viene ottenuta moltiplicando il numero degli oggetti trattati nello svolgimento delle attività del settore in questione, suddivise in categorie omogenee, per i rispettivi coefficienti tempo. In tal modo la produzione Y_{ti}, dell'ufficio i-esimo al tempo *t*, è espressa come somma dei tempi lavorati per ciascuna attività, con

$$Y_{ti} = x_i * t_i \qquad \text{[A.1.5]}$$

dove

$x_i =$ frequenza con cui l'attività i-esima viene svolta nel periodo di riferimento;

$t_i =$ tempo *standard* di esecuzione della attività i-esima (coefficienti ponderali temporali)[8]

Si ritiene, allora, opportuno adottare una misura dell'*output* stimando i coefficienti di assorbimento del tempo lavorato per ogni attività, che esprimono i tempi medi di lavoro necessari per le varie tipologie di servizi.

L'adozione di coefficienti ponderali temporali opera la trasformazione della produzione da "numero" di operazioni (quantità di servizi erogati) a "tempo utilizzato" per eseguire le stesse, permettendo di misurare la quantità di tempo lavorato e, quindi, per differenza, la quantità di tempo "inattivo" che fornisce già una misura speculare dell'efficienza.

Risultano assolutamente evidenti i pregi della metodologia utilizzata che consente di ottenere una misura dell'*output* complessivo aggregando quantità diverse, ottenute moltiplicando il numero di oggetti trattati per un coefficiente di omogeneizzazione indicativo del tempo necessario a "lavorare" il singolo oggetto, per ogni categoria (Vedi Tabella [A.1.4]).

[8] I tempi standard di esecuzione delle attività i-esime possono essere rilevati attraverso più procedure, la più comune è quella di ottenerle tramite misurazioni effettive del tempo impiegato nell'espletazione di ognuna di esse, prendendo come valore di riferimento la media dei tempi misurati per ciascuna attività

Tab. A.1.4 - La determinazione dell'output

Settore	Attività	N° Pezzi Prodotti	Coeff. Ponderali Tempo	Produzione per Attività ($Y_i = x_i * t_i$)
	A_1	x_{11}	t_1	Y_{11}
	A_2	x_{21}	t_2	Y_{21}
	A_3	x_{31}	t_3	Y_{31}
Settore 1	…	…	…	…
	…	…	…	…
	…	…	…	…
	A_n	x_{n1}	t_n	Y_N
				$\mathbf{Y^{TOT}_1}$
…	....	...	...	...
	A1	x_{1i}	t_1	Y_{1i}
	A2	x_{2i}	t_2	Y_{2i}
	A3	x_{3i}	t_3	Y_{3i}
Settore i-esimo	…	…	…	…
	…	…	…	…
	…	…	…	…
	An	x_{ni}	t_n	Y_{Ni}
				$\mathbf{Y^{TOT}_i}$

A.1.8 La frontiera e la regressione tra il numero degli applicati equivalenti e l'*output* omogeneizzato

Tab. A.1.5 - Dati sugli 11 uffici relativi all'output omogeneizzato

CITTA	INPUT	OUTPUT OMOGENEIZZATO
A	15,9	5.542.830
B	18,7	2.366.235
C	25,1	5.170.185
D	27,2	5.748.300
E	29	6.768.270
F	34,8	5.329.845
G	38,5	5.439.510
H	43,1	4.758.255
I	45	8.155.710
J	55,2	7.705.710
K	64,3	10.563.075

Figura A.1.4: Output della procedura regressione sui dati in tabella A.1.5

OUTPUT RIEPILOGO

Statistica della regressione	
R multiplo	0,78
R al quadrato	0,61
R al quadrato corretto	0,57
Errore standard	1.398.344,27
Osservazioni	11,00

ANALISI VARIANZA

	gdl	*SQ*	*MQ*	*F*	*Significatività F*
Regressione	1,00	27.622.685.063.270,30	27.622.685.063.270,30	14,13	0,00
Residuo	9,00	17.598.300.401.352,40	1.955.366.711.261,38		
Totale	10,00	45.220.985.464.622,70			

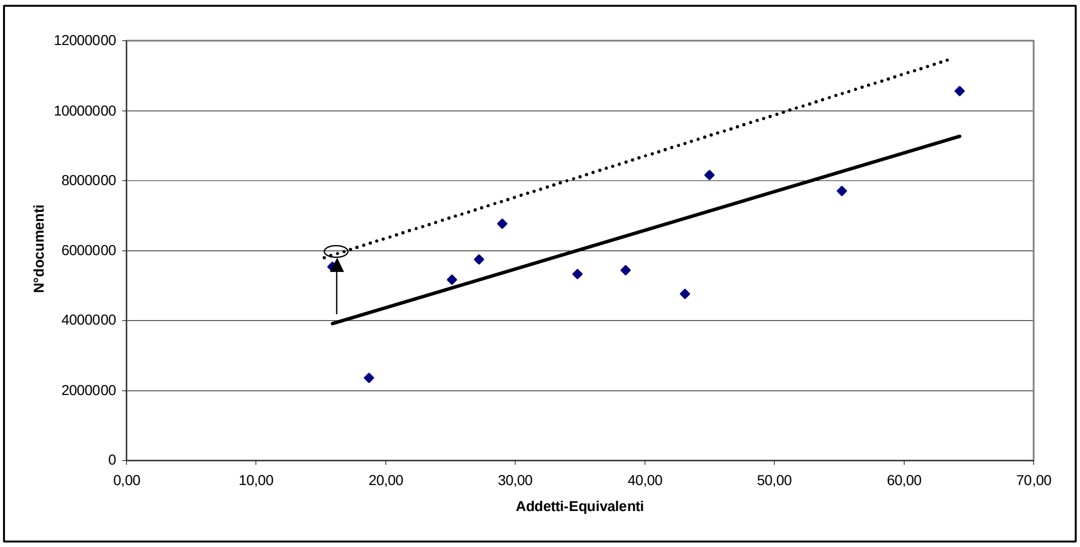
	Coefficienti	*Errore standard*	*Stat t*	*Valore di significatività*
Intercetta	2.150.155,13	1.142.383,03	1,88	0,09
INPUT	110.625,55	29.433,14	3,76	0,00

L'R al quadrato *(coefficiente di determinazione)* è pari a 0,61, il che significa che il modello ha una più che sufficiente capacità di interpretare la realtà.

L'Intercetta è pari a 2.150.155 a cui corrisponde il numero di minuti minimi che ogni ufficio si presume produca indipendentemente dal numero degli applicati equivalenti. Da notare che si ha un 9%[9] di probabilità che l'intercetta sia pari a zero (tra l'altro ipotesi molto veritiera!) e si può, quindi, supporre che essa sia nulla.

Il coefficiente β (INPUT) è pari a 110.625, che significa che ogni applicato equivalente mediamente produce per 110.625 minuti all'anno.

Figura A.1.4: Funzione di frontiera data la relazione dei dati in tabella A.1.5.



[9] Di solito si tende ad accettare l'ipotesi di base "coefficiente=0" quando il valore della statistica è >= 0,05

Tab.A.1.6 - GET degli 11 uffici di stato civile in Belgio (Fiandre) relativi ai dati di tabella A.1.5

CITTA	INPUT	OUTPUT OMOGENEIZZATO	FRONTIERA	GET
A	15,9	5.542.830	5.542.830	1,00
B	18,7	2.366.235	5.852.581	0,40
C	25,1	5.170.185	6.560.585	0,79
D	27,2	5.748.300	6.792.898	0,85
.E	29	6.768.270	6.992.024	0,97
F	34,8	5.329.845	7.633.652	0,70
G	38,5	5.439.510	8.042.967	0,68
H	43,1	4.758.255	8.551.844	0,56
I	45	8.155.710	8.762.033	0,93
J	55,2	7.705.710	9.890.414	0,78
K	64,3	10.563.075	10.897.106	0,97

A.1.9 Osservazioni al lavoro - 2

"Il lavoro presentato fu "mediamente" accettato dagli amministratori delle città, anche se coloro che si ritrovarono ad avere un GET più basso ebbero un po' a recriminare circa, sia l'ubicazione (il contesto territoriale), che le dimensioni dell'ufficio stesso, asserendo che il contesto territoriale, la direzione (intesa come amministrazione) e le dimensioni sono comunque fattori che incidono sulla qualità del servizio"

A.1.10 Punteggio di efficienza e punteggio di qualità

Sulla base di indicatori circa sia sul contesto territoriale, che alcune caratteristiche dell'ufficio stesso è possibile costruire un indice di qualità.

Tab. A.1.7 - Qualità degli 11 uffici di stato civile in Belgio (Fiandre)

CITTA	INPUT	OUTPUT OMOGENEIZZATO	FRONTIERA	GET	QUALITA
A	15,9	5.542.830	5.542.830	1,00	6
B	18,7	2.366.235	5.852.581	0,40	9
C	25,1	5.170.185	6.560.585	0,79	8
D	27,2	5.748.300	6.792.898	0,85	1
E	29	6.768.270	6.992.024	0,97	7
F	34,8	5.329.845	7.633.652	0,70	5
G	38,5	5.439.510	8.042.967	0,68	6
H	43,1	4.758.255	8.551.844	0,56	1
I	45	8.155.710	8.762.033	0,93	1
J	55,2	7.705.710	9.890.414	0,78	2
K	64,3	10.563.075	10.897.106	0,97	5

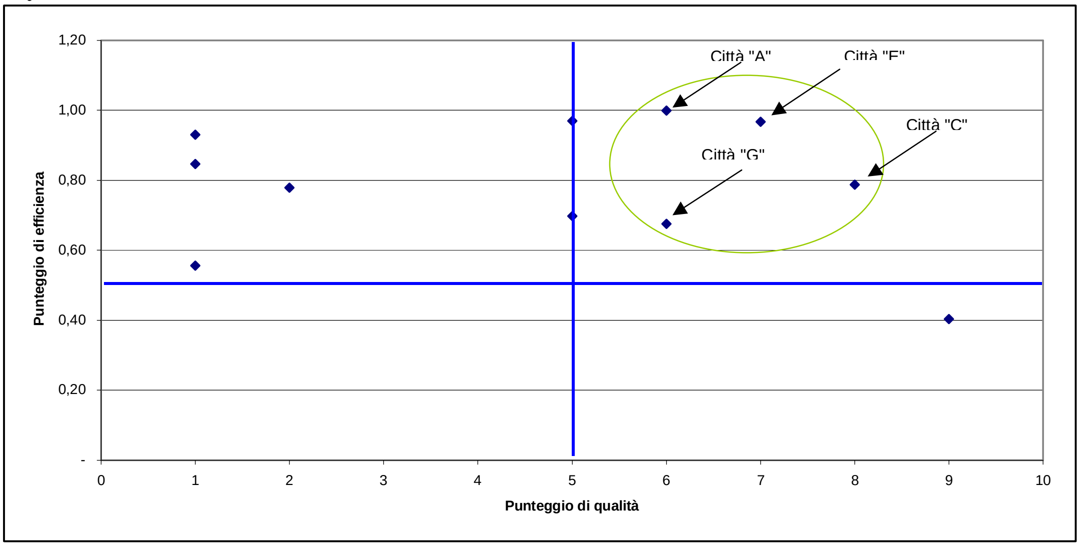
QUALITA: Rappresenta un punteggio (da 1 a 10) che si desume dai seguenti parametri:

- E' più facile contattare l'ufficio per chiedere informazioni o documenti;
- Il servizio è decentrato in varie parti della città;

- Vi sono più sportelli con tempi di attesa più brevi;
- L'orario di apertura è più lungo;
- I documenti contengono un minor numero di errori.

Rappresentando in un grafico efficienza e qualità, si evidenzia il 1° quadrante che identifica i più alti livelli di entrambe le analisi in modo tale da stabilire alcuni *score* che rappresentano la efficacia del servizio effettuato.

Figura A.1.5: Grafico dell'efficacia del servizio



APPENDICE 2. La situazione del mondo “manifatturiero toscano” a metà degli anni ‘90

I dati su cui ci apprestiamo a stimare la funzione di produzione sono riferiti a 99 aziende del Settore delle Industrie Manifatturiere Alimentari, Tessili, delle Pelli, del Cuoio, dell’Abbigliamento, del Legno, e del Mobilio nell’anno 1993.

In questi anni l’economia italiana, e questo settore in particolare, beneficiarono della forte accelerazione della crescita del commercio mondiale e della persistente competitività di prezzo dei prodotti italiani derivante dalla svalutazione della lira.

Infatti le esportazioni registrarono un notevole aumento passando dal 9,4% nel 1993 al 10,9 % nel 1994 (Prometeia, rapporto sul 1° semestre 1995). In tale contesto la Toscana occupò un posto rilevante, anzi confrontando i dati regionali con quelli nazionali si evince che la nostra regione attraversò negli anni 1993 e 1994 una fase congiunturale più favorevole rispetto alla situazione riscontrabile a livello nazionale.

Se si osserva il profilo mensile dell’andamento degli ordini esteri della Toscana risulta evidente la fase di ripresa che ebbe inizio nel 1993 anche se solo un anno più tardi si sarebbero avuti saldi qualitativi positivi (Prometeia, rapporto sul 1° semestre 1995).

Si trattava per buona parte di aziende medio piccole: l’analisi della distribuzione delle aziende per classe di attività e di fatturato per l’anno 1994, evidenzia come circa il 68% delle aziende del settore chimico realizzi un fatturato inferiore al miliardo.

I dati che utilizzeremo riguardano:

- *CRE* = Centri di Responsabilità Economica (Identificativo aziende)
- *Y* = Fatturato delle aziende (in migliaia di lire) – Dati deflazionati
- *MP* = Materie prime utilizzate dalle aziende (in migliaia di lire) – Dati deflazionati
- *K* = Capitale utilizzato dalle aziende (in migliaia di lire) – Dati deflazionati
- *L* = Numero di ore lavorate dalle aziende

Tab. A.2.1 - I dati relativi alle 99 aziende del manifatturiero

CRE	Y	MP	K	L
1	1143	594	8	900
2	5576	837	43	17600
3	2797	445	23	13220
4	32045	15177	927	96800
5	66530	31712	2189	121440
6	15573	8922	304	59200
7	347955	228644	10242	508640
8	1255	508	55	1760
9	1028	306	60	15080
10	1167	480	34	17060
11	4326	1753	29	8800
12	751	294	31	7410

13	911	410	10	8020
14	2263	1037	15	24810
15	2992	959	35	19360
16	5425	3533	19	15100
17	2597	440	291	32000
18	4014	756	84	41400
19	7563	3685	72	59970
20	2500	731	270	25300
21	5642	2507	126	28490
22	2795	1111	91	22880
23	31771	5812	759	109770
24	7404	4945	207	38720
25	4835	1992	126	44000
26	3624	1103	121	26470
27	7318	4524	95	22500
28	63032	18291	2912	519860
29	33030	13326	1000	81600
30	22364	9781	1115	102080
31	30193	22966	1589	141680
32	23578	11701	981	233720
33	42154	32728	881	153250
34	1151380	871140	55323	6167128
35	1074	560	37	6800
36	4196	1311	169	5280
37	1817	1400	17	14560
38	1690	1112	54	11440
39	1172	1166	82	25680
40	1003	454	2	12320
41	961	459	7	5280
42	158	1	1	8240
43	207	3	69	3810
44	540	225	12	5740
45	988	491	11	4550
46	558	141	6	4850
47	283	50	4	15570
48	1070	536	23	7250
49	568	461	3	5660
50	1725	785	19	11280
51	660	500	10	5760
52	931	720	45	7040
53	560	1	17	15300
54	1193	346	63	14900
55	832	110	11	8800
56	1141	458	42	15840
57	5306	4118	67	8800
58	10904	5004	685	36960
59	20666	12176	3795	52800
60	9278	7322	61	10560
61	8002	3501	324	80960
62	2795	831	44	35600
63	39518	27740	830	24640
64	7468	4758	188	33440

65	3699	1982	69	36960
66	47087	13031	5673	58080
67	15836	3835	304	136320
68	24284	6351	163	43410
69	7026	1719	90	28480
70	27358	13123	395	17600
71	2843	463	92	35240
72	15018	7541	432	75600
73	6134	4038	222	26890
74	3710	1371	96	29310
75	6757	2760	626	40210
76	3492	2443	55	38270
77	2430	165	65	53000
78	3003	1255	25	34400
79	7400	1500	267	72020
80	3790	1052	124	44000
81	2528	520	133	29920
82	759	124	3	70400
83	9126	4556	206	33310
84	5100	2900	100	72160
85	752	291	20	22880
86	22722	18324	428	10560
87	8711	3109	53	66880
88	9559	2325	408	114180
89	2332	936	102	35890
90	37097	18816	1515	162250
91	11231	5016	98	281600
92	77305	29478	709	66880
93	124585	100998	2960	314780
94	33157	23102	1853	180210
95	72338	42841	3535	316800
96	48513	28582	1050	278380
97	41855	14653	3282	172590
98	13284	4705	265	161920
99	45938	13562	3485	692610

Il nostro obiettivo è quello di stimare una frontiera di produzione caratterizzata da una tecnologia *Cobb-Douglas*. Il modello che dobbiamo stimare è rappresentato dalla trasformazione logaritmica della forma seguente:

$$y_i = A \times mp_i^{\beta_1} k_i^{\beta_2} l_i^{\beta_3} \qquad \text{[A.2.1]}$$

che risulta essere la seguente:

$$Ln\, y_i = Ln\, A + \beta_1 Ln\, mp_i + \beta_2 Ln\, k_i + \beta_3 Ln\, l_i \qquad \text{[A.2.2]}$$

dove è possibile dimostrare che i parametri rappresentano le elasticità del prodotto rispetto ai fattori produttivi:

- delle materie prime:

$$\beta_1 = \varepsilon_{y,mp} = \frac{\partial y}{\partial mp} \times \frac{mp}{y} \qquad [A.2.3]$$

- del capitale:

$$\beta_2 = \varepsilon_{y,k} = \frac{\partial y}{\partial k} \times \frac{k}{y} \qquad [A.2.4]$$

- del lavoro:

$$\beta_3 = \varepsilon_{y,l} = \frac{\partial y}{\partial l} \times \frac{l}{y} \qquad [A.2.5]$$

e la somma dei tre coefficienti (delle tre elasticità) restituisce l'elasticità di scala della funzione di produzione

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \varepsilon_{y,mp} + \varepsilon_{y,k} + \varepsilon_{y,l} = \varepsilon_y \qquad [A.2.6]$$

Se il valore dell'elasticità di scala è maggiore di 1, uguale ad 1 o minore di 1, la funzione avrà rendimenti crescenti, costanti o decrescenti.

Naturalmente prima di procedere alla stima è necessario trasformare i dati originali in logaritmi (vedi Tabella A.2.2).

Tab. A.2.2 - I dati relativi alle aziende del manifatturiero trasformati in logaritmi

CRE	TEM	Y	MP	K	L	Ln Y	Ln MP	Ln K	Ln L
1	1	1143	594	8	900	7,04	6,39	2,08	6,80
2	1	5576	837	43	17600	8,63	6,73	3,76	9,78
3	1	2797	445	23	13220	7,94	6,10	3,14	9,49
4	1	32045	15177	927	96800	10,37	9,63	6,83	11,48
5	1	66530	31712	2189	121440	11,11	10,36	7,69	11,71
6	1	15573	8922	304	59200	9,65	9,10	5,72	10,99
7	1	347955	228644	10242	508640	12,76	12,34	9,23	13,14
8	1	1255	508	55	1760	7,13	6,23	4,01	7,47
9	1	1028	306	60	15080	6,94	5,72	4,09	9,62
10	1	1167	480	34	17060	7,06	6,17	3,53	9,74
….	….	….	….	….	….	….	….	….	….

Come fatto nella appendice n°1 effettuiamo la stima della frontiera MOLS con una procedura a due stadi, il primo due quali si concretizza con una regressione lineare (vedi Tabella A.2.3).

La somma dei tre coefficienti (0,40+0,27+0,24=0,91) mostra che i rendimenti di scala sono decrescenti.

Tab. A.2.3 - I dati relativi alle aziende del manifatturiero trasformati in logaritmi

OUTPUT RIEPILOGO

Statistica della regressione	
R multiplo	0,97
R al quadrato	0,94
R al quadrato corretto	0,94
Errore standard	0,41
Osservazioni	99,00

ANALISI VARIANZA

	gdl	*SQ*	*MQ*	*F*	*Significatività F*
Regressione	3,00	251,76	83,92	488,76	0,00
Residuo	95,00	16,31	0,17		
Totale	98,00	268,07			

	Coefficienti	*Errore standard*	*Stat t*	*Valore di significatività*
Intercetta	1,81	0,40	4,56	0,00
Ln MP	0,40	0,03	11,94	0,00
Ln K	0,27	0,04	6,60	0,00
Ln L	0,24	0,05	4,87	0,00

E' possibile ricavare il valore più alto dei residui nell'azienda n°53 (pari a 1,46). Questo valore ci consente di ottenere i nuovi coefficienti della funzione di frontiera MOLS:

- *Intercetta (1,81 + 1,46) = 3,27*
- *Ln MP = 0,40*
- *Ln K = 0,27*
- *Ln L = 0,24*

A questo punto è possibile calcolare il valore di frontiera di ogni azienda (*Previsto Ln Y*). Per esempio per l'azienda n°1

$$3,27+(0,40*6,39)+(0,27*2,08)+(0,24*6,80) = 7,98$$

Nella Tabella A.2.4 i risultati delle prime 10 aziende.

Tab. A.2.4 - I dati relativi alle aziende del manifatturiero trasformati in logaritmi

CRE	Ln Y	Ln MP	Ln K	Ln L	Previsto Ln Y
1	7,04	6,39	2,08	6,80	7,98
2	8,63	6,73	3,76	9,78	9,28
3	7,94	6,10	3,14	9,49	8,79
4	10,37	9,63	6,83	11,48	11,67
5	11,11	10,36	7,69	11,71	12,25
6	9,65	9,10	5,72	10,99	11,04
7	12,76	12,34	9,23	13,14	13,79
8	7,13	6,23	4,01	7,47	8,60
9	6,94	5,72	4,09	9,62	8,94
10	7,06	6,17	3,53	9,74	7,98
….	….	….	….	….	….

A questo punto è necessario trasformare il dato "logaritmico" nel dato "in migliaia di lire" applicando la formula "*exp*" al "*Previsto Ln Y*". Ad esempio per l'azienda n°1:

$$exp(6,52) = 2.934,53$$

Non resta che calcolare il Grado di Efficienza Tecnica (GET):

$$Grado\ di\ Efficienza\,(GET) = \frac{Y\ reale}{Y\ \ frontiera} \qquad [A.2.7]$$

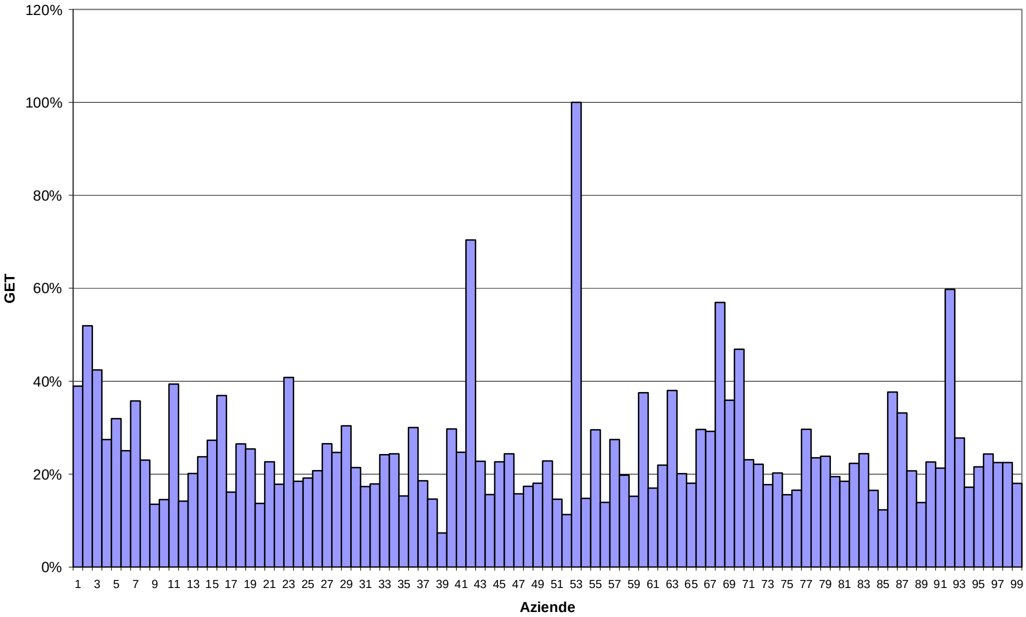
Nella Tab.A.2.5 sono riepilogati i risultati del calcolo del GET per le prime dieci aziende.

Tab. A.2.5 - I dati relativi alle aziende del manifatturiero trasformati in logaritmi

CRE	Y Front	Y	GET
1	2.935	1.143	39%
2	10.741	5.576	52%
3	6.593	2.797	42%
4	116.738	32.045	27%
5	208.263	66.530	32%
6	62.206	15.573	25%
7	973.001	347.955	36%
8	5.452	1.255	23%
9	7.603	1.028	14%
10	8.025	1.167	15%
….	….	….	….

Nel Grafico in Fig. A.2.1. sono mostrati i GET di tutte le 99 aziende che dimostrano quanto si diceva all'inizio.

Fig. A.2.1 - I GET relativi alle aziende del manifatturiero



Capitolo 5. Lo studio dell’efficienza tecnica con dati panel

Con il termine *panel data* (o *longitudinal data*) ci si riferisce generalmente ad osservazioni su un gruppo di individui relative a istanti temporali diversi.
In sostanza, per ogni variabile rilevata, i dati riguardano *N* unità e per ogni unità si hanno *T* osservazioni pari all'ampiezza del periodo di tempo preso in considerazione.
L'econometria dei dati in *panel*, attraverso l'uso combinato (*pooling*) di tali osservazioni, si occupa della stima di modelli del tipo seguente:

$$y_{it} = f(x_{it}, \beta_{it}, \varepsilon_{it}) \qquad [5.1]$$

$$i = 1,\ldots, N; t = 1,\ldots, T$$

dove l'indice *it* è relativo all'osservazione di una variabile per un individuo *i* al tempo *t* y_{it} è la variabile dipendente, x_{it} è un vettore di variabili esplicative, β_{it} è un insieme di parametri (che in genere possono differire nel tempo e per individuo) e ε_{it} è un insieme di disturbi casuali.
Riassumiamo con un'equazione una generica funzione di produzione (Schmidt e Sickles, 1984):

$$y_{it} = \alpha + x_{it}^{'}\beta + v_{it} - u_i \qquad [5.2]$$

$$i = 1,\ldots, N; t = 1,\ldots, T$$

dove *i* e *t* rappresentano, rispettivamente, l'unità in esame e il periodi di tempo al quale ci si riferisce. Il valore y_{it} è l'output (per l'i-esimo soggetto nel periodo t-esimo), x_{it} il vettore degli input e v_{it} descrive l'errore statistico che si pone essere incorrelato con i regressori x_{it}.
L'inefficienza tecnica è rappresentata da u_i sotto il vincolo $u_i \geq 0$ per ogni *i*. Assumiamo che le u_i siamo identicamente distribuite con media μ e varianza σ_u^2 ed indipendenti dalle v_{it}.

Uno dei principali vantaggi offerti dai panel data, sta nella facoltà di scegliere se assumere o no specifiche distribuzioni per u_i e v_{it}, e se assumere l'indipendenza

tra effetti e regressori; tali ipotesi possono comunque, come vedremo, essere sottoposte a verifica statistica.
Può essere utile riscrivere il modello passando per le seguenti trasformazioni: sia

$$\mathrm{E}(u_i) = \mu > 0 \qquad [5.3]$$

e definiamo

$$\alpha^* = \alpha - \mu \qquad [5.4]$$

e

$$u_i^* = u_i - \mu \qquad [5.5]$$

cosicché le u_i^* sono identicamente distribuite con media 0, e varianza costante.
Ne segue che nel modello

$$y_{it} = \alpha^* + x_{it}'\beta + v_{it} - u_i^* \qquad [5.6]$$

i termini di errore v_{it} e u_i^* hanno media 0 e questo permette l'applicazione di molte proprietà statistiche, eccetto, naturalmente, quella che poggia sulla normalità dell'errore totale.
Operando un'ulteriore trasformazione si ha:

$$\alpha_i = \alpha - u_i = \alpha^* - u_i^* \qquad [5.7]$$

da cui

$$y_{it} = \alpha_i + x_{it}'\beta + v_{it} \qquad [5.8]$$

In questo modo α_i cattura gli effetti di variabili non osservabili, costanti nel tempo e nello spazio (α) e l'effetto della componente di inefficienza tecnica dell'unità i-esima (u_i), ipotizzata invariante nel tempo.
L'equazione [5.8] esprime il modello standard riportato nella letteratura sui panel. Il vettore dei parametri β indica i coefficienti angolari della retta di produzione.
Analizzeremo il caso più comune di utilizzo dei dati in panel, e cioè i modelli con coefficienti angolari uguali tra individui e nel tempo e intercette variabili. Le specificazioni alternative dei metodi di stima differiscono nel modo di trattare gli effetti individuali u_i, che possono essere fissi o stocastici.
Ci limiteremo ad illustrare il modello ad effetti fissi *o within estimator*.

La generalizzazione di un modello ad intercetta variabile e inclinazione costante per una metodologia panel si sostanzia nell'introduzione delle variabili *dummy* che servono a rappresentare gli effetti di quelle variabili omesse che sono specifici per ogni unità *cross-section* ma costanti nel tempo.

Così, il valore della variabile dipendente per i-esima unità al tempo *t*, y_{it}, dipende da *K* variabili esogene, $x_{it} = (x_{i1t},\dots,x_{iKt})'$, che differiscono tra gli individui in *cross-section* in un dato istante temporale e anche presentano variazioni nel tempo, come pure dipende da quelle variabili che sono specifiche per i-esima unità e costanti nel tempo.
Una singola equazione del modello da analizzare assume la forma:

$$y_{it} = \alpha + x'_{it}\beta + v_{it} - u_i \qquad [5.9]$$
$$i = 1\dots N;\ t = 1\dots T$$

dove l'indice *i* indica l'azienda e l'indice *t* il periodo di tempo.
Il valore y_{it} è l'output per l'azienda *i* al tempo *t*, mentre x_{it} è un vettore di *K* input.
Il termine v_{it} è il disturbo statistico incorrelato con i regressori, x_{it}, con media *0* e varianza σ_v^2, mentre u_i rappresenta l'inefficienza tecnica ed è $u_i \geq 0$ per tutti gli *i*.
Si assume u_i distribuito con media μ e varianza σ_u^2 e indipendente da v_{it}.
Il modello può anche essere espresso nella forma:

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + v_{it} \qquad [5.10]$$

dove $\alpha_i = \alpha - u_i$. In questo modello, sintetizzato dall'equazione [5.10], u_i è trattato come una costante che varia tra le unità economiche, ma che rimane costante nel tempo.
Esso presenta una intercetta (effetto individuale) per ogni azienda e può essere stimato introducendo *N-1 dummy* più la costante o sopprimendo questa ma aggiungendo *N dummy.*

In forma matriciale può essere scritto come:

$$\mathrm{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}\alpha_1 + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ e \end{bmatrix}\alpha_N + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_N \end{bmatrix}\beta + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_N \end{bmatrix} \qquad [5.11]$$

dove

$$Y_i = \begin{bmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \dots \\ y_{iT} \end{bmatrix}$$

$$\underset{T\times K}{\mathrm{X}_i} = \begin{bmatrix} x_{i11} & \dots & x_{i1K} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{iT1} & \dots & x_{iTK} \end{bmatrix}$$

$$\underset{T\times 1}{v_i} = (v_{i1}, \dots, v_{iT})'$$

$$\underset{T\times 1}{e} = [1,1,\dots,1]'$$

$$\mathrm{E}(v_i) = 0$$

$$\mathrm{E}(v_i v_i') = \sigma_v^2 \mathrm{I}_T$$

$$\mathrm{E}(v_i v_j') = 0$$

per $i \neq j$

ed I_T denota una matrice identità di ordine $T \times T$.
In forma compatta il modello [16] si scrive:

$$\underset{NT\times 1}{\mathrm{Y}} = \underset{NT\times N}{\mathrm{Z}} \underset{N\times 1}{\alpha} + \underset{NT\times K}{\mathrm{X}} \underset{K\times 1}{\beta} + \underset{NT\times 1}{V} \qquad [5.12]$$

dove $\mathrm{Z} = \mathrm{I}_N \otimes e_T$, e l'equazione riferita all'individuo i-esimo assume la seguente forma

$$Y_i = e\alpha_i + X_i\beta + v_i \qquad [5.13]$$

Date le assunzioni sulle proprietà di v_{it} , gli OLS applicati al modello [5.11] danno il miglior stimatore lineare non distorto cioè uno stimatore BLUE.

Le stime OLS di α_i e β sono ottenute minimizzando la somma dei residui al quadrato come segue

$$\sum_{i:1}^{N} v_i' v_i = \sum_{i:1}^{N} (Y_i - e\alpha_i - X_i\beta)'(Y_i - e\alpha_i - X_i\beta) \qquad [5.14]$$

Ponendo la derivata parziale dell'espressione [5.14] rispetto a α_i uguale a 0 atteniamo

$$\hat{\alpha}_i = \overline{Y}_i - \beta' \overline{X}_i \qquad [5.15]$$
$$i = 1,\dots, N$$

dove

$$\overline{Y}_i = \frac{1}{T}\sum_{t:1}^{T} y_{it}$$
$$\overline{X}_i = \frac{1}{T}\sum_{t:1}^{T} x_{it}$$

Sostituendo la [5.15] nella [5.14] e prendendo la derivata parziale rispetto a β, otteniamo:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i:1}^{N}\sum_{t:1}^{T}\left(x_{it} - \overline{X}_i\right)\left(y_{it} - \overline{Y}_i\right)}{\sum_{i:1}^{N}\sum_{t:1}^{T}\left(x_{it} - \overline{X}_i\right)\left(x_{it} - \overline{X}_i\right)'} \qquad [5.16]$$

Un modo analogo di procedere per ottenere la stima del vettore dei coefficienti angolari è di utilizzare una matrice delle trasformazioni $Q = \mathrm{I}_T - \frac{e_T e_T'}{T}$ idempotente e di ordine $T \times T$, che ha la proprietà di essere ortogonale alla matrice delle variabili *dummy* per cui $Q\mathrm{Z} = 0$, e di moltiplicare il modello per Q. In riferimento all'equazione i-esima otteniamo:

$$QY_i = Qe\alpha_i + QX_i\beta + Qv_i = QX_i\beta + Qv_i \qquad [5.17]$$
$$i = 1,\dots, N$$

La proprietà di questa matrice è di trasformare i dati in deviazioni dalle medie individuali fatte rispetto al tempo. Per primo si calcola la media in serie storica di ogni *cross-section* poi si sottrae da ogni osservazione l'appropriata media nel tempo, a y_{it} si sostituisce $y_{it} - \overline{Y}_i$, x_{it} diviene $x_{it} - \overline{X}_i$ ecc., ottenendo la seguente equazione

$$\left(y_{it} - \overline{Y}_i\right) = \left(x_{it} - \overline{X}_i\right)\beta + \left(v_{it} - \overline{v}_i\right) \qquad [5.18]$$

Una volta modificati i dati con questo sistema, si applicano gli OLS al modello trasformato e lo stimatore che si ottiene è detto *within estimator* perché sta ad indicare che è generato dopo aver effettuato una trasformazione *within* cioè deviazioni all'interno dei gruppi

$$\hat{\beta}_W = \left[\sum_{i:1}^{N} X_i^{'} Q X_i\right]^{-1}\left[\sum_{i:1}^{N} X_i^{'} Q Y_i\right] = \left(X^{'}QX\right)^{-1}\left(X^{'}QY\right) \qquad [5.19]$$

Lo stimatore [5.19] ottenuto applicando gli OLS al modello trasformato [5.18] è identico allo stimatore [5.16] ottenuto applicando gli OLS al modello [5.11].
Le N intercette sono recuperate come la media dei residui delle unità. Usando il modello [5.18] i residui $\left(y_{it} - x_{it}^{'}\hat{\beta}_W\right)$ sono una stima per $\left(v_{it} - u_i\right)$ e l'effetto individuale, per ogni azienda, è stimato come la media, nel tempo, dei residui relativi a ciascuna unità.
Specificatamente la stima di α è

$$\hat{\alpha}_i = \overline{Y}_i - \hat{\beta}_W^{'}\overline{X}_i \qquad [5.20]$$

Il principale vantaggio per lo stimatore *within* è che la sua consistenza è indipendente dalla possibile correlazione tra regressori e effetti individuali, poiché tale procedura se ne libera utilizzando le differenze dalle medie individuali, né dipende dalla specificazione di una distribuzione per questi che vengono assunti fissi. La stima within di β è consistente per $N \Rightarrow \infty$ o $T \Rightarrow \infty$, mentre la consistenza delle stime dell'intercette (α_i) richiede, comunque, che $T \Rightarrow \infty$.
Sotto le usuali ipotesi sul comportamento stocastico dell'errore, sull'esogeneità dei regressori e sulla natura non stocastica dei coefficienti, il *within estimator* è BLUE.

Infine l'intercetta della frontiera è stimata come il massimo degli $\hat{\alpha}_i$

$$\hat{\alpha} = \max_i\left(\hat{\alpha}_i\right) \qquad [5.21]$$

e il livello di inefficienza dell'azienda *i* è dato da

$$\hat{u}_i = \hat{\alpha} - \hat{\alpha}_i \qquad [5.22]$$

Questa definizione equivale a considerare l'unità più efficiente del campione, come efficiente al 100%; si ipotizza, cioè, che il soggetto a cui corrisponde α_i maggiore, abbia ottimizzato il processo produttivo, conseguendo il miglior risultato potenzialmente ottenibili, dato un *set* di *input*. In realtà, con questa procedura, non è possibile verificare il livello assoluto di efficienza. Gli indici di efficienza tecnica sono espressi in termini relativi rispetto al livello massimo del campione. Solo nel caso in

cui la funzione di distribuzione di u sia diversa da *0* in un intorno di *0* ($0, \varepsilon$)per $\varepsilon > 0$ e per $N \Rightarrow \infty$, il livello di efficienza espresso dalla [5.22] fornisce un valore assoluto (Greene, 1980).
In ragione di ciò, le stime fornite dalla [5.22] sono consistenti solo nel caso in cui $N \Rightarrow \infty$ (per quanto detto sopra), e $T \Rightarrow \infty$ (necessario per la consistenza delle stime di α_i). In sintesi, possiamo dire che la stima consistente delle intercette individuali, ed il loro confronto tra i soggetti economici, poggia sulla condizione che $T \Rightarrow \infty$. Oltre a ciò, per $N \Rightarrow \infty$, possiamo consistentemente separare la componente globale dell'intercetta α , dall'effetto individuale u_i ottenendo in tal modo una misura di efficienza relativa ad uno *standard* assoluto.
Il maggior inconveniente dello stimatore *within* risiede nella impossibilità di includere nel modello regressori che, pur variando tra le unità, rimangono costanti nel tempo, dato che essi non appaiono nella [5.18] dopo la trasformazione. Infatti procedendo alla trasformazione *within*, ovvero trasformando i dati in scarti dalle loro medie individuali, i regressori in questione scompaiono e con loro molte importanti informazioni. In questa circostanza l'influenza delle variabili *time-invariant*, si riverserà sulle stime degli effetti individuali, originariamente composte solo da α e u_i .
Le $\hat{\alpha}_i$, espressione dell'inefficienza tecnica, sono in questo caso condizionate anche da componenti estranee che ne alterano il valore. Per evitare questo problema è necessario ricorrere ad una diversa procedura di stima, subordinata, tuttavia, a precise ipotesi. In secondo luogo la trasformazione aggrava gli effetti di possibili errori nella misurazione delle variabili.
L'assunzione che gli effetti aziendali siano invarianti nel tempo è molto forte e probabilmente irrealistica per cui si sostituiscono gli effetti (α_i) nella [5.18] con una funzione parametrica flessibile del tempo, con parametri che variano tra le unità, procedura elaborata da Schmidt e Sickles (1984). La forma funzionale scelta in questo caso è quadratica

$$\alpha_{it} = \theta_{i1} + \theta_{i2}t + \theta_{i3}t^2 \qquad [5.23]$$

L'espressione [5.23] è lineare negli elementi $\theta_{ij}\left(j = 1,2,3\right)$.

Chiaramente l'equazione [5.23] implica che il livello dell'output vari sia tra le unità che nel tempo. L'aspetto più significativo della trasformazione operata sta nella possibilità di rilevare le variazioni di efficienza individuale nel tempo oltre che tra gli individui.
Presa in considerazione una matrice W_{it} che contiene una intercetta, il tempo, il tempo al quadrato ed un vettore di parametri δ_i si ottiene la seguente notazione

$$W_{it}^{'} = \left[1, , t, t^2\right]; \delta_i^{'} = \left[\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3}\right] \qquad [5.24]$$

e con questa notazione il modello [5.18] può essere riscritto come

$$y_{it} = x_{it}^{'}\beta + W_{it}^{'}\delta_i + v_{it} \quad [5.25]$$

dove il livello dell'output varia tra le unità e nel tempo.
Mentre tramite il modello [5.18] si calcolano gli effetti individuali *cross-section*, con la modifica [5.23] è possibile ottenere anche la loro variazione temporale, derivandola dai residui ottenuti con le stime *within*.

Per il presente modello la stima di δ si ottiene regredendo i residui $\left(y_{it} - x_{it}^{'}\hat{\beta}_W\right)$ per l'azienda *i* su W_{it}. Una volta stimato il vettore dei parametri δ per ogni unità si procede ad una stima di α_{it} come indicato della [5.23] che è consistente (per tutti gli *i* e *t*) per $T \Rightarrow \infty$.

Una procedura analoga è seguita per stimare l'intercetta della frontiera al tempo *t*

$$\hat{\alpha}_t = \max_i\left(\hat{\alpha}_{it}\right) \quad [5.26]$$

e il livello individuale di inefficienza tecnica per l'azienda *i* al tempo *t* è

$$\hat{u}_{it} = \hat{\alpha}_t - \hat{\alpha}_{it} \quad [5.27]$$

Con l'uso dei panel siamo arrivati alla stima di una frontiera, passando per una procedura applicativa, naturalmente diversa da quella che avremo adottato disponendo di una *cross-section*.
Ciò che prescinde dalla tipologia di dati disponibili, sono invece le ipotesi statistiche che attengono alla teoria delle funzioni frontiera. I fondamenti teorici sull'inferenza, sul concetto di efficienza, sulla distribuzione dell'errore, ecc., sono ancora i presupposti su cui poggia l'econometria dei dati in *panel*.

APPENDICE 3. L'analisi dell'efficienza con dati panel

L'esercitazione, tutta sviluppata in ambiente excel, si propone di stimare un modello Panel per dati relativi alla produzione di 99 aziende sulle quali vengono rilevati dati relativi a:

- CRE : Identificativo delle aziende
- TEM : Identificativo dei periodi
- Y : Valore monetario della produzione
- MP : Totale consumi per materie prime
- K : Ammortamenti ordinari
- L : Ore lavorate sulle attività principali

per due anni successivi, il 1993 ed il 1994. Lo scopo dell'esercitazione è quello di verificare se vi siano aziende più efficienti delle altre, e se questa efficienza è di natura casuale o meno.

Vogliamo stimare una funzione di produzione per ciascun ufficio data dal modello lineare:

$Y_{it} = \beta_0 + \beta_1 * MP_{it} + \beta_2 * K_{it} + \beta_3 * L_{it} + u_{it}$ ([10]) *i=1,2,3,4,….99*

$u_{it} = u_i + v_{it}$ *t=1,2*

dove $v_{it} \approx IID(0, \sigma_v^2)$

Output e risorse per azienda ed anno di rilevazione

CRE	TEM	Y	MP	K	L
1	1	1143	594	8	900
1	2	1143	594	8	900
2	1	5576	837	43	17600
2	2	7530	1130	42	35200
3	1	2797	445	23	13220
3	2	2648	395	22	11900
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
98	1	13284	4705	265	161920
98	2	15202	5923	318	165440
99	1	45938	13562	3485	692610
99	2	44671	14450	3233	703210

Per il calcolo delle medie individuali si utilizza la tabella "*Pivot*" di *excel*

---

[10] Da questo punto in poi, per semplicità nella notazione, sostituiremo l'equazione $output_{it} = \alpha + \beta * aes_{it} + u_{it}$ con $y_{it} = \alpha + \beta * x_{it} + u_{it}$ per cui l'*output* sarà la *y*, mentre gli *aes* saranno le *x*

Una volta creata la tabella “*Pivot*”, tramite la funzione “*cerca.vert*” si possono riportare i valori ottenuti nelle due colonne affianco a quelle dei dati
Gli scarti dalle medie sono semplicemente ottenuti sottraendo i valori ottenuti da quelli effettivi, in formule:

$$\tilde{y}_{it} = y_{it} - \bar{y}_i$$

$$\tilde{x}_{it} = x_{it} - \bar{x}_i$$

A.3.1 Stima del modello ad effetti fissi

Si riparametrizzi il modello nel modo seguente

$$Y_{it} = \mu_i + \beta_1 * MP_{it} + \beta_2 * K_{it} + \beta_3 * L_{it} + v_{it} \qquad i=1,2,..99 \qquad t=1,2$$

dove Y_{it} è l’output dell’Azienda i-esima al tempo t-esimo, mentre

- Y : Valore monetario della produzione
- MP : Totale consumi per materie prime
- K : Ammortamenti ordinari
- L : Ore lavorate sulle attività principali

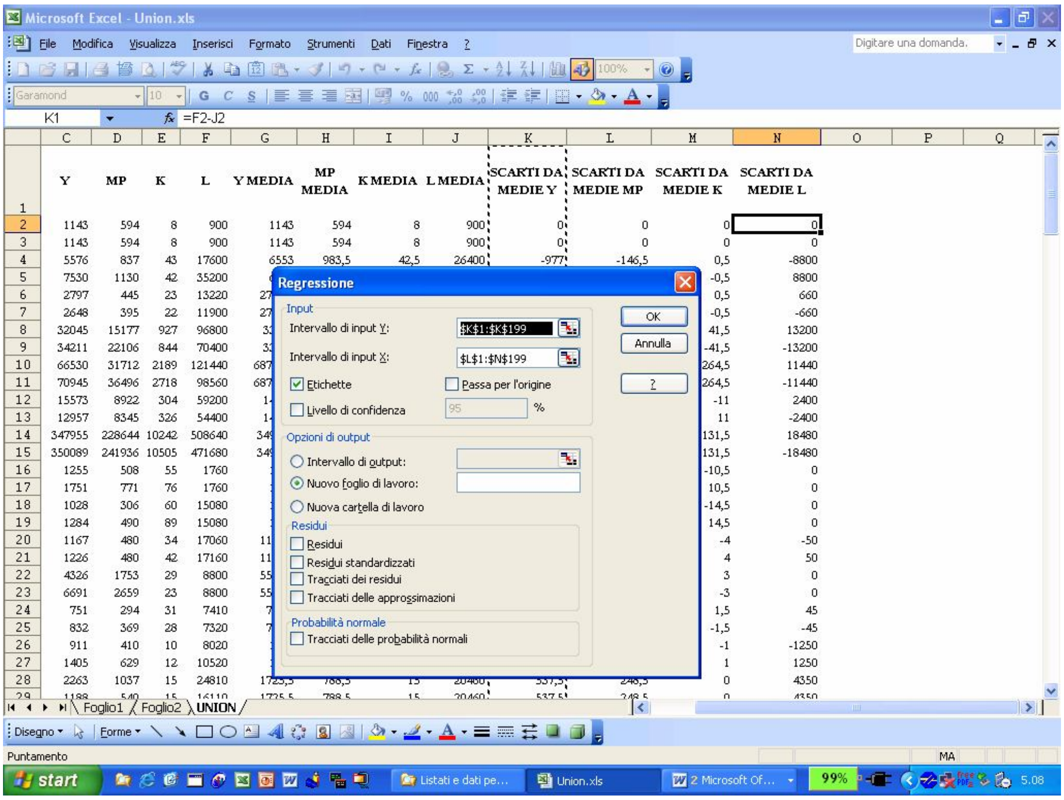
dell’azienda i-esima al tempo t-esimo.
I parametri da stimare sono 103 (i tre β, il vettore (99 x 1) μ e la varianza dei disturbi σ_v^2)

La stima dei β si ottiene applicando la formula dello stimatore within:

$$\hat{\beta} = (x'Px)^{-1} x'Px$$

dove il vettore degli scarti dalle medie è dato da $\tilde{x} = Px$

In pratica la stima di β si ottiene tramite la stima OLS delle colonne degli scarti

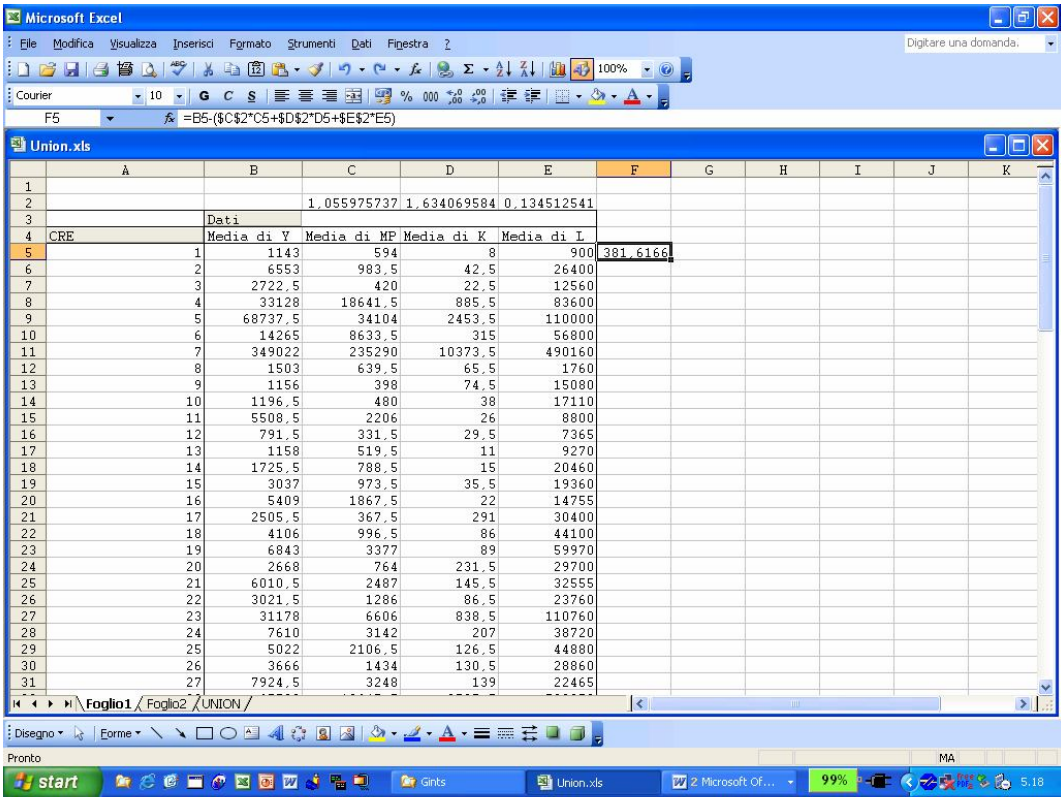


Da cui si ottiene che

$$\hat{\beta}_1 = 1{,}05$$
$$\hat{\beta}_2 = 1{,}63$$
$$\hat{\beta}_3 = 0{,}13$$

Le stime delle intercette della frontiera si ottengono invece usando la relazione

$$\mu_i = \overline{Y}_{it} - (\hat{\beta}_1 * \overline{MP}_{it} + \hat{\beta}_2 * \overline{K}_{it} + \hat{\beta}_3 * \overline{L}_{it})$$



F5 =B5-($C$2*C5+$D$2*D5+$E$2*E5)

Union.xls

	A	B	C	D	E	F
1						
2			1,055975737	1,634069584	0,134512541	
3		Dati				
4	CRE	Media di Y	Media di MP	Media di K	Media di L	
5	1	1143	594	8	900	381,6166
6	2	6553	983,5	42,5	26400	
7	3	2722,5	420	22,5	12560	
8	4	33128	18641,5	885,5	83600	
9	5	68737,5	34104	2453,5	110000	
10	6	14265	8633,5	315	56800	
11	7	349022	235290	10373,5	490160	
12	8	1503	639,5	65,5	1760	
13	9	1156	398	74,5	15080	
14	10	1196,5	480	38	17110	
15	11	5508,5	2206	26	8800	
16	12	791,5	331,5	29,5	7365	
17	13	1158	519,5	11	9270	
18	14	1725,5	788,5	15	20460	
19	15	3037	973,5	35,5	19360	
20	16	5409	1867,5	22	14755	
21	17	2505,5	367,5	291	30400	
22	18	4106	996,5	86	44100	
23	19	6843	3377	89	59970	
24	20	2668	764	231,5	29700	
25	21	6010,5	2487	145,5	32555	
26	22	3021,5	1286	86,5	23760	
27	23	31178	6606	838,5	110760	
28	24	7610	3142	207	38720	
29	25	5022	2106,5	126,5	44880	
30	26	3666	1434	130,5	28860	
31	27	7924,5	3248	139	22465	

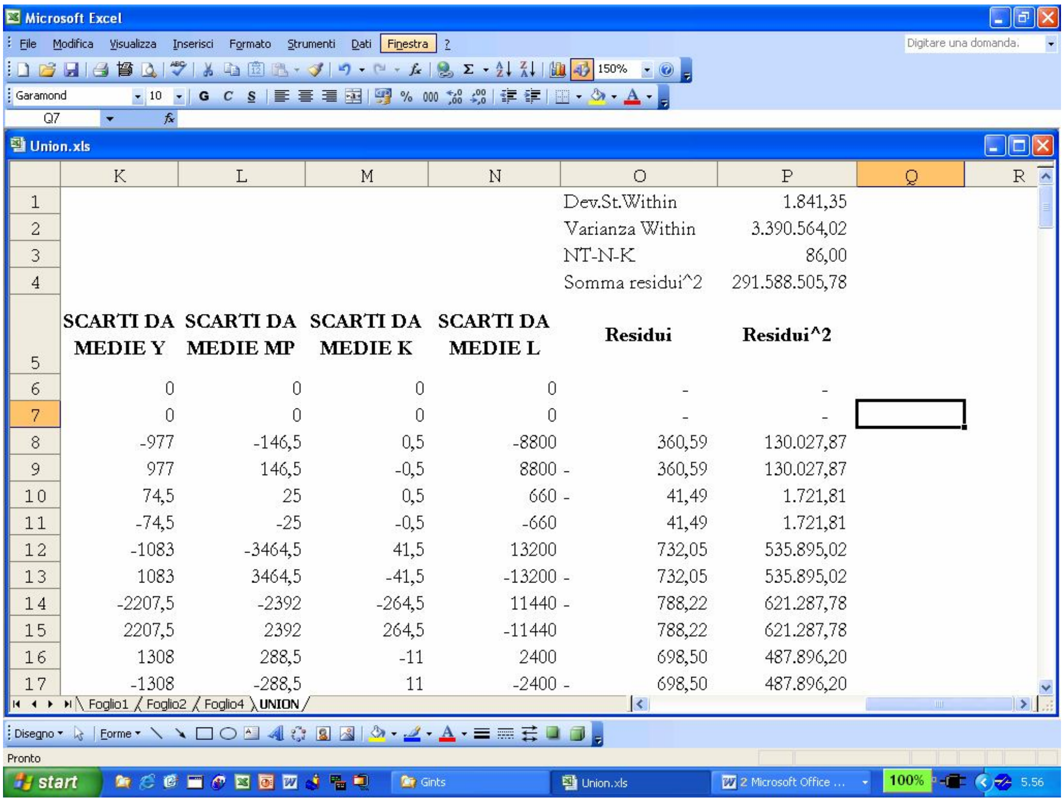
Foglio1 Foglio2 UNION

La stima di σ_v^2 è data da

$$\sigma_v^2 = \frac{\tilde{u}'\tilde{u}}{NT - N - K} = \frac{291.588.505}{86} = 3.390.564$$

Con

$$\tilde{v}_i = \tilde{Y}_{it} - (\hat{\beta}_1 * \tilde{MP}_{it} + \hat{\beta}_2 * \tilde{K}_{it} + \hat{\beta}_3 * \tilde{L}_{it}) = P(Y - \hat{\beta}_1 * MP_{it} + \hat{\beta}_2 * K_{it} + \hat{\beta}_3 * L_{it})$$



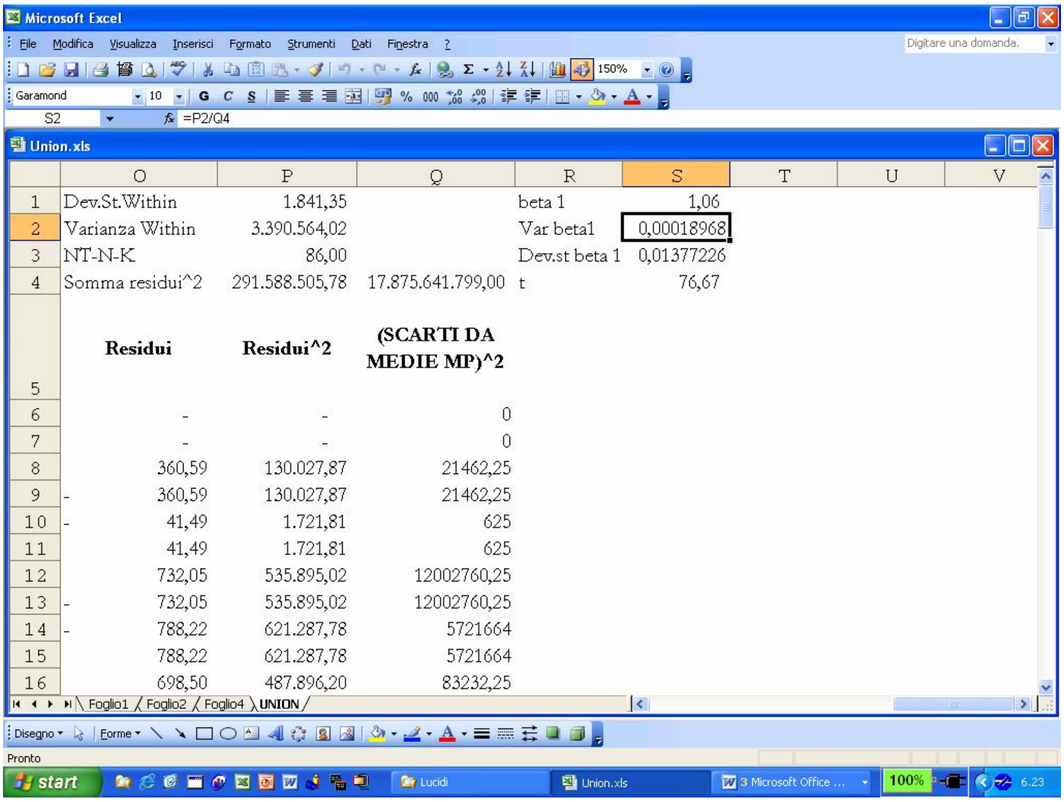
	K	L	M	N	O	P
1					Dev.St.Within	1.841,35
2					Varianza Within	3.390.564,02
3					NT-N-K	86,00
4					Somma residui^2	291.588.505,78
5	**SCARTI DA MEDIE Y**	**SCARTI DA MEDIE MP**	**SCARTI DA MEDIE K**	**SCARTI DA MEDIE L**	**Residui**	**Residui^2**
6	0	0	0	0	-	-
7	0	0	0	0	-	-
8	-977	-146,5	0,5	-8800	360,59	130.027,87
9	977	146,5	-0,5	8800	- 360,59	130.027,87
10	74,5	25	0,5	660	- 41,49	1.721,81
11	-74,5	-25	-0,5	-660	41,49	1.721,81
12	-1083	-3464,5	41,5	13200	732,05	535.895,02
13	1083	3464,5	-41,5	-13200	- 732,05	535.895,02
14	-2207,5	-2392	-264,5	11440	- 788,22	621.287,78
15	2207,5	2392	264,5	-11440	788,22	621.287,78
16	1308	288,5	-11	2400	698,50	487.896,20
17	-1308	-288,5	11	-2400	- 698,50	487.896,20

La matrice di covarianza stimata per i parametri (in questo caso si tratta di uno scalare, in quanto $K=1$) è pari a

$$Var(\hat{\beta}_1) = \sigma_v^2 (x'Px)^{-1} = \frac{3.390.564}{17.875.641.799} = 0{,}00018968$$

da cui si ricava che la deviazione standard è pari a 0,01377 e la relativa statistica *t* di Student è pari a

$$t_{\hat{\beta}_1} = \frac{1{,}06}{0{,}01377} = 76{,}67$$



	O	P	Q	R	S
1	Dev.St.Within	1.841,35		beta 1	1,06
2	Varianza Within	3.390.564,02		Var beta1	0,00018968
3	NT-N-K	86,00		Dev.st beta 1	0,01377226
4	Somma residui^2	291.588.505,78	17.875.641.799,00	t	76,67
5	**Residui**	**Residui^2**	**(SCARTI DA MEDIE MP)^2**		
6	-	-	0		
7	-	-	0		
8	360,59	130.027,87	21462,25		
9	- 360,59	130.027,87	21462,25		
10	- 41,49	1.721,81	625		
11	41,49	1.721,81	625		
12	732,05	535.895,02	12002760,25		
13	- 732,05	535.895,02	12002760,25		
14	- 788,22	621.287,78	5721664		
15	788,22	621.287,78	5721664		
16	698,50	487.896,20	83232,25		

Capitolo 6. Gli Indici di Produttività di Divisia

6.1 Cenni sul progresso tecnico

Per introdurre gli indici di Divisia, è necessario presentare alcune nozioni basilari sul progresso tecnico, che verranno poi sviluppate ne Capitolo 10.
La quarta ed ultima parte della nostra analisi si svolge nell'ambito della misura dell'innovazione e del progresso tecnico.
Dal punto di vista formale ci concentreremo sulla quarta delle relazioni della [6.1].

$$\begin{cases} X_i = f^{-1}(Y_i) \\ Y_i = f(C_j) \\ C_j = f(AMB_z) \\ Y_i = Af(X_i) \\ A = f(t) \end{cases} \qquad [6.1]$$

dove:
Y_i = generico aggregato *output*
X_i = generico aggregato *input*
C_j = tipologia del cliente j
AMB_z = variabili di contesto ambientale
A = indice di progresso ambientale funzione del tempo t

La letteratura economica sul progresso tecnico si è arricchita in questi ultimi anni di un numero considerevole di lavori teorici e di ricerche empiriche.
Gli studi sono stati in prevalenza rivolti sia verso il tentativo di dare una sistemazione teorica del problema dell'inserimento del progresso tecnico in modelli di sviluppo sia verso il tentativo di fornire una misura concreta dell'aumento di produttività imputabile a tale variabile con l'obiettivo di determinare il contributo apportato dal progresso tecnico.

6.1.1 Una premessa sulla definizione e sulla misura del progresso tecnico

La nozione di progresso tecnico non ha un significato univoco nella teoria economica. Sebbene sia sempre accettata come base comune delle varie definizioni di progresso tecnico l'idea di certi mutamenti nel tempo nelle relazioni di grandezza fra le quantità di prodotto ottenuto e le quantità di fattori produttivi impiegati, il termine di progresso tecnico è indifferentemente usato per indicare diverse manifestazioni del fenomeno.
I limiti estremi dove si collocano le varie concezioni di progresso tecnico vanno dalla definizione di progresso tecnico inteso come "residuo"[11] comprendente i vari fattori che, insieme a quantità omogenee di capitale e lavoro, determinano date quantità di prodotto, alla definizione di progresso tecnico inteso come l'introduzione di nuove tecniche capaci di ridurre il costo unitario di produzione.

---

[11] Il termine "residuo" è stato usato da E. Domar come alternativa alle diverse espressioni impiegati dai vari economisti per esprimere lo stesso concetto:l'idea, cioè, di un incremento del prodotto non imputabile all'incremento dei fattori produttivi capitale e lavoro.

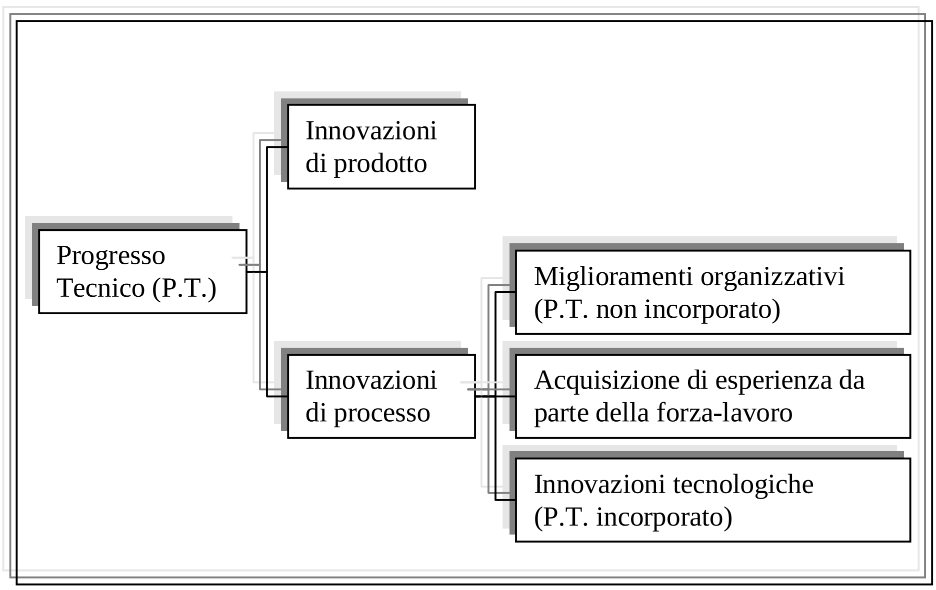
Una prima concezione è quella impiegata in modelli di sviluppo aggregati e costituisce un tentativo di distinguere tra il contributo dovuto all'aumento delle quantità di risorse impiegate e il contributo dovuto al migliore impiego delle risorse stesse.
Una seconda concezione, invece, non è altro che un esempio dei tentativi svolti al fine di isolare i riflessi dovuti al progresso tecnico nel momento in cui una nuova tecnica di produzione viene acquisita dalla singola impresa.
Difficoltà si presentano poi davanti al tentativo di fornire una misura degli effetti del progresso tecnico sulle variabili economiche e delle variazioni nel tempo di tali effetti. Tali difficoltà sono connesse sia alla natura del fenomeno che si cerca di isolare nonché, abbastanza di frequente, alla mancanza di tutti i dati statistici necessari.
I metodi elaborati dalla teoria economica nei vari tentativi di fornire una misura degli effetti economici del progresso tecnico seguono sostanzialmente tre indirizzi:

- il progresso tecnico è misurato in base alle variazioni subite nel tempo dal rapporto tra un indice del prodotto ottenuto e un appropriato indice delle quantità complessive dei fattori produttivi impiegati[12];
- il progresso tecnico è misurato mediante gli spostamenti che subisce nel tempo una funzione di produzione che esprime la relazione fra prodotto e fattori produttivi;
- il progresso tecnico è misurato attraverso una media ponderata delle variazioni relative nel tempo dei coefficienti tecnici di una matrice delle interdipendenze strutturali.

6.1.2 Una classificazione delle innovazioni

A titolo prettamente introduttivo le innovazioni, e le corrispondenti categorie di progresso tecnico, possono essere ordinate nello schema seguente:

Figura 14 – Classificazione del Progresso Tecnico



[12] Questo è il metodo legato al concetto di "produttività" delle risorse.

Le innovazioni di prodotto includono la creazione di beni finali nuovi e qualitativamente diversi. La specificazione "beni finali" è importante in quanto con questo termine ci si vuole riferire ai beni di consumo. Eventuali miglioramenti dei beni di investimento invece si estrinsecano in innovazioni dei processi (produttivi) che impiegano quegli stessi beni di investimento.
In pratica è molto difficile misurare le innovazioni di prodotto, poiché "non si tratta di stimare l'influenza del passaggio del tempo sulla produttività delle risorse, quanto di valutare in quale misura la modificazione qualitativa dei beni abbia contribuito ad aumentare il benessere dei consumatori"[13].
Nel caso delle innovazioni di processo si può affermare che la loro introduzione implica, necessariamente, il risparmio "fisico" almeno di una risorsa; l'innovazione di prodotto, invece, non è necessariamente finalizzata a risparmiare risorse quanto a procurare incrementi di domanda alle imprese produttrici di beni di consumo che hanno bisogno di "crescere". È un dato di fatto che la maggior parte degli studi in materia di progresso tecnico si è concentrata nell'analisi delle innovazioni di processo. Si considerano quindi innovazioni di processo tutti i miglioramenti che si traducono in una crescita della produttività di una o di tutte le risorse impiegate. In altre parole, si può dire che queste innovazioni rappresentano gli adattamenti produttivi capaci di far diminuire l'assorbimento per unità di prodotto, del fattore o dei fattori utilizzati.
All'interno delle innovazioni di processo è possibile distinguere i perfezionamenti della tecnologia degli impianti o dei mezzi impiegati (progresso tecnico incorporato) dalle semplici, ma ugualmente importanti, razionalizzazioni dell'apparato produttivo (progresso tecnico disincorporato). Queste ultime consentono incrementi netti di produttività grazie ad una migliore organizzazione e distribuzione nel tempo delle risorse già impiegate in precedenza. Il Solow, per descrivere il progresso tecnico non incorporato, afferma: "*… è come se…il progresso tecnico fosse qualcosa di simile ad uno studio sui tempi e sui movimenti, un modo cioè soltanto per migliorare l'organizzazione e l'impiego degli inputs senza alcun riferimento alla loro natura…*"[14].
Fra queste due categorie di innovazioni si collocano quegli incrementi di produttività imputabili all'apprendimento per esperienza della forza-lavoro (il c.d. "learning-by-doing). L'intensità di quest'ultimo tipo di progresso, che è concettualmente vicino al progresso tecnico di tipo incorporato, non dipende dal passare del tempo ma semplicemente dall'esperienza acquisita dal produttore.

6.1.3 Produttività totale e produttività parziale dei fattori

Alla base del progresso tecnico vi è, inoltre, un concetto fondamentale: quello di produttività totale e produttività parziale dei fattori.
La produttività viene definita, generalmente, in termini di efficienza come il modo in cui, all'interno di un processo produttivo, gli input si trasformano in output, o meglio come il rapporto tra il risultato dell'attività produttiva e i fattori impiegati per ottenerla. Il concetto di produttività si compone di tre elementi:

- del risultato dell'attività produttiva;
- degli input utilizzati per ottenere la produzione;

[13] G. La Malfa: "*Le innovazioni nella teoria dello sviluppo*", Milano, 1970
[14] R.M. Solow: "*Investment and technical progress*"

- del progresso tecnologico attraverso cui i primi due elementi sono connessi tra loro.

Di norma, della produttività vengono definite le seguenti misure:

- *produttività parziale generica del lavoro* (o *del capitale*), data dal rapporto tra il valore della produzione realizzata in un dato intervallo di tempo e il valore o la quantità del lavoro (o di capitale) impiegato nella produzione;
- *produttività parziale specifica del lavoro* (o *del capitale*), data rapporto fra la quota del valore della produzione che remunera il lavoro (o il capitale) e il valore o la quantità di lavoro (o di capitale) impiegato;
- *produttività globale* o *totale dei fattori*, data dal rapporto fra il valore della produzione e il valore dei fattori impiegati nel processo produttivo.

I primi approcci alla misura della produttività si basarono appunto sul rapporto tra l'output aggregato e la quantità di un singolo input (generalmente il lavoro). I quozienti così ottenuti venivano di solito rapportati ad un anno base, generando indici di produttività aggregata. Questi indici avevano il vantaggio di essere facilmente calcolabili e realizzabili, ma rendevano difficoltoso identificare quei fattori che causavano la crescita di produttività osservata.
Gli incrementi in termini di produttività parziale si può dire che mostrano quindi un finto progresso tecnologico puro dato che fanno passare per progresso tecnico la semplice sostituzione di in input con uno diverso.
Da qui si può concludere che l'uso di misure di produttività totale dei fattori, dove le variazioni dell'output sono associate a variazioni di tutti gli input, fornisce una misura più accurata della crescita di produttività.
L'indice di produttività totale dei fattori consiste, invece, nel rapporto fra due indici separati: uno per gli output e uno per l'input totale. Per quanto riguarda l'output, l'indice relativo può essere sia una misura non ponderata di output omogenei, sia una misura ponderata di output eterogenei aggregati.
Per quanto riguarda la misura dell'input totale, invece, bisognerebbe considerare tutti quegli input che sono utilizzati nelle varie fasi del processo.

6.1.4 Produttività totale dei fattori e progresso tecnico

L'approccio convenzionale della contabilità della crescita si avvale proprio degli indici di produttività totale dei fattori al fine di misurare la crescita degli output che non può essere spiegata da quella degli input.
È per questo che il tasso di crescita di produttività totale dei fattori (PTF) viene definito come il tasso di crescita dell'output aggregato diminuito del tasso di crescita dell'input aggregato.
Concettualmente questo residuo può essere pensato come un tentativo di misurare il grado di avanzamento tecnologico. Nella realtà, però, tale residuo può includere errori di diverso tipo, come errori nella spiegazione della crescita della produzione dovuta ad una crescita nell'uso dei fattori produttivi o errori dovuti a diversi ordini di fattori.
È proprio sull'interpretazione di questo residuo che si sono distinte due "scuole" di pensiero.
Da una parte Denison, Kendrick, Star considerano un'equazione che assume una funzione di produzione lineare omogenea con elasticità di sostituzione costante ed

evidenziano la diversità dei fattori che possono essere racchiusi nella quantità residua, come ad esempio gli effetti di scala o la competitività imperfetta dei mercati.
Dall'altra parte Solow, Jorgenson, Christensen, Griliches, Hulten; Richter, Lau, Diewert considerano come funzione di produzione una funzione di tipo Cobb-Douglas studiata sotto determinate ipotesi di base. Essi identificano nella quantità residua, pari alla produttività totale dei fattori, la causa di una spostamento verso l'alto della funzione di produzione, come succede in caso di presenza di progresso tecnico.
Nella teoria neoclassica, inoltre, alcuni studiosi come Shephard, McFadden, Uzawa, Fuss, Lau hanno sviluppato il modello della funzione di costo considerando la relazione tra costo totale e output, sotto l'ipotesi di minimizzazione dei costi, e sotto il principio di dualità tra la funzione di costo e quella di produzione.
Infine, Diewert, Lau, Vartia hanno lavorato sul problema dell'aggregazione di input e di output dimostrando che ci deve essere una precisa corrispondenza tra il tipo di indice utilizzato per aggregare input e output e la tecnologia determinando così indici "esatti" e indici "superlativi" dotati di determinate caratteristiche.
Analiticamente gli indici di produttività parziale dei fattori sono semplicemente i prodotti medi del lavoro o del capitale, mentre l'indice di produttività totale dei fattori, il cosiddetto "residuo" o "indice del progresso tecnico", è definito come l'output per unità di lavoro e capitale combinati insieme, ovvero

gli indici di produttività parziale :

$$AP_L = \frac{Y}{L} \qquad AP_K = \frac{Y}{K} \qquad [6.2]$$

l'indice di produttività totale dei fattori (PTF):

$$A = \frac{Y}{aL + bK} \qquad [6.3]$$

dove Y, L e K sono rispettivamente il livello aggregato dell'output e degli input lavoro e capitale e, *a* e *b* sono i coefficienti di ponderazione degli input.
Per quanto riguarda le variazioni temporali della produttività totale dei fattori, si può definire il tasso di crescita di TFP come la differenza fra il tasso di crescita dell'output e il tasso di crescita del fattore totale di input:

$$\frac{PTF^{\circ}}{PTF} = \frac{Y^{\circ}}{Y} - \frac{X^{\circ}}{X} \qquad [6.4]$$

dove (°) indica la derivata rispetto al tempo e X è il fattore totale di input.

6.1.5 L'analisi del progresso tecnico attraverso la funzione di produzione

In materia di classificazione, uno dei maggiori esponenti della teoria sul progresso tecnico, Schumpeter, ha dato un contributo rilevante apportando alcune distinzioni fondamentali. La prima è quella tra invenzione e innovazione[15].
Altrettanto importante è distinguere tra progresso tecnico (adattamento totale) e cambiamento tecnico (adattamento parziale).
Nel momento in cui ci si trova di fronte a cambiamenti nel livello di produzione e a variazioni nell'assorbimento degli *input*, Schumpeter consigliava di considerare separatamente l'influenza di un eventuale spostamento lungo la funzione stessa di produzione da quella di uno spostamento ad un'altra funzione di produzione più elevata (progresso tecnico vero e proprio). Questo concetto è denso di implicazioni metodologiche per quanto concerne la misura della variabile "progresso tecnico".
Da quanto detto sopra il concetto di progresso tecnico risulta legato strettamente con quello di funzione di produzione.
Lo strumento "funzione di produzione" è stato ed è tuttora impiegato per rappresentare l'orizzonte tecnologico in un certo momento: la "tecnologia di un sistema economico viene pertanto a coincidere con il complesso di tecniche produttive accessibili al sistema stesso, laddove per tecnica viene inteso non solo il particolare metodo produttivo cui è possibile far ricorso per ottenere il bene o i beni in questione, ma anche il complesso di fattori di tipo organizzativo che delineano il contesto nel quale il processo produttivo può essere condotto e quindi il grado di efficienza di quest'ultimo"[16]. La funzione di produzione non specifica quindi solo le relazioni fra il prodotto ed i diversi mezzi, così come quelle fra fattori al loro interno, ma riflette un certo livello di gestione della combinazione produttiva.
Dire quindi che un punto (x, y) appartiene alla funzione di produzione significa dire che data una quantità *x* di *input* si può ottenere un livello massimo *y* di *output*.
Ogni impresa è dunque caratterizzata da una sua scelta di metodi ritenuti migliori al fine di realizzare una data quantità di prodotto finito con l'impiego di determinati volumi di fattori produttivi. Formalmente ciò vuol dire che se $y \in [0,+\infty]$ è l'ammontare del prodotto e $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ è il vettore dei fattori produttivi, ogni impresa opererà un scelta del tipo $L(y)$, cioè l'insieme dei vettori *x* dai quali si può ottenere almeno il prodotto *y*.
Tale scelta viene effettuata sulla base di criteri che cercano la massimizzazione della quantità ottenuta di prodotto con quantità fisse di fattori disponibili, ovvero la minimizzazione dei costi, dato un livello di produzione.
Inoltre, da quanto detto, risulta chiaro il forte legame che esiste tra il progresso tecnico e le misure statistiche di *performance*.
Se infatti si considerano gli indici di produttività[17], quando si verifica un loro incremento, significa che è cresciuto il rapporto *output/input*, cioè che l'unità economica è riuscita ad ottenere maggiore prodotto con le stesse risorse o lo stesso *output* con minore utilizzo di fattori produttivi.
Un'impresa può, però, aumentare il rapporto *output/input* fino a che non viene raggiunto lo standard ottimale del processo produttivo in esame. Quindi ogni

---

[15] "*l'inventore è un uomo di grande intelligenza, perfino un uomo di genio, ma non necessariamente uno scienziato; l'imprenditore è l'innovatore, l'uomo che comprende le potenzialità di un'innovazione e la attua")*

[16] M. Amendola: *"Macchine, produttività, progresso tecnico"*, Milano, 1976

[17] Sono una misura della capacità di un'impresa di trasformare risorse in prodotti

impresa ha un processo produttivo, un suo *standard* ottimale teorico e un rapporto tra il processo di produzione osservato (Y_0) e quello ottimale (Y) ("grado di efficienza tecnica"):

$$\mathrm{GET} = \frac{Y_0}{Y} \qquad [6.5]$$

dove:
Y_0 è l'output osservato;
$Y=f(x)$ è l'output della funzione di produzione standard di efficienza.

Può accadere che un'impresa ottenga quantità di prodotto minori rispetto alle sue potenzialità, affrontando costi che incidono troppo sulle singole unità dell'*output* e che comportano prezzi di vendita troppo alti rispetto alle medie di mercato. Il recupero di competitività può essere raggiunto cercando di incrementare il livello di produttività del processo, per avvicinarlo allo *standard* di ottimalità. Può invece accadere che un'impresa, non competitiva, sia già al massimo livello di efficienza, quindi l'unica cosa possibile è quella di seguire la strada dell'adeguamento tecnologico – e quindi la ricerca del progresso – per spostare in alto lo *standard* di ottimalità. Il rapporto di produttività *output/input* potrà quindi tornare ad aumentare e l'impresa sarà nuovamente competitiva.
In definitiva si può dire che l'effetto di un' innovazione di processo è un aumento del prodotto ottenibile da un certo stock di risorse. Questo incremento è possibile in diverse maniere:

- introduzione di una nuova tecnologia risparmiatrice di risorse che non era conosciuta in precedenza;
- adozione, da parte dell'impresa, di una tecnica già nota ma non impiegata in precedenza;
- maggiore diffusione, all'interno dell'impresa oggetto di analisi, di una tecnologia già nota ma impiegata solo da alcune imprese.

Il risultato dei tre casi previsti è sempre e comunque un incremento di produttività dei fattori; solo il primo però è un adattamento totale e solo esso può essere correttamente interpretato con la trasposizione della funzione di produzione. I due rimanenti (b. e c.) sono dei cambiamenti tecnici che si risolvono o in un movimento lungo la funzione o in un' ulteriore precisazione delle possibilità produttive.
La funzione di produzione può mantenere una sua "coerenza" interpretativa se le si impongono alcune condizioni, abbastanza restrittive:

- in primo luogo bisogna accertare che la natura e l'intensità del progresso tecnico non siano influenzate da eventuali variazioni nell'impiego dei fattori. In altre parole ogni spostamento lungo la funzione, pur implicando diverse combinazioni di fattori, non presuppone un mutamento delle conoscenze tecnologiche né richiede maggiore capacità organizzativa;
- ogni funzione di produzione individuata viene definita dai punti cui corrisponde la massima produttività della combinazione tecnologica considerata;

- tutte le unità produttive adottano la funzione di produzione individuata per l'aggregato cui si fa riferimento.

Il progresso tecnico che si configura su queste restrizioni assume caratteristiche assai particolari.
Innanzitutto combinazioni diverse dei fattori non vengono considerate un sintomo di progresso tecnico; quest'ultimo si estrinseca solo nel mutare, col tempo, dei metodi di organizzazione della produzione. Così, ad esempio, quando si studiano dei dati storici, si presume che in ogni anno del periodo fossero disponibili tutte le combinazioni tecnologiche mostrate dalla funzione di produzione. L'unica componente dinamica è il tempo che, con il suo fluire, rende via via disponibili conoscenze organizzative crescenti che consentono un incremento nel prodotto ottenibile dal medesimo stock di risorse. La funzione di produzione quindi, deve essere messa in relazione con la variabile tempo (t) che permette alla funzione stessa di slittare in alto garantendo una crescente produttività alla medesima combinazione tecnica.
In forma estremamente sintetica, la funzione di produzione assume la seguente forma:

$$Y = F(L, K, t) \qquad [6.6]$$

dove:

L è la risorsa lavoro;
K è la risorsa capitale e
t è il tempo.

La misura del progresso tecnico dipende perciò dall'intensità con cui, al passare del tempo, aumenta la produttività "globale" delle risorse; la natura delle innovazioni è invece condizionata da come variano le produttività "parziali" delle risorse stesse.

6.2 Gli indici di Divisia

L'indice di Divisia (1925) ha ricevuto un'attenzione sempre maggiore nella teoria della produttività in quanto, godendo di numerose proprietà formali e basandosi sull'ipotesi che i prezzi e le quantità sono funzioni continue del tempo, è riconosciuto come uno dei più adatti a seguire lo sviluppo temporale di un aggregato economico grazie alla sua flessibilità nell'adattarsi ai cambiamenti della struttura del mercato tra un periodo ed il successivo (Jorgenson, Christensen).
Con Indici di Divisia si intendono quei numeri indice tali che il tasso di crescita di una quantità è uguale ad una media ponderata dei tassi di crescita delle quantità componenti, con pesi dati dal valore relativo di ogni componente sul valore totale.
Se

$$\left[x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)\right] \qquad [6.7]$$

è un insieme di osservazioni relative ad una certa grandezza che devono essere aggregate mediante il vettore dei relativi pesi

$$\left[p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)\right] \qquad [6.8]$$

Se indichiamo con D(t) un generico indice si ha:

$$\frac{\overset{\circ}{D}(t)}{D(t)} = \sum \frac{p_i(t)x_j(t)}{\sum p_i(t)x_i(t)} * \frac{\overset{\circ}{x}_j(t)}{x_j(t)} \qquad [6.9]$$

integrando ambo i membri rispetto al tempo nell'intervallo (0,T) si ottiene:

$$\ln \frac{D(t)}{D(0)} = \int_0^T \sum \frac{p_i(t)x_j(t)}{\sum p_i(t)x_i(t)} * \frac{\overset{\circ}{x}_j(t)}{x_j(t)} dt \qquad [6.10]$$

da cui:

$$D(t) = D(0) \exp \int_0^T \sum \frac{p_i(t)x_j(t)}{\sum p_i(t)x_i(t)} * \frac{\overset{\circ}{x}_j(t)}{x_j(t)} dt \qquad [6.11]$$

Questa relazione rappresenta l'Indice di Divisia nella sua forma continua.

6.3 L'approccio alla misura della produttività mediante gli indici di Divisia

Se indichiamo con $x(t) = \left[x_{1(t)}, x_{2(t)}, \ldots, x_{n(t)}\right]$ il vettore degli *input* e con $p(t) = \left[p_{1(t)}, p_{2(t)}, \ldots p_{n(t)}\right]$ il corrispondente vettore dei prezzi al tempo t, possiamo differenziare rispetto al tempo la seguente funzione di produzione

$$y(t) = A(t) f\left[x(t)\right] \qquad [6.12]$$

dove A(t) è il fattore moltiplicativo di spostamento verso l'alto della funzione in conseguenza del progresso tecnologico.
Dividendo per l'*output* unico y(t), si ottiene la seguente espressione del tasso di crescita di PTF

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = \frac{dy(t)}{y(t)} - \sum s_i(t) \frac{dx_i(t)}{x_i(t)} \qquad [6.13]$$

dove, essendo il coefficiente di ponderazione

$$s_i(t) = \frac{p_i(t)x_i(t)}{y(t)} \quad [6.14]$$

è possibile riconoscere nel termine

$$\sum s_i(t) = \frac{dx_i(t)}{x_i(t)} \quad [6.15]$$

l'indice di Divisia del fattore *input* totale.

Il fatto che l'indice di Divisia di PTF sia considerato il più appropriato per misurare la crescita degli aggregati economici viene giustificato dall'asserzione che esso è l'unico a soddisfare numerose proprietà formali.

6.4 Proprietà dell'indice di Divisia

Stabilire se l'indice di Divisia gode di proprietà formali fondamentali come l'invarianza, l'indipendenza o la proporzionalità, significa verificare rispettivamente :

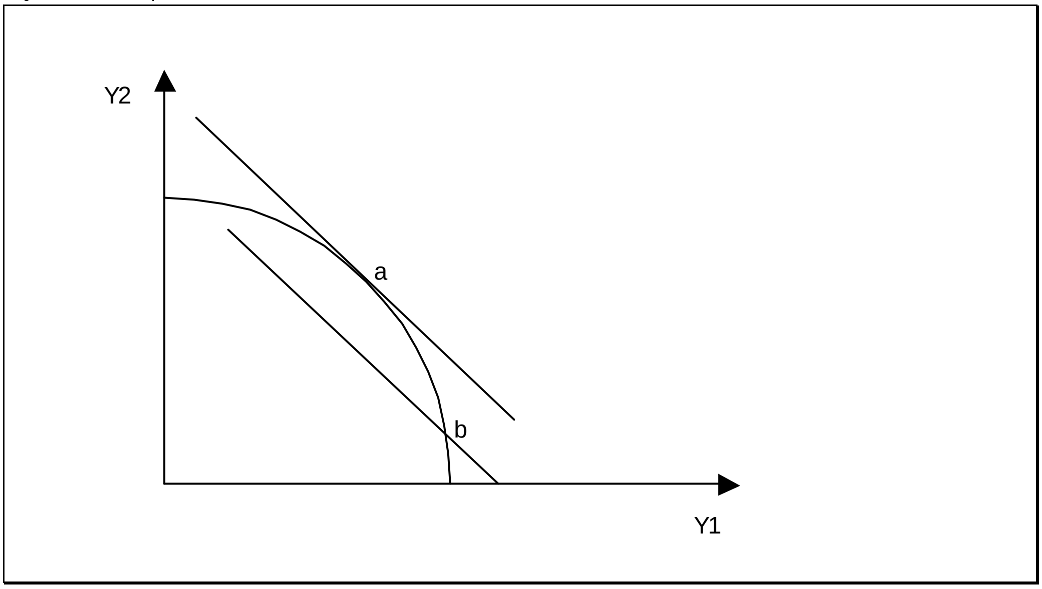
se il valore dell'indice non varia quando gli input vengono impiegati secondo una stessa invariata tecnologia produttiva (il percorso degli input giace interamente lungo un determinato isoquanto) o quando uno spostamento lungo l'isoquanto determina solo un cambiamento nel mix dell'output totale;
se il valore dell'indice non dipende dal percorso del vettore degli input o dal percorso del vettore degli output in uno stesso intervallo [0;T];
se il valore dell'indice cresce o decresce nella stessa proporzione in cui aumenta o diminuisce il vettore degli input o il vettore degli output.

6.5 Proprietà dell'invarianza e della proporzionalità

In base alla proprietà di <u>invarianza</u> è possibile affermare se un indice, che misura le variazioni di un determinato fenomeno, varia solamente se il fenomeno è effettivamente variato. A questa proprietà è stato anche attribuito il nome di accuratezza o di precisione.
Si può dimostrare che in condizioni di perfetta competitività dei mercati e di assenza di esternalità tecnologiche l'indice di Divisia per il prodotto è l'unico che soddisfa una serie di assiomi. Se per un indice di *output* essere invariante significa non variare quando l'*output* si sposta lungo una data curva di trasformazione in presenza di una tecnologia a *input* fissi nel periodo (t, t+1), per un indice di *input* essere invariante significa non variare quando l'*input* si sposta lungo un dato isoquanto in presenza di una tecnologia che produce una quantità fissa di *output*. Affinché l'indice di Divisia soddisfi gli assiomi sopra, sono richiesti rendimenti di scala costanti.

Da un punto di vista grafico questo può essere rappresentato nel modo seguente:

Figura 19 – Proprietà dell'invarianza dell'indice di Divisia



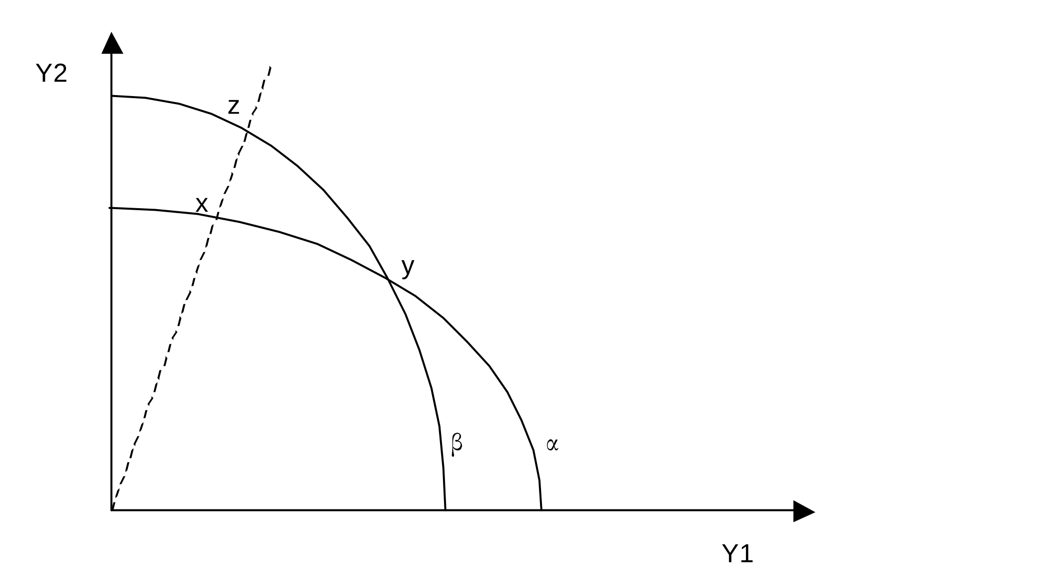
Supponiamo che un'unità economica al tempo *t* presenti un'economia ad impiego fisso di input produttivi che produce due tipi di output, Y_1 e Y_2.
Se nel periodo *t* l'economia è al punto *a*, e se tra i periodi *t* e *t+1* l'economia si sposta lungo la curva di trasformazione dal punto *a* al punto *b*, si verifica solo una variazione nel mix dei due output e pertanto l'indice di output non dovrebbe variare.

Per quanto riguarda la proprietà di proporzionalità, quando tutti gli output crescono nella stessa proporzione *k* mentre tutti gli input rimangono costanti, allora anche la produttività aumenta della stessa quantità *k*; analogamente nel caso opposto, quando tutti gli input crescono nella stessa proporzione *k* mentre tutti gli output rimangono costanti, allora la produttività diminuisce al coefficiente di proporzionalità *k*.

6.6 Proprietà dell'indipendenza

L'inconveniente fondamentale legato all'uso dell'indice di Divisia è dovuto alla possibilità che più valori indice possono essere associati ad un dato punto; ciò dipende direttamente dalla natura di linee integrali di tali indici.
Ciò vuol dire che per essere indipendente un indice di *input* o di *output* deve dipendere dal livello di *input* o di *output* raggiunto al tempo *t* e non dal percorso storico compiuto fino a *t* dall'*input* o dall'*output* con il quale tale livello è raggiunto.
Prendiamo in esame, facendo riferimento alla seguente figura, un'economia che produce due tipi di *output*.

Figura 20 – Proprietà dell'indipendenza dell'indice di Divisia



Inizialmente, con una dotazione fissa di *input* siamo sulla curva di trasformazione di *output* α al punto *x*.
Poniamo che, senza variazioni negli *input*, il mix di *output* cambi gradualmente nel tempo e si sposti lungo la stessa curva da *x* a *y*: per l'assioma di invarianza, l'indice di output di Divisia di *y* non cambia rispetto a quello di *x*. Ora, rimanga il mix di *output* al punto *y* mentre gli *input* variano gradualmente in modo tale che la curva α si sposti e assuma la posizione β.
Lungo tutto questo spostamento non si verificano variazioni nell'indice di *output* di *y* per la proprietà dell'invarianza, dato che le quantità di *output* rimangono invariate.
Dopo che la variazione degli *input* si è conclusa, spostiamoci lungo la curva β dal punto *y* al punto *z*.
Di nuovo, l'assioma di invarianza garantisce l'assenza di variazioni nell'indice di *output* di *z* rispetto a quello di *y*. Infine consideriamo uno spostamento in linea retta, nell'ambito di una certa tecnologia a sé stante, da *z* a *x*: per l'assioma di proporzionalità, essendoci una diminuzione di *output* causata da una diminuzione di *input*, si verifica anche un calo nell'indice di *output* di *x* rispetto a quello di *z*.
Siamo quindi ritornati al punto di partenza, avendo percorso il ciclo x-y-z-y, con gli stessi output, ma con un indice di output più basso.
Ciò dimostra, appunto, che è il percorso degli output e degli input a determinare la variazione nell'indice di output di Divisia e non solo il suo livello finale.

6.7 Le approssimazioni discrete dell'indice di Divisia

I dati relativi a variabili economiche sono notoriamente non continui; nasce così la necessità di ottenere un'approssimazione nel dominio discreto dell'Indice di Divisia.
I problemi da risolvere per approssimare la formula di Divisia sono di tre ordini:

1. la simulazione della natura continua dell'indice;

2. l'approssimazione delle derivate dei logaritmi delle funzioni di prezzo;
3. la scelta dei pesi, che nella formula di Divisia variano in modo continuo rispetto al tempo.

Il primo problema è stato risolto dai diversi autori costruendo degli indici a catena; al contrario al secondo e al terzo problema sono state date soluzioni di diverso tipo.
La formula che fino agli ultimi anni è stata ritenuta la migliore approssimazione nel discreto della formula di Divisia è quella elaborata da *Tornquist* nel 1936.
La formula di Tornquist per le quantità è la seguente:

$$\log\left(\frac{PTF_t}{PTF_{t-1}}\right) = \log\left(\frac{Q_t}{Q_{t-1}}\right) - \log\left(\frac{F_t}{F_{t-1}}\right) \quad [6.16]$$

dove:

$$\log\left(\frac{F_t}{F_{t-1}}\right) = \frac{1}{2}\sum\left[\left(S_{it} + S_{it-1}\right)\log\left(\frac{X_t}{X_{it-1}}\right)\right] \quad [6.17]$$

in essa *t* e *t-1* sono due periodi di tempo adiacenti, X_i indica la quantità del fattore i-esimo al tempo *t* e S_{it} rappresenta la quota sul costo totale del fattore X_i.

Mentre l'altra approssimazione per l'indice di Divisia delle quantità è quella di **Sato-Vartia**:

$$\log\left(\frac{PTF_t}{PTF_{t-1}}\right) = \log\left(\frac{Q_t}{Q_{t-1}}\right) - \log\left(\frac{F_t}{F_{t-1}}\right) \quad [6.18]$$

dove:

$$\log\left(\frac{F_t}{F_{t-1}}\right) = \frac{1}{2}\sum\left[\left(\frac{S_{it} - S_{it-1}}{\log S_{it} - \log S_{it-1}}\right)\log\left(\frac{X_t}{X_{it-1}}\right)\right] \quad [6.19]$$

Martini, nel riesame della formula di Divisia ha elaborato un interessante criterio per la scelta della migliore approssimazione discreta della formula stessa. Egli ha verificato la "velocità" con la quale le approssimazioni tendono alla formula alla formula continua al tendere a 0 dell'intervallo temporale.
In particolare l'eventuale differente velocità con la quale le varie formule approssimano i valori assunti dalla funzione di Divisia al decrescere dell'intervallo temporale Δt, dipende dalla diversa rapidità con la quale i pesi tendono alla corrispondente funzione continua
Il confronto tra le due approssimazioni evidenzia che la loro differenza consiste sostanzialmente nel diverso sistema di pesi utilizzati. Martini dimostra appunto che la formula di Sato-Vartia è la più veloce poiché il sistema di pesi

$$(\frac{S_{it} - S_{it-1}}{\log S_{it} - \log S_{it-1}}) \qquad [6.20]$$

tende alla funzione continua più velocemente rispetto al sistema di pesi della formula di Tornquist e di ogni altro indice a catena proposto per approssimare la formula di Divisia.

6.8 Conclusioni

Da quanto detto sopra, si può concludere che l'indice di Divisia è realmente un indice "ottimale" per effettuare confronti di lungo periodo, oppure confronti in situazioni di cambiamenti molto veloci nella struttura economica di un mercato.
Tuttavia, data la sua inapplicabilità pratica, esso resta un indice "ideale", per il quale risulta indispensabile trovare approssimazioni discrete.
Resta di fatto che l''indice di Sato-Vartia è la formula che approssima più velocemente l'indice di Divisia, e inoltre soddisfa tutte le proprietà assiomatiche e desiderate.
È pertanto la miglior approssimazione possibile per Divisia, anche se di interpretazione economica più difficile rispetto all'approssimazione di Tornquist.

Tav. 1 – Dimostrazione dell'approssimazione nel discreto dell'Indice di Divisia

Dimostrazione

Indichiamo con P(x,y) la famiglia degli indici a catena. Il logaritmo dell'indice a catena tra l'istante T e l'istante 0 assume la forma:

$$\log P_T^*(x,y) = \sum_t \sum_h \log p_{t+1,h}\, \phi_h(x,y) \Big/ \sum\nolimits_h \phi_h(x,y)$$

dove (t=1,…,T), (h=1,…,n), *p* è il prezzo e

$$\Phi_h(x,y) = \frac{w_{t+1,x} - w_{t,y}}{\log w_{t+1,x} - \log w_{t,y}}$$

Indicando con Δt l'intervallo temporale scelto per il calcolo dell'indice, il logaritmo dell'indice stesso diventa:

$$\log P_T^*(x,y) = \sum_t \sum_h [\log p_{t+\Delta t,h} - \log p_{t,h}\, \phi_h(x,y)] \Big/ \sum\nolimits_h \phi_h(x,y)$$

dove i pesi sono ora definiti come:

$$\Phi_h(x,y) = \frac{w_{t+\Delta t,x} - w_{t,y}}{\log w_{t+\Delta t,x} - \log w_{t,y}}$$

Se si suppone che i prezzi p_{th} possono essere considerati come funzioni continue del tempo, derivabili e con derivata prima diversa da zero, allora il rapporto incrementale del logaritmo della h-esima funzione di prezzo, al tendere a zero dell'incremento temporale Δt, è dato da:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\log p(t+\Delta t) - \log p(t)]}{\Delta t} = \frac{d[\log p(t)]}{dt} = [\log p(t)]'$$

dove dt è il differenziale della variabile tempo.

Considerando anche le quantità scambiate q(t) come funzioni continue del tempo, si possono calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{\Delta t \to 0} w(t+\Delta t, x) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{p(t+\Delta t) q^x (t+\Delta t) q^{1-x}(t)}{\sum p(t+\Delta t) q^x (t+\Delta t) q^{1-x}(t)} \right] = \frac{p(t)q(t)}{\sum p(t)q(t)} = w(t)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} w(t, y) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{p(t) q^y (t+\Delta t) q^{1-y}(t)}{\sum p(t) q^y (t+\Delta t) q^{1-y}(t)} \right] = \frac{p(t)q(t)}{\sum p(t)q(t)} = w(t)$$

Sapendo che

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{w(t+\Delta t) - w(t)}{\log w(t+\Delta t) - \log w(t)} \right] = w(t)$$

si può concludere che il limite dell’indice a catena P(x,y), al tendere a 0 dell’intervallo temporale t, è:

$$\lim_{\Delta t \to 0} P(x,y) = \exp \int_0^T \sum_h \log[p(t)]' w(t)dt$$

Quanto sopra non è altro che la forma dell’indice proposto da Divisia per misurare le variazioni dei prezzi. In modo analogo so ottiene l’indice per la misurazione delle variazioni delle quantità prodotte.

L’approssimazione nel discreto dell’indice di Divisia, proposta da Tornquist, sulla base di quanto detto sopra, risulta:

$$T = \sum_h \log p_{t+1} \overline{w}_t$$

dove i pesi sono dati:

$\overline{w}_t = \frac{1}{2}(w_t + w_{t+1})$ Mentre quella proposta da Sato-Vartia è:

$$V = \sum_h \log p_{t+1} \Phi_h$$

dove i pesi sono costituiti da:

$$\Phi_h = \frac{v_{tt} - v_{bb}}{\log v_{tt} - \log v_{bb}} / \frac{\sum v_{tt} - \sum v_{bb}}{\log \sum v_{tt} - \log \sum v_{bb}}$$

A questo punto, per determinare la migliore approssimazione nel discreto della formula di Divisia, il criterio più opportuno, dimostrato dal Martini, è quello di vedere con quale “velocità”, le due formule di Tornquist e Sato-Vartia, tendono alla formula continua, al tendere a zero dell’intervallo temporale.
A partire dalla definizione di differenziale di una funzione, gli incrementi

$\Delta w(t + \Delta t)$ e $\Delta \log w(t)$ possono essere scritti:

$$w(t + \Delta t) - w(t) = dw(t) + \varepsilon_1 \Delta t$$

e

$$\log w(t + \Delta t) - \log w(t) = d \log w(t) + \varepsilon_2 \Delta t$$

dove ε_1 e ε_2 rappresentano le differenze tra il rapporto incrementale e le derivate prime rispetto al tempo, delle funzioni $w(t)$ e $\log w(t)$ ossia:

$$\varepsilon_1 = \frac{w(t + \Delta t) - w(t)}{\Delta t} - w'(t)$$

Tav. 1 – Dimostrazione dell'approssimazione nel discreto dell'indice di Divisia (continua)

e

$$\varepsilon_2 = \frac{\log w(t+\Delta t) - \log w(t)}{\Delta t} - [\log w(t)]'$$

Calcolando il limite per $\Delta t \to 0$ delle due quantità sopra si ha:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_2 = 0$$

e, inoltre, poiché risulta:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon_1 \Delta t}{\Delta t} = 0 \quad \text{e} \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon_2 \Delta t}{\Delta t} = 0$$

si può concludere che le quantità $\varepsilon_1 \Delta t$ e $\varepsilon_2 \Delta t$ sono infinitesimi di ordine superiore a Δt .

Visto questo si può calcolare il limite per $\Delta t \to 0$ dei pesi $\Phi(1,0)$ della formula di Sato-Vartia:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Phi(1,0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{dw(t) + \varepsilon_1 \Delta t}{d \log w(t) + \varepsilon_2 \Delta t} = \frac{dw(t)}{dw(t)} w(t) = w(t)$$

Poiché tale limite dipende solo dagli infinitesimi $\varepsilon_1 \Delta t$ e $\varepsilon_2 \Delta t$, che sono di origine superiore a Δt , i pesi sopra considerati sono quelli che tendono a w(t) in modo più veloce rispetto ai pesi delle altre formule appartenenti alla famiglia P(x,y).