Statistica per l'Economia e l'Impresa [Prof. Gianni Betti]

Analisi delle Serie Storiche – Approccio Classico e Trend

Federico Bacchi

Dipartimento di Economia Politica e Statistica (DEPS)
Università degli Studi di Siena

4 maggio 2026

Contenuti

Contenuti

Dati Econometrici

I **dati econometrici** sono insiemi di osservazioni quantitative utilizzate per stimare, testare e validare *modelli economici* attraverso *metodi statistici*.

Si distinguono tre categorie principali:

1. i **dati sezionali** (o **cross-sectional data**) si riferiscono all'osservazione di più unità statistiche in un unico istante temporale;
2. le **serie storiche** (o **time series data**) si riferiscono all'osservazione di un'unica unità statistica in più istanti temporali;
3. i **dati longitudinali** (o **panel data**) si riferiscono all'osservazione di più unità statistiche in più istanti temporali.

In questa lezione e nelle successive studieremo alcune delle principali tecniche di **analisi delle serie storiche**.

Modello Stocastico Generale

Si supponga di voler descrivere il **processo generatore** dei dati di una **serie storica** $y_1, \ldots, y_n$, relativa a una variabile Y_t.

Un modello stocastico generale è:

$$Y_t = f(t) + u_t \tag{1}$$

- $f(t)$: componente **deterministica** (parte sistematica)
- u_t: componente **stocastica** (variabile casuale)

Le due componenti *non* sono *osservabili separatamente* e devono essere stimate dal **campione**.

Approccio Classico

Il modello (1) può essere studiato con la lente dell'**approccio classico**.

Assunzioni

1. Esiste una **legge di evoluzione temporale** del fenomeno, rappresentata da $f(t)$.
2. La componente casuale u_t rappresenta **circostanze accidentali** di entità trascurabile.
3. I residui sono imputati al caso e assimilati a **errori accidentali**.

Conseguenze

1. La procedura di **stima** si concentra sulla parte deterministica $f(t)$.
2. La parte stocastica u_t è generata da un processo **white noise**: le variabili casuali $u_1, \ldots, u_n$ sono i.i.d. con

$$\mathrm{E}[u_t] = 0, \quad t = 1, \ldots, n;$$
$$\mathrm{Var}[u_t] = \sigma_u^2, \quad t = 1, \ldots, n.$$

Approccio Moderno

In alternativa, il modello (1) può essere studiato con la lente dell'**approccio moderno**.

Assunzioni

1. La parte deterministica $f(t)$ è assente o già *eliminata*.
2. La componente stocastica u_t *non* è dovuta a circostanze accidentali.

Conseguenze

1. La parte stocastica u_t è modellata secondo un **processo a componenti correlate**:
$$u_t = g(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots) + \varepsilon_t,$$
dove ε_{t-k} sono **shock passati** non osservabili ma concettualmente presenti nel modello.
2. Necessità di tecniche statistiche avanzate (AR, MA, ARMA, ecc.).

Obiettivi

Indipendentemente dall'approccio adottato, l'utilità dell'analisi delle serie storiche risiede nella possibilità di rispondere a diversi **obiettivi** e **bisogni conoscitivi**.

1. **Descrizione**: identificare pattern, trend, stagionalità e irregolarità nei dati osservati.
2. **Spiegazione**: comprendere i meccanismi che generano la serie e le relazioni dinamiche sottostanti.
3. **Previsione**: stimare valori futuri sulla base dell'evoluzione passata e del modello adottato.
4. **Filtraggio**: isolare componenti specifiche (trend, ciclo, stagionalità, rumore) per analisi mirate.
5. **Controllo**: monitorare il processo nel tempo per individuare anomalie o cambiamenti strutturali.

Contenuti

Modelli di Composizione

Supponendo di voler adottare l'**approccio classico**, una delle tecniche più utilizzate per analizzare le serie storiche è quella di **modelli di composizione**.

La serie osservata viene rappresentata come combinazione di **componenti strutturali** che vengono trattate come entità **separabili**.

Obiettivi

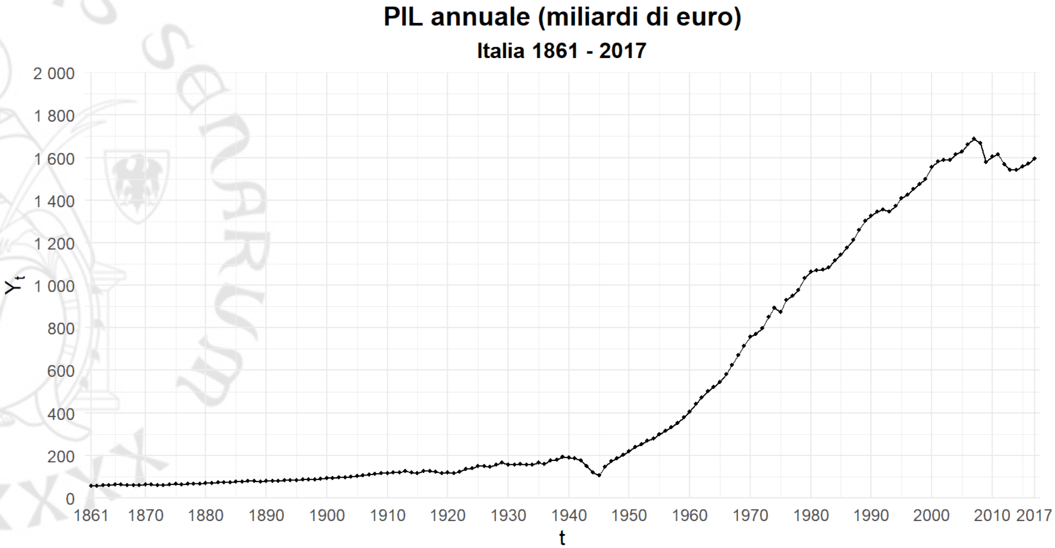
1. **Scomporre** la serie nelle componenti strutturali.
2. **Stimare** le componenti strutturali con **tecniche deterministiche**.

I modelli di composizione forniscono una **lettura descrittiva** e **interpretativa** della struttura della serie.

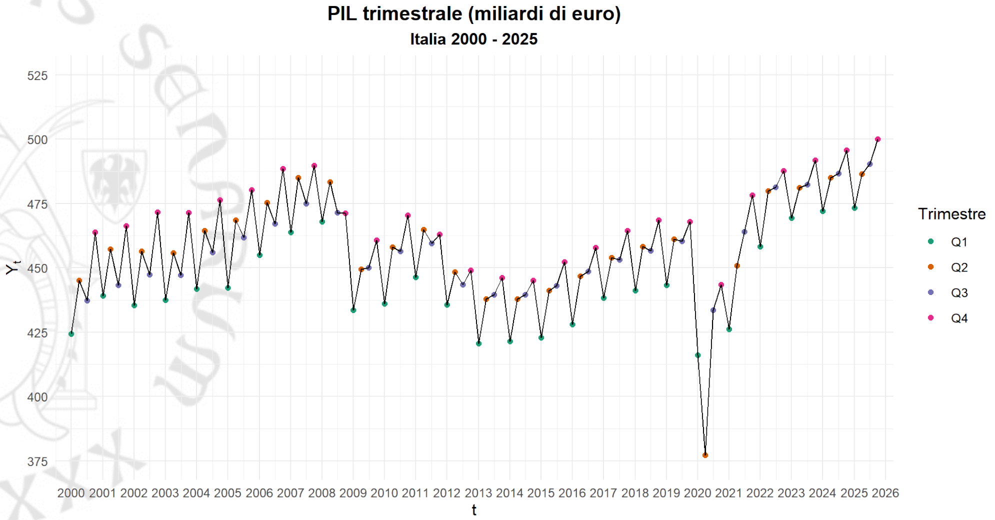
Componenti

1. **Trend** (T_t): tendenza di fondo del fenomeno oggetto di studio, riferita a un lungo periodo di tempo.
   - Crescita di lungo periodo del PIL italiano (3% annuo).
2. **Ciclo** (C_t): fluttuazioni attribuibili al succedersi nel fenomeno considerato di *fasi ascendenti* e di *fasi discendenti*.
   - Crescita del PIL italiano caratterizzata da fasi di espansione (per esempio, il miracolo economico) e fasi di recessione (per esempio, crisi del debito sovrano).
3. **Stagionalità** (S_t): movimenti del fenomeno nel corso dell'anno che, per effetto dell'influenza di fattori climatici e sociali, tendono a ripetersi in maniera pressoché analoga nel medesimo periodo.
   - PIL italiano: tutte le grandi fabbriche sono chiuse nel mese di agosto.
4. **Componente accidentale** (a_t): tiene conto del fatto che non c'è mai una relazione perfetta tra la variabile sotto osservazione e le diverse componenti e del comportamento non perfettamente prevedibile degli agenti economici.

PIL Italiano



PIL Italiano



Tipi di Composizione

I modelli di composizione possono essere distinti in base al **tipo di composizione** che viene assunta tra le diverse componenti.

1. **Composizione Additiva**
   - **Ipotesi**: le componenti sono tra loro indipendenti.
   - **Equazione**: $Z_t = T_t + C_t + S_t + a_t$
2. **Composizione Moltiplicativa**
   - **Ipotesi**: le componenti non sono tra loro indipendenti.
   - **Equazione**: $Z_t = T_t \times C_t \times S_t \times a_t$
   - Si riduce al caso di composizione additiva considerando i logaritmi:

$$Z_t = T_t \times C_t \times S_t \times a_t \quad \Rightarrow \quad \log Z_t = \log T_t + \log C_t + \log S_t + \log a_t$$

3. **Composizione Mista**
   - **Ipotesi**: coesistenza di componenti indipendenti e non indipendenti.
   - **Equazione**: $Z_t = T_t \times S_t + C_t + a_t$

Modelli di Composizione e Modello Stocastico Generale

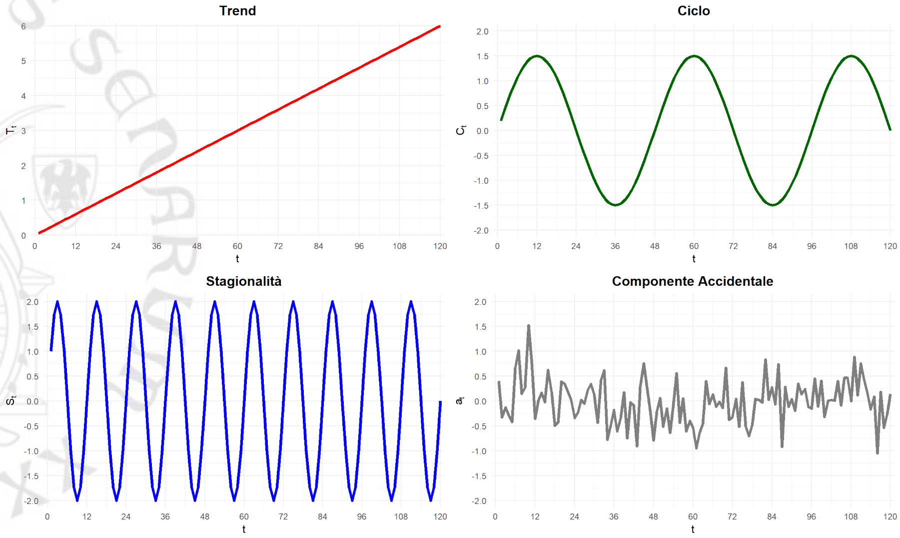
Si noti come sia stato introdotto un **cambio di notazione**: la variabile oggetto di studio è stata indicata nei modelli di composizione con Z_t.

Alla base di questa scelta, apparentemente stilistica, c'è una **motivazione formale**:

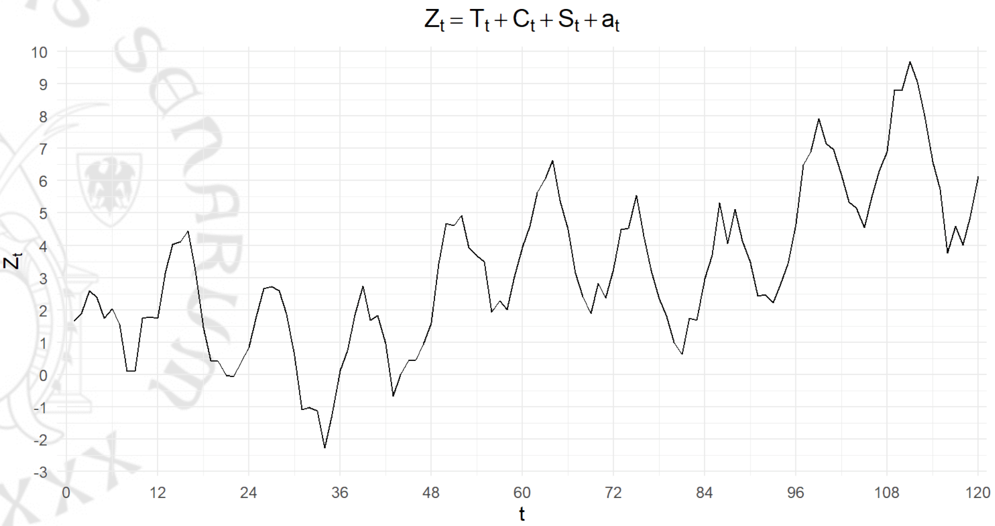
- Y_t viene utilizzata nel modello stocastico generale ed è definita come la somma di una **componente deterministica** $f(t)$ e una **componente stocastica** u_t;
- Z_t viene utilizzata nei modelli di composizione ed è definita come combinazione di **componenti strutturali di natura deterministica** (T_t, C_t, S_t, a_t).

In sintesi, l'utilizzo di Z_t deriva dalla volontà di rendere esplicito che *non* si sta considerando una vera e propria componente stocastica.

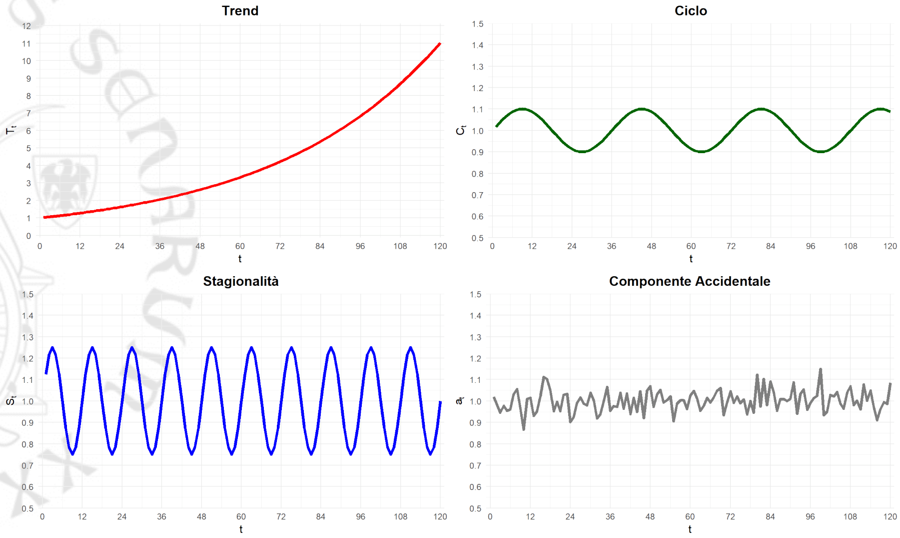
Serie (mensile) a componenti additive: Esempio



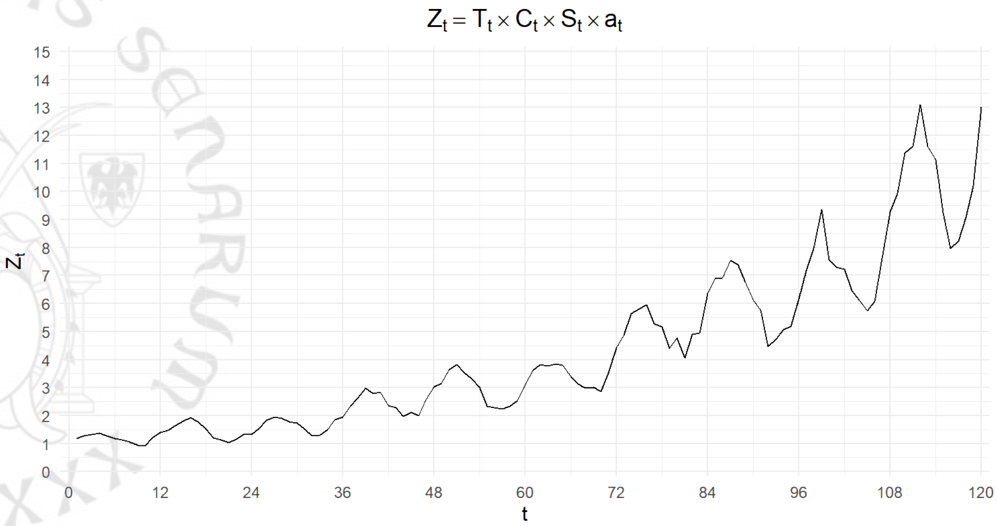
Serie (mensile) a componenti additive: Esempio



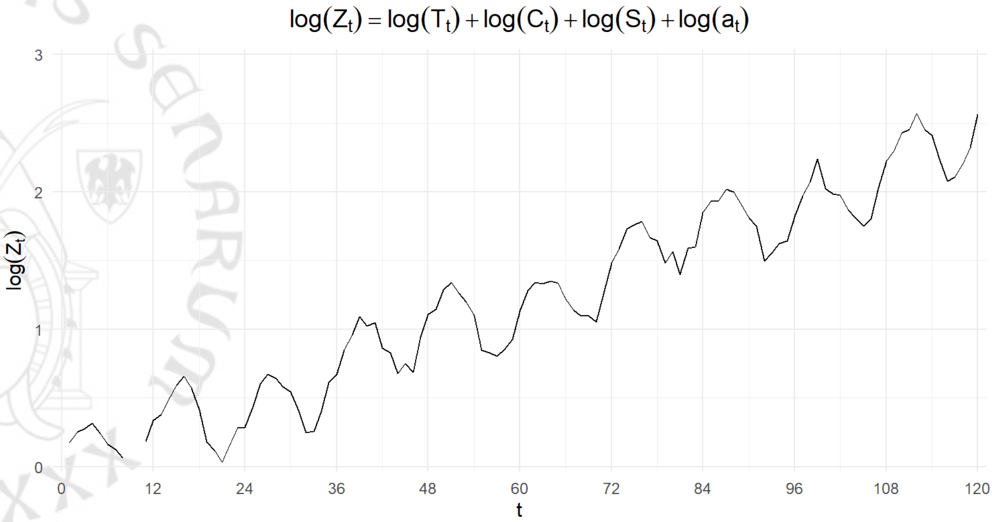
Serie (mensile) a componenti moltiplicative: Esempio



Serie (mensile) a componenti moltiplicative: Esempio



Serie (mensile) a componenti moltiplicative: Esempio



Pregi e difetti del Modello di Composizione

Pregi

- **Semplicità**: struttura intuitiva e facilmente interpretabile.
- **Applicabile anche a serie corte**: non richiede grandi quantità di dati.
- **Prima approssimazione**: utile come punto di partenza per analisi più complesse.

Difetti

- **Pluralità di soluzioni**: diverse decomposizioni possibili per la stessa serie.
- **Assunzione modellistica rigida**: ipotesi di indipendenza o forma fissa delle componenti.
- **Visione settorializzata**: analizza le componenti separatamente, trascurando le interazioni dinamiche.

Contenuti

Trend

Il **trend** di una serie storica è stato definito come la tendenza di fondo del fenomeno nel lungo periodo.

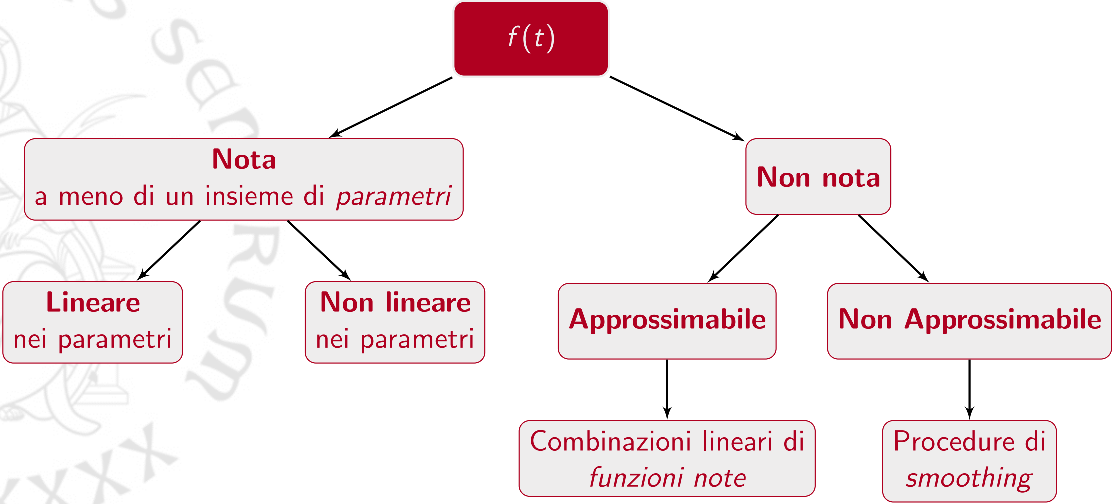
- Si caratterizza per una **evoluzione lenta** e **regolare** nel tempo.
- In genere, è rappresentabile attraverso una **funzione del tempo** da stimare.

Si consideri una serie storica $\{y_t\}_{t=1}^{n}$ per la quale si ipotizza un modello stocastico:

$$Y_t = f(t) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2) \tag{2}$$

Si supponga, inoltre, che la parte sistematica $f(t)$ sia composta solo dal trend.

Come rappresentare $f(t)$?



Modelli con Trend Lineare

Si supponga che la parte deterministica del modello $f(t)$ sia costituita solamente dal trend e che sia nota a meno di un vettore di parametri $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q)^T$.

I modelli con **trend lineare** si basano sull'ipotesi che $f(t)$ sia una funzione lineare rispetto a $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q$.

La stima di tali modelli si ottiene attraverso le procedure derivate dal **modello di regressione lineare**.

Di seguito, si considereranno due modelli con trend lineare (o *linearizzabile*) nei parametri:

1. il modello con **trend polinomiale**;
2. il modello con **trend esponenziale**.

Trend Polinomiale

Un esempio di modello con trend lineare nei parametri è il **trend polinomiale**:

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_q t^q$$

Di conseguenza, l'equazione stocastica (2) diventa a tutti gli effetti un modello di regressione lineare:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_q t^q + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n,$$

esprimibile anche in **forma matriciale**:

$$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{y}} = \underset{n\times q}{\boldsymbol{P}} \underset{q\times 1}{\boldsymbol{\alpha}} + \underset{n\times 1}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \ldots & 1^q \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \ldots & n^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Stima dei parametri

Di conseguenza, le stime dei parametri si ottengono attraverso il **metodo dei minimi quadrati ordinari** (OLS) attraverso la formula:

$$\hat{\alpha} = \left(\boldsymbol{P}^T \boldsymbol{P}\right)^{-1} \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{y}$$

Il polinomio stimato attraverso il metodo OLS

$$y_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 t + \hat{\alpha}_2 t^2 + \cdots + \hat{\alpha}_q t^q + e_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

può essere usato per **fini interpolativi**, mentre serve cautela per fini previsivi.

Ordine del Polinomio

Una scelta cruciale nella definizione del modello con trend polinomiale è quella relativa all'**ordine** q.

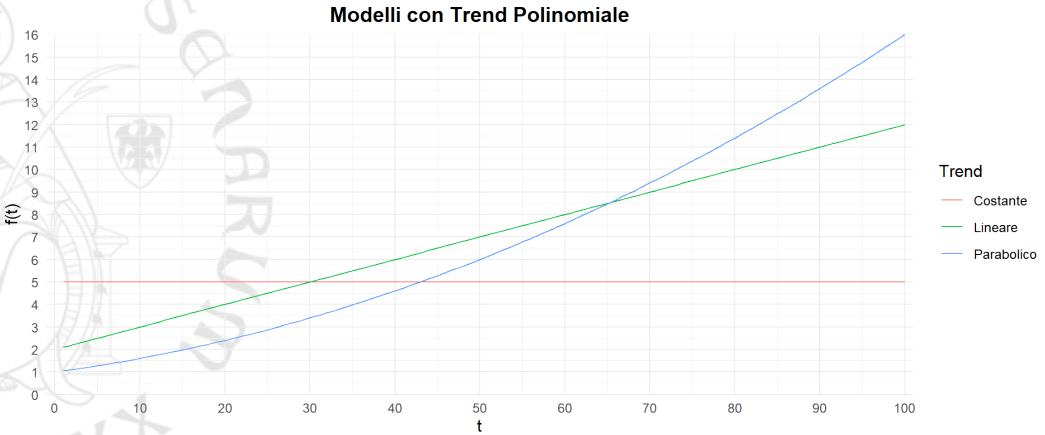
L'ordine q ottimale dipende dal **comportamento di fondo** della serie storica.

I casi particolari più utilizzati sono i seguenti:

- **trend costante**: $q = 0 \Rightarrow Y_t = \alpha_0 + \varepsilon_t$;
- **trend lineare**: $q = 1 \Rightarrow Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \varepsilon_t$;
- **trend parabolico**: $q = 2 \Rightarrow Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \varepsilon_t$.

In generale, è preferibile la scelta di un ordine q abbastanza **piccolo** per evitare di perdere troppi gradi di libertà.

Modelli con Trend Polinomiale



Criterio delle Differenze Successive I

Tuttavia, non è detto che la scelta di q sia intuitiva. Dunque, è necessario adottare il **criterio delle differenze successive**.

1. Si indichi con $\boldsymbol{B}$ l'**operatore ritardo** che trasforma la serie y_t in
$$y_{t-1} = \boldsymbol{B}\, y_t,$$
da cui segue:
$$\boldsymbol{B}^h\, y_t = y_{t-h};$$
2. Si definisca **operatore identità** l'operatore ritardo $\boldsymbol{B}^0 = \boldsymbol{I}$ che lascia immutata la serie:
$$\boldsymbol{B}^0\, y_t = \boldsymbol{I}\, y_t = y_t;$$
3. Si introduca l'**operatore differenza prima all'indietro** $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})$ per il quale
$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\, y_t = y_t - y_{t-1};$$

Criterio delle Differenze Successive II

4. Si calcolino le differenze successive della serie;
5. L'operazione si arresta quando, per un determinato valore r, la serie $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^r y_t$ è approssimativamente **costante**.
6. L'ordine ottimale del polinomio è $q \equiv r$.

Esempio

Si supponga che il trend osservato sia lineare, ovvero $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t$.
Allora:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})y_t &= y_t - y_{t-1} = \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 t - (\alpha_0 + \alpha_1(t-1)) = \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 t - \alpha_0 - \alpha_1 t + \alpha_1 = \\ &= \alpha_1\end{aligned}$$

α_1 è un valore costante ed è stato ottenuto per $r = 1$; dunque, l'ordine ottimale del trend polinomiale è $q = 1$.

Modelli con Trend Esponenziale

Si supponga di voler studiare una serie storica relativa a un fenomeno caratterizzato da una **crescita** nel tempo **esplosiva**.

In questo contesto, un tipo di modelli più idoneo rispetto a quelli con trend polinomiale sono i **modelli con trend esponenziale**:

$$f(t) = \alpha_0 \, e^{\alpha_1 t} \tag{3}$$

- Se $\alpha_0 > 0$, l'andamento del trend dipende da α_1.
- Il **tasso di crescita** relativo è **costante**, in quanto:

$$\frac{\frac{df(t)}{dt}}{f(t)} = \alpha_1$$

Linearizzazione del Modello

Si noti come il modello con trend esponenziale **non** sia **lineare** nei parametri, in quanto α_1 è un esponente.

Tuttavia, è possibile ottenere la **linearizzazione** del modello rispetto ai parametri con l'aiuto della trasformata logaritmica di (3):

$$\log\{f(t)\} = \log \alpha_0 + \alpha_1 t$$

La linearizzazione rispetto ai parametri α_0 e α_1 può, dunque, essere ottenuta tramite l'adozione di un **modello stocastico moltiplicativo**

$$y_t = f(t) \cdot \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n,$$

mentre *non* può essere ottenuta dalla specificazione additiva

$$y_t = f(t) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n.$$

Stima del Modello

La stima dei parametri α_0 e α_1 è possibile con la specificazione moltiplicativa:

$$y_t = \alpha_0 \, e^{\alpha_1 t} \cdot \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n,$$

da cui si ricava

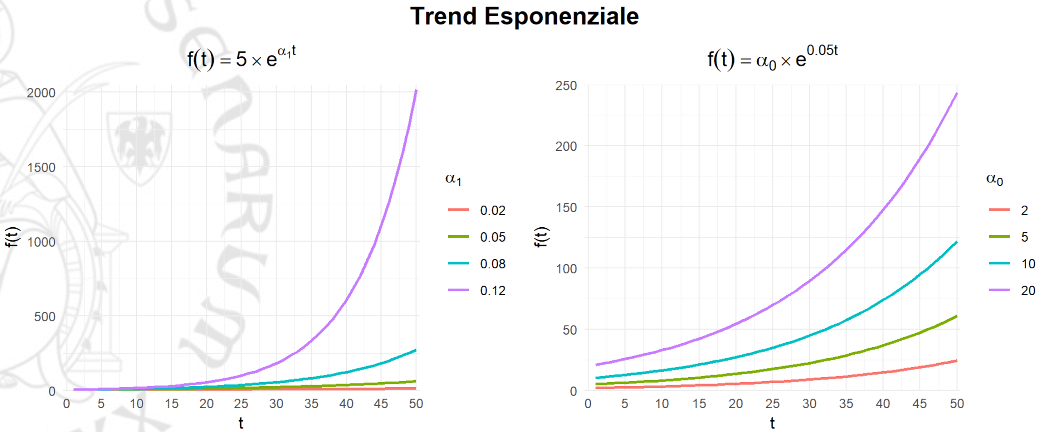
$$\log y_t = \log \alpha_0 + \alpha_1 t + \log \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n;$$
$$\log y_t = \alpha_0^* + \alpha_1 t + \varepsilon_t^*, \quad t = 1, \ldots, n;$$

dove i parametri α_0^*, α_1 possono essere stimati tramite il **metodo OLS**.

Problema

- La stima di y_t è **distorta**, in quanto $\mathrm{E}(y_t) \neq f(t)$.

Modelli con Trend Esponenziale



Trend Non Lineare

Si supponga, come in precedenza, che la parte deterministica del modello $f(t)$ sia costituita solamente dal trend e che sia nota a meno di un vettore di parametri $\boldsymbol{\theta}$.

I modelli con **trend non lineare** nei parametri si basano sull'ipotesi che $f(t)$ sia una funzione non lineare e non linearizzabile rispetto a $\boldsymbol{\theta}$.

In altre parole, il trend $f(t)$ non può essere ricondotto attraverso alcuna trasformazione al trend polinomiale.

I modelli con trend non lineare nei parametri sono buone rappresentazioni di fenomeni caratterizzati da **crescite molto accelerate**.

Curva Esponenziale Modificata

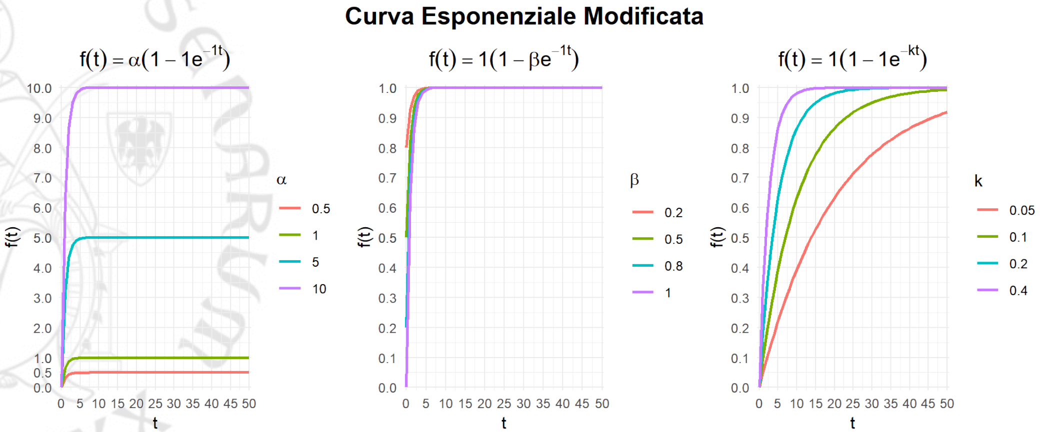
Un primo esempio di modello con trend non lineare nei parametri e il modello con **curva di crescita esponenziale modificata**:

$$f(t) = \alpha \left(1 - \beta e^{-kt}\right),$$

dove:

- $\alpha > 0$ determina il **valore limite** della crescita;
- $\beta > 0$ determina, insieme ad α, l'**intersezione** della curva **con l'asse verticale**;
- $k > 0$ è la **costante di proporzionalità**.

Curva Esponenziale Modificata



Formulazione alternativa

Il modello con curva di crescita esponenziale modificata può essere riscritto anche come:

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 \, e^{\beta_2^* \, t},$$

dove, con riferimento alla formula originaria:

- $\beta_0 = \alpha > 0$;
- $\beta_1 = -\alpha \, \beta < 0$;
- $\beta_2^* = -k < 0$.

Questa formulazione rende maggiormente evidente la differenza con il trend esponenziale semplice, dove è assente l'**asintoto superiore** β_0.

La presenza di $\beta_0 > 0$ rende **impossibile** la **linearizzazione** tramite trasformazione logaritmica.

Tuttavia, la differenza $\beta_0 + f(t)$ è, a tutti gli effetti, un'esponenziale semplice e, dunque, linearizzabile.

- In contesti in cui il valore dell'**asintoto** è **noto** (fissato dall'esterno) è possibile ricavare l'esponenziale semplice e stimare i parametri con **metodo OLS**.

Curva Logistica

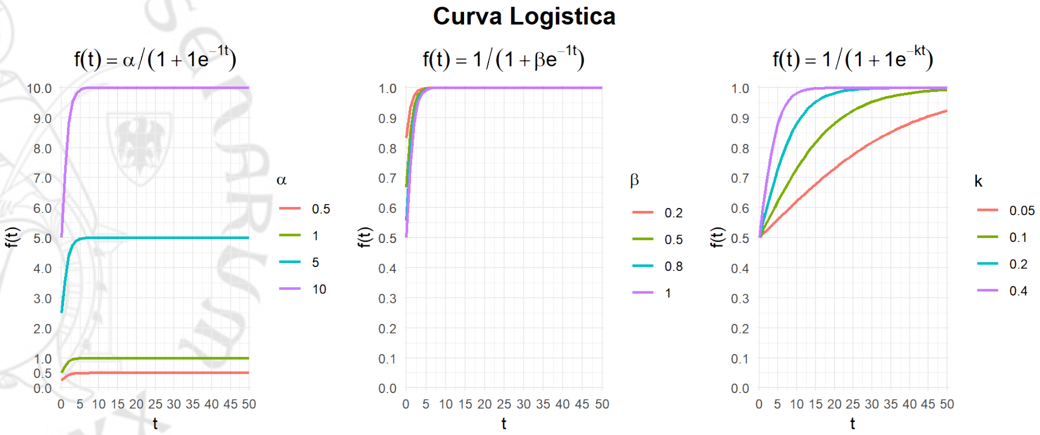
Un secondo esempio di modello con trend non lineare nei parametri e il modello con **curva di crescita logistica**:

$$f(t) = \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-kt}},$$

dove:

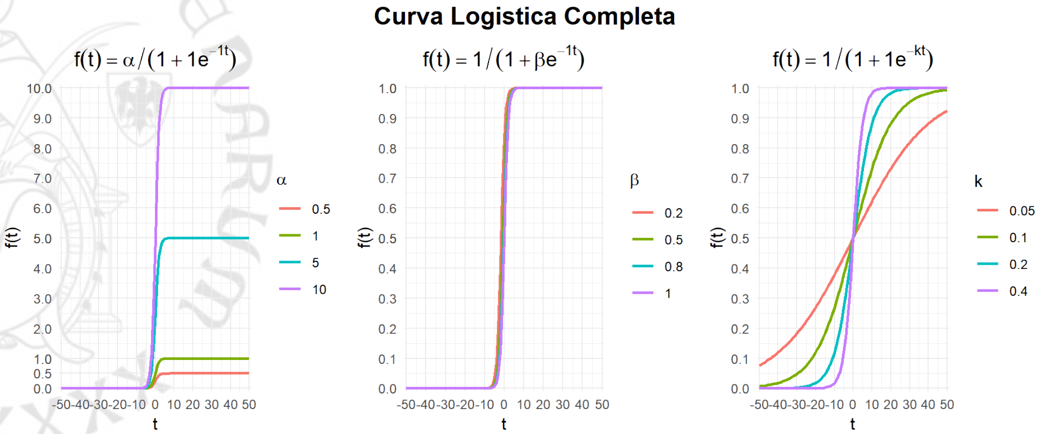
- $\alpha > 0$ determina la **scala** della funzione di crescita;
- $\beta > 0$ determina, insieme ad α, l'**intersezione** della curva **con l'asse verticale**;
- $k > 0$ determina l'**inclinazione** della funzione.

Curva Logistica



Curva Logistica Completa

Di seguito, vengono presentati gli stessi grafici con gli stessi parametri visti in precedenza nel caso in cui fosse possibile prendere in considerazione valori di $t < 0$.



Curva Logistica come Esponenziale Modificata

Il reciproco del modello con curva di crescita logistica può essere ricondotto al modello con curva di crescita esponenziale modificata:

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(t)} &= \frac{1+\beta\, e^{-kt}}{\alpha} = \\ &= \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} e^{-kt} = \\ &= \alpha^* + \beta^* e^{-kt} = f^*(t)\end{aligned}$$

Il modello con trend $f^*(t)$ è, a tutti gli effetti, un modello con curva di crescita esponenziale modificata nota a meno dei parametri $\boldsymbol{\theta} = (\alpha^*, \beta^*, k)$.

Curva di Gompertz

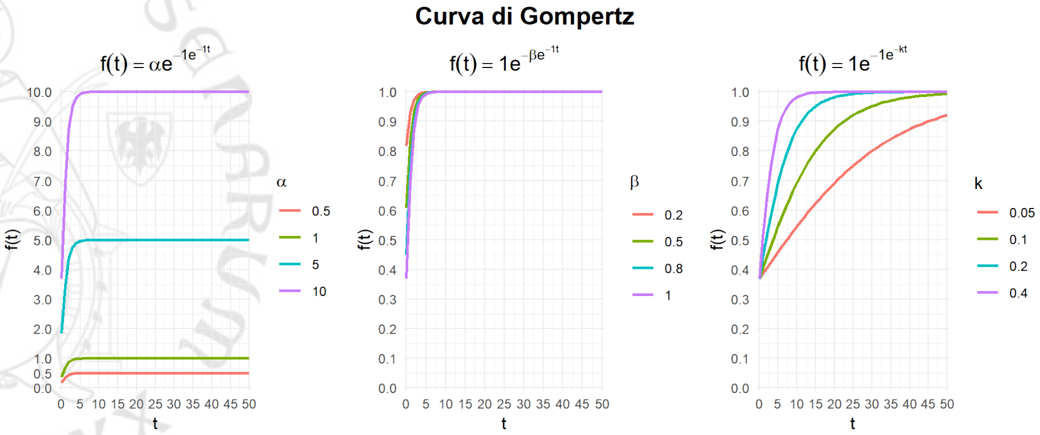
Un terzo esempio di modello con trend non lineare nei parametri e il modello con **curva di crescita di Gompertz**:

$$f(t) = \alpha \cdot e^{-\beta\, e^{-kt}},$$

dove i parametri $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, k)$ hanno la stessa interpretazione di quelli nel modello con curva di crescita logistica.

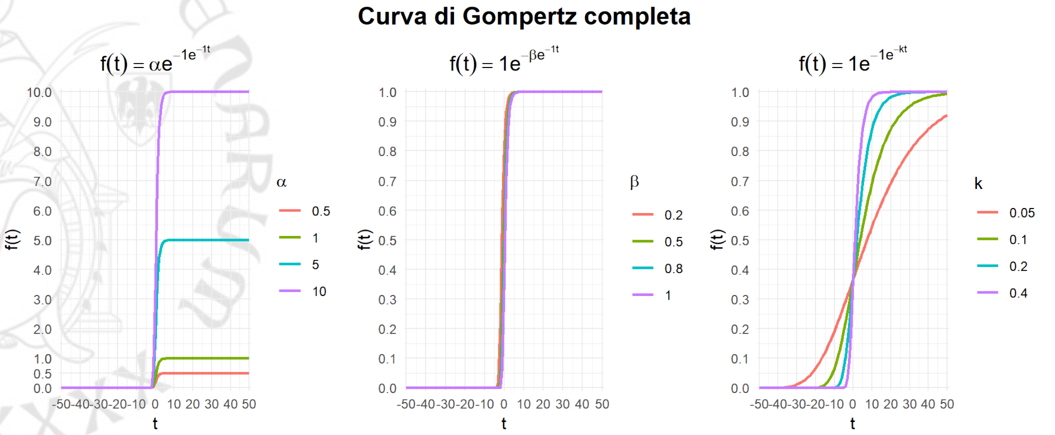
La forma di $f(t)$ è simile a quella della logistica, sebbene **non** sia **simmetrica** rispetto al punto di flesso $t = 0$.

Curva di Gompertz



Curva di Gompertz Completa

Di seguito, vengono presentati gli stessi grafici con gli stessi parametri visti in precedenza nel caso in cui fosse possibile prendere in considerazione valori di $t < 0$.



Curva di Gompertz come Esponenziale Modificata

La **trasformazione logaritmica** della curva di Gompertz è un'**esponenziale modificata**:

$$\begin{aligned}\log\{f(t)\} &= \log\left\{\alpha \cdot e^{-\beta\, e^{-kt}}\right\} = \\ &= \log\alpha + \log\left\{e^{-\beta\, e^{-kt}}\right\} = \\ &= \log\alpha - \beta\, e^{-kt}\end{aligned}$$

Ponendo:

$$\beta_0 = \log\alpha, \quad \beta_1 = -\beta, \quad \beta_2^* = -k$$

si ottiene per $\log\{f(t)\}$ la formulazione alternativa dell'esponenziale modificata.

Contenuti

Componente Stagionale

La **componente stagionale** di una serie storica si riferisce ai movimenti del fenomeno nel corso dell'anno che tendono a ripetersi in maniera pressoché analoga nel medesimo periodo.

- Si caratterizza per una **periodicità**.
- È rappresentabile attraverso una **funzione del tempo** da stimare.

Si consideri una serie storica $\{y_t\}_{t=1}^n$ per la quale si ipotizza un modello stocastico:

$$Y_t = g(t) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2) \tag{4}$$

Si supponga, inoltre, che la parte sistematica $g(t)$ sia composta solo dalla stagionalità:

$$Y_t = S_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n.$$

Come rappresentare $g(t)$?

La componente stagionale $g(t)$ viene rappresentata mediante una **funzione periodica**.

Funzione periodica

Funzioni il cui valore all'istante t si riproduce esattamente ad intervalli costanti, la cui lunghezza s costituisce il periodo:

$$g(t) = g(t+s) = g(t+2s) = \cdots = g(t+ks), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Casi particolari nelle serie storiche:

- $s = 4$ è una **serie trimestrale**;
- $s = 12$ è una **serie mensile**.

Funzioni trigonometriche

Una scelta comune per modellare la componente stagionale S_t è quella di definire $g(t)$ mediante **funzioni trigonometriche**:

$$S_t = \sum_{i=1}^{m} A_i \cos\left(\frac{2\pi i}{s} t - \phi_i\right)$$

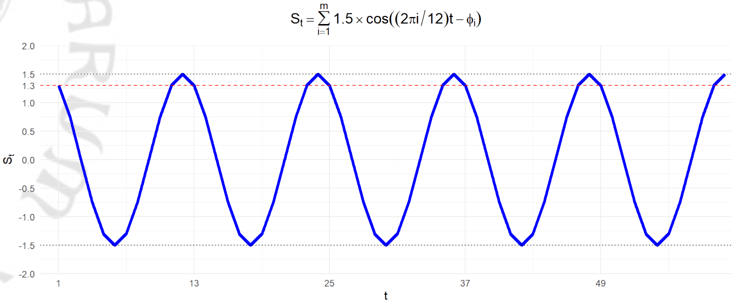
In questo contesto, la componente stagionale è data dalla **somma** di m **armoniche** con:

- periodo $\frac{s}{i}$;
- frequenza angolare $\omega_i = \frac{2\pi i}{s}$;
- ampiezza A_i;
- angolo di fase ϕ_i.

Esempio: stagionalità mensile

Qualora si consideri una stagionalità mensile ($s = 12$), si ha che ogni armonica completi il ciclo in 12 periodi.

Per esempio, la prima armonica ($i = 1$) completerà il ciclo ad ogni istante temporale $t = 12k + 1$.



Integrazione con Trend Polinomiale

La componente stagionale può essere integrata con il trend ottenendo il seguente modello stocastico:

$$Y_t = f(t) + g(t) + \varepsilon_t,$$

dove $f(t) = T_t$ è la componente deterministica dovuta al **trend** e $g(t) = S_t$ è la componente deterministica dovuta alla **stagionalità**.

Supponendo l'esistenza di un **trend polinomiale** di grado q e una **componente stagionale trigonometrica** si ha:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_q t^q + \sum_{i=1}^{m} A_i \cos\left(\frac{2\pi i}{s} t - \phi_i\right) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n.$$

Sfruttando l'**identità trigonometrica**, si può riscrivere il modello integrato come:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_q t^q + \sum_{i=1}^{m} \Big(\beta_{i1} \cos(\omega_i t) + \beta_{i2} \sin(\omega_i t)\Big) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n,$$

con $\beta_{i1} = A_i \cos(\phi_i)$ e $\beta_{i2} = A_i \sin(\phi_i)$ che può essere stimato tramite **metodo OLS**.

Software

[1] gretl: `https://cran.r-project.org/manuals.html`.

[2] The R Project for Statistical Computing: `https://www.r-project.org/`.