Prova intermedia del 26 Aprile 2017

• **Esercizio 1.** Si consideri un esperimento aleatorio che consiste nell'estrarre una pallina da un'urna che contiene 10 palline nere e 20 bianche. Se la pallina estratta è bianca viene estratta una carta da un primo mazzo con 10 carte rosse e 30 carte nere, altrimenti viene estratta una carta da un secondo mazzo con 20 carte rosse e 20 nere. Si determini la probabilità di estrarre una carta rossa.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento relativo all'estrazione di una pallina bianca dall'urna, mentre sia E l'evento relativo all'estrazione di una carta rossa. Si ha $P(E_1) = \frac{2}{3}$ e quindi $P(E_1^c) = \frac{1}{3}$. Inoltre, $P(E \mid E_1) = \frac{1}{4}$ e $P(E \mid E_1^c) = \frac{1}{2}$. Dal momento che gli eventi E_1 e E_1^c costituiscono una partizione dello spazio fondamentale, applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E \mid E_1)P(E_1) + P(E \mid E_1^c)P(E_1^c) = \frac{1}{3}\,. \qquad \clubsuit$$

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = 2e^{-2x}\, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)\,,$$

si consideri la v.a. trasformata $Y = X^2$ e si calcoli $\mathrm{E}[Y]$ e $\mathrm{Var}[Y]$.

♠ **Soluzione.** Si osservi che la v.a. X è distribuita con legge Esponenziale con parametri di posizione e di scala rispettivamente pari a 0 e $\frac{1}{2}$, ovvero $\mathcal{G}(0, \frac{1}{2}, 1)$. Per le proprietà del valore atteso, si ha

$$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2 \cdot 2e^{-2x}\, dx = \frac{1}{4}\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx = \frac{1}{4}\,\Gamma(3) = \frac{1}{2}$$

e

$$\mathrm{E}[Y^2] = \mathrm{E}[X^4] = \int_0^\infty x^4 \cdot 2e^{-2x}\, dx = \frac{1}{16}\int_0^\infty x^4 e^{-x}\, dx = \frac{1}{16}\,\Gamma(5) = \frac{3}{2}\,,$$

per cui $\mathrm{Var}[Y] = \frac{5}{4}$. ♣

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{4}{\pi}\, \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1^2 + x_2^2)\,,$$

si determini il valore atteso condizionato $\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1]$.

♠ **Soluzione.** La d.p. della v.a. X_1 è data da

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} \frac{4}{\pi}\, \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\, dx_2 = \frac{4}{\pi}\,\sqrt{1 - x_1^2}\, \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\,.$$

Dalla definizione di valore atteso della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$, per $x_1 \in\,]0,1[$ si ha

$$\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1] = \int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} x_2\, \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2}}\, dx_2 = \frac{1}{2}\,\sqrt{1 - x_1^2}\,. \qquad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Anche se non sono richiesti dall'esercizio, si noti i seguenti risultati. Innanzitutto, si ha $f_X(x_1, x_2) = f_X(x_2, x_1)$ e dunque per simmetria si ottiene

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{4}{\pi}\,\sqrt{1 - x_2^2}\, \mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\,.$$

Risulta semplice verificare che la trasformata $Y = X_2^2$ è distribuita con legge Beta ridotta $\mathcal{BE}(0,1,\frac{1}{2},\frac{3}{2})$. Dunque, per $r = 1, 2, \ldots$ si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X_2^r] &= \int_0^1 x_2^r \cdot \frac{4}{\pi}\sqrt{1-x_2^2}\,dx_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^1 y^{\frac{r-1}{2}}(1-y)^{\frac{1}{2}}\,dy \\ &= \frac{2}{\pi}\,\frac{\Gamma\big(\frac{1}{2}(r+1)\big)\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{1}{2}r+2\big)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\big(\frac{1}{2}(r+1)\big)}{\Gamma\big(\frac{1}{2}r+2\big)}\,.\end{aligned}$$

Quindi, risulta

$$\mathrm{E}[X_2] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(1)}{\Gamma\big(\frac{5}{2}\big)} = \frac{4}{3\pi}$$

e

$$\mathrm{E}[X_2^2] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{4}\,,$$

da cui

$$\mathrm{Var}[X_2] = \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\,.$$

Il valore di $\mathrm{E}[X_2]$ e $\mathrm{Var}[X_2]$ potevano essere ottenuti senza utilizzare la distribuzione della v.a. X_2. In effetti, $\mathrm{E}[X_2]$ risulta immediatamente dalla relazione

$$\mathrm{E}[X_2] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[X_2 \mid X_1]] = \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{1-x_1^2}\cdot\frac{4}{\pi}\sqrt{1-x_1^2}\,dx_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x_1^2)\,dx_1 = \frac{4}{3\pi}\,.$$

Inoltre, per $x_1 \in \,]0,1[$ si ha

$$\mathrm{E}[X_2^2 \mid X_1 = x_1] = \int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} x_2^2\,\frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}}\,dx_2 = \frac{1}{3}\,(1-x_1^2)\,.$$

da cui

$$\mathrm{Var}[X_2 \mid X_1 = x_1] = \frac{1}{12}\,(1-x_1^2)\,.$$

Inoltre, risulta

$$\mathrm{E}[\mathrm{Var}[X_2 \mid X_1]] = \frac{1}{12}\,(1-\mathrm{E}[X_1^2]) = \frac{1}{16}$$

e

$$\mathrm{Var}[\mathrm{E}[X_2 \mid X_1]] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[X_2 \mid X_1]^2] - \mathrm{E}[X_2]^2 = \frac{1}{4}\,(1-\mathrm{E}[X_1^2]) - \frac{16}{9\pi^2} = \frac{3}{16} - \frac{16}{9\pi^2}\,.$$

Infine, si ha

$$\mathrm{Var}[X_2] = \mathrm{E}[\mathrm{Var}[X_2 \mid X_1]] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}[X_2 \mid X_1]] = \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\,,$$

che conferma il risultato ottenuto in precedenza. ♦

Esame del 12 Giugno 2017

• **Esercizio 1.** Si consideri il lancio di due dadi equilibrati. Se è noto che il 6 si è verificato su uno dei due dadi, si determini la probabilità che il 6 si sia verificato anche sull'altro dado.

♠ **Soluzione.** L'esperimento può essere descritto assumendo il v.v.a. $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$, tale che X_1 e X_2 sono v.a. con legge di Bernoulli $\mathcal{B}(1, \frac{1}{6})$. Se si assume che $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = p$ con $p \in [0, \frac{1}{6}]$ (dal momento che i dadi sono equilibrati), la probabilità richiesta è data da

$$P(X_1 = 1 \mid X_2 = 1) = \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 1)}{P(X_1 = 1)} = 6p\,. \qquad ♣$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Se le componenti X_1 e X_2 del v.v.a. X sono indipendenti, risulta ovviamente $P(X_1 = 1 \mid X_2 = 1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{6}$. ♦

• **Esercizio 2.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}\,,$$

si determini media e varianza della v.a. $Y = X_1^2 + X_2^2$.

♠ **Soluzione.** Si noti che il v.v.a. X è distribuito con legge Normale bivariata $\mathcal{N}_2(0, I_2)$. Quindi, le componenti del v.v.a. X sono indipendenti con legge $\mathcal{N}(0,1)$. Dunque, dal momento che $\mathrm{E}[X_1^2] = \mathrm{E}[X_2^2] = 1$, si ha $\mathrm{E}[Y] = 2$. Inoltre, $\mathrm{E}[X_1^4] = \mathrm{E}[X_2^4] = 3$, si ha $\mathrm{Var}[Y] = 4$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Per definizione, la v.a. Y è distribuita con legge Chi-quadrato con 2 gradi di libertà, ovvero χ_2^2, per cui era immediato ottenere il risultato dalle proprietà di questa legge. ♦

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ dell'Esercizio 2, si determini $\mathrm{Cov}[X_1^2, X_1^2 + X_2^2]$.

♠ **Soluzione.** Sulla base dei precedenti commenti risulta

$$\mathrm{E}[X_1^2(X_1^2 + X_2^2)] = \mathrm{E}[X_1^4] + \mathrm{E}[X_1^2]\mathrm{E}[X_2^2] = 4\,,$$

da cui

$$\mathrm{Cov}[X_1^2, X_1^2 + X_2^2] = \mathrm{E}[X_1^2(X_1^2 + X_2^2)] - \mathrm{E}[X_1^2]\mathrm{E}[X_1^2 + X_2^2] = 2\,. \qquad ♣$$

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2) = e^{2\mathrm{i}t_1 - 2t_1^2 - 3t_2^2 + 2t_1t_2}\,,$$

si determini la legge della v.a. trasformata $Y = X_1 + 3X_2$.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.c.m. si ha

$$\varphi_Y(t) = \varphi_X(t, 3t) = e^{2\mathrm{i}t - 23t^2}\,.$$

Dunque, la v.a. trasformata Y è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(2, 46)$. ♣

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ dove la v.a. X_n è distribuita con legge di Poisson $\mathcal{P}(1 + n^{-1})$. Si determini la legge della v.a. X, tale che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n \to \infty$.

♠ **Soluzione.** La f.g. della v.a. X_n è data da

$$G_{X_n}(t) = e^{(1+\frac{1}{n})(t-1)}\,.$$

Tenendo presente le proprietà della convergenza in legge, si ha

$$\lim_n G_{X_n}(t) = G_X(t) = e^{t-1} \, ,$$

ovvero la v.a. X è distribuita con legge di Poisson $\mathcal{P}(1)$. ♣

• **Esercizio 6.** Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = \cos(t)\, dt + dB_t$$

con condizione iniziale $X_0 = 0$ $q.c.$ e se ne determini la soluzione. Si calcoli inoltre $\mathrm{E}[X_t]$ e $\mathrm{Var}[X_t]$.

♠ **Soluzione.** Dalla definizione di processo di Itô si ha

$$X_t = \int_0^t \cos(s)\, ds + \int_0^t dB_s = \sin(t) + B_t \, .$$

Inoltre, per le proprietà del moto Browniano si ha

$$\mathrm{E}[X_t] = \sin(t) + \mathrm{E}[B_t] = \sin(t)$$

e

$$\mathrm{Var}[X_t] = \mathrm{Var}[B_t] = t \, .$$ ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Per le proprietà del moto Browniano, la v.a. X_t è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(\sin(t), t)$. ♦

Esame del 10 Luglio 2017

• **Esercizio 1.** Un'urna contiene 4 palline bianche e 6 palline nere. Una prima pallina viene estratta dall'urna e viene accantonata senza osservarne il colore. Se una seconda pallina viene estratta dall'urna, si determini la probabilità che sia bianca.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento relativo alla prima estrazione di una pallina bianca dall'urna, mentre sia E l'evento relativo alla seconda estrazione di una pallina bianca. Si ha $P(E_1) = \frac{2}{5}$ e $P(E_1^c) = \frac{3}{5}$. Inoltre, $P(E \mid E_1) = \frac{1}{3}$ e $P(E \mid E_1^c) = \frac{4}{9}$. Dal momento che gli eventi E_1 e E_1^c costituiscono una partizione dello spazio fondamentale, applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E \mid E_1)P(E_1) + P(E \mid E_1^c)P(E_1^c) = \frac{2}{5} \, .$$ ♣

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \mathbf{1}_{]0,1[}(x) \, ,$$

si consideri la v.a. trasformata $Y = X^4$ e se ne determini la d.p.

♠ **Soluzione.** Dal momento che $g(x) = x^4$ è una funzione biunivoca su $[0, \infty[$ e che la v.a. X è assolutamente continua, allora risulta

$$f_Y(y) = \mathbf{1}_{]0,1[}(y^{\frac{1}{4}}) \cdot \frac{1}{4}\, y^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\, y^{-\frac{3}{4}}\, \mathbf{1}_{]0,1[}(y) \, .$$ ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che la v.a. X è distribuita con legge Beta ridotta $\mathcal{BE}(0, 1, \frac{1}{4}, 1)$. ♦

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1,x_2)=\mathbf{1}_{]0,1[\times]0,1[}(x_1,x_2)\ ,$$

si determini media e varianza della v.a. $Y=X_1^2+X_2^2$.
♠ **Soluzione.** Dal momento che

$$f_X(x_1,x_2)=\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\ ,$$

allora X_1 e X_2 sono v.a. indipendenti e ugualmente distribuite con legge Uniforme su $]0,1[$. Dunque, dal momento che $\mathrm{E}[X_1^2]=\mathrm{E}[X_2^2]=\frac{1}{3}$, si ha $\mathrm{E}[Y]=\frac{2}{3}$. Inoltre, si ha

$$\mathrm{Var}[X_1^2]=\mathrm{E}[X_1^4]-\mathrm{E}[X_1^2]^2=\frac{1}{5}-\frac{1}{9}=\frac{4}{45}$$

e $\mathrm{Var}[X_2^2]=\mathrm{Var}[X_1^2]=\frac{4}{45}$, da cui $\mathrm{Var}[Y]=\frac{8}{45}$. ♣

• **Esercizio 4.** Date le v.a. indipendenti X_1, X_2 e X_3, rispettivamente con legge Binomiale $\mathcal{B}(3,\frac{1}{4})$, $\mathcal{B}(5,\frac{1}{4})$ e $\mathcal{B}(4,\frac{1}{4})$, si determini la legge della v.a. $Y=X_1+X_2+X_3$.
♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.g. si ha

$$G_Y(t)=\prod_{i=1}^{3}G_{X_i}(t)=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\,t\right)^{12}\ .$$

Dunque, la v.a. Y è distribuita con legge Binomiale $\mathcal{B}(12,\frac{1}{4})$. ♣

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. $(Y_n)_{n\geq1}$ dove $Y_n=\frac{X_n-n}{\sqrt{n}}$ e la v.a. X_n è distribuita con legge $\mathcal{P}(n)$. Si determini la legge della v.a. X, tale che $Y_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$ per $n\to\infty$.
♠ **Soluzione.** Per le proprietà della legge di Poisson si ha $\mathrm{E}[X_n]=\mathrm{Var}[X_n]=n$. Inoltre, dal momento che

$$G_{X_n}(t)=(e^{t-1})^n\ ,$$

per le proprietà dell f.g. risulta $X_n=\sum_{i=1}^n Z_i$, dove le v.a. Z_i sono indipendenti con legge di Poisson $\mathcal{P}(1)$. Dunque, per il Teorema Centrale del Limite di Lindeberg-Lévy, la v.a. X è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(0,1)$. ♣
♥ **Ulteriori rilievi.** L'esercizio poteva essere risolto notando che la f.c. della v.a. X_n è data da

$$\varphi_{X_n}(t)=\exp\left(ne^{\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{i}t}-n-\mathrm{i}t\sqrt{n}\right)\ .$$

Dalle proprietà dell'espansione in serie della funzione esponenziale in campo complesso, risulta

$$e^{\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{i}t}=1+\frac{\mathrm{i}t}{\sqrt{n}}-\frac{t^2}{2n}+o(n^{-1})\ .$$

Dunque, si ha

$$\varphi_{X_n}(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2+no(n^{-1})}\ ,$$

da cui

$$\lim_n\varphi_{X_n}(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}\ .$$

La precedente espressione è la f.c. relativa a una v.a. X con legge Normale ridotta $\mathcal{N}(0,1)$. ♦

● **Esercizio 6.** Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = X_t dt + X_t dB_t$$

con condizione iniziale $X_0 = C$ e se ne determini la soluzione.
♠ **Soluzione.** L'equazione differenziale stocastica è quella relativa ad un moto Browniano geometrico con $\mu = 1$ e $\sigma = 1$ e dunque risulta

$$X_t = Ce^{\frac{1}{2}t+B_t} \, . \qquad ♣$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Più generalmente, si consideri il moto Browniano geometrico con

$$X_t = e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B_t}$$

dove $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in]0, \infty[$. Al fine di determinare le proprietà della v.a. X_t, si noti che se Z è una v.a. con legge Normale $\mathcal{N}(0, b^2)$ per $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\mathrm{E}[e^{aZ}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{az} \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} e^{-\frac{1}{2b^2}z^2} \, dz = e^{\frac{1}{2}a^2b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} e^{-\frac{1}{2}(z-ab)^2} \, dz = e^{\frac{1}{2}a^2b^2} \, .$$

Dunque, dal momento che la v.a. B_t è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(0, t)$, risulta

$$\mathrm{E}[X_t] = e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t} \, \mathrm{E}[e^{\sigma B_t}] = e^{\mu t}$$

e

$$\mathrm{E}[X_t^2] = e^{(2\mu-\sigma^2)t} \, \mathrm{E}[e^{2\sigma B_t}] = e^{2\mu t+\sigma^2 t} \, ,$$

da cui

$$\mathrm{Var}[X_t] = e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1) \, .$$

Per quanto riguarda la legge della v.a. X_t si osservi che questa v.a. è una trasformata monotona della v.a. B_t. Dunque, è immediato verificare che la v.a. X_t ammette d.p. data da

$$f_{X_t}(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}(\log(x)-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t)^2} \, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x) \, .$$

La legge della v.a. X_t è la Log-Normale con parametri dati da $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$ e $\sigma\sqrt{t}$. ♦

Esame del 20 Settembre 2017

● **Esercizio 1.** Si considerino gli eventi E_1 e E_2 che consistono nel sostenere positivamente due esami di un corso universitario nel medesimo appello. Se la probabilità che si verifichi E_1 è data da $\frac{2}{3}$, quella che si verifichi E_2 è data da $\frac{3}{5}$, mentre quella che si verifichino contemporaneamente E_1 e E_2 è data da $\frac{2}{5}$, si determini la probabilità di sostenere positivamente almeno uno dei due esami.
♠ **Soluzione.** Dal momento che $P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{5}$, la probabilità richiesta è data da

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{13}{15} \, . \qquad ♣$$

● **Esercizio 2.** Data la v.a. mista X con f.r.

$$F_X(x) = \frac{2x+1}{4} \mathbf{1}_{[0,1[}(x) + \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x) \, ,$$

si determini $\mathrm{E}[X]$.
♠ **Soluzione.** La f.r. F_X può essere scritta come

$$F_X(x) = \frac{1}{2}\,F_d(x) + \frac{1}{2}\,F_{ac}(x)\,,$$

dove

$$F_d(x) = \frac{1}{2}\,\mathbf{1}_{[0,1[}(x) + \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)$$

e

$$F_{ac}(x) = x\mathbf{1}_{[0,1[}(x) + \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)\,.$$

Dunque, si ha

$$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{2}\sum_{x=0}^{1} x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\mathbf{1}_{[0,1[}(x)\,dx = \frac{1}{2}\,.$$ ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** L'esercizio poteva essere risolto immediatamente notando la simmetria della f.r. rispetto al punto $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. ♦

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1,t_2) = e^{-2t_1^2 - t_2^2 - t_1 t_2}\,,$$

si determini le leggi delle due componenti marginali.
♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.c.m. si ha

$$\varphi_{X_1}(t_1) = \varphi_X(t_1,0) = e^{-2t_1^2}$$

e

$$\varphi_{X_2}(t_2) = \varphi_X(0,t_2) = e^{-t_2^2}\,.$$

Dunque, la v.a. X_1 è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(0,4)$, mentre la v.a. X_2 è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(0,2)$. ♣
♥ **Ulteriori rilievi.** Il risultato poteva essere ottenuto immediatamente, notando che φ_X è la f.c.m. di un v.v.a. X con legge Normale Multivariata $\mathcal{N}_2(\mu_X, \Sigma_X)$, dove il vettore medio è dato da $\mu_X = (0,0)^{\mathrm{T}}$ e la matrice di varianza-covarianza è data da

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$ ♦

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ dell'Esercizio 3, si determini $\mathrm{Cov}[X_1, X_2]$.
♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.c. si ha

$$\left.\frac{\partial^2\varphi_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}\right|_{t_1,t_2=0} = -1 = \mathrm{i}^2\mathrm{E}[X_1X_2]\,,$$

ovvero $\mathrm{E}[X_1X_2] = 1$. Inoltre, si ha

$$\left.\frac{\partial\varphi_X(t_1,t_2)}{\partial t_1}\right|_{t_1,t_2=0} = 0 = \mathrm{i}\mathrm{E}[X_1]\,,$$

e

$$\left.\frac{\partial\varphi_X(t_1,t_2)}{\partial t_2}\right|_{t_1,t_2=0} = 0 = \mathrm{iE}[X_2]\ ,$$

ovvero $\mathrm{E}[X_1] = \mathrm{E}[X_1] = 0$. Dunque, $\mathrm{Cov}[X_1, X_2] = 1$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Il risultato poteva essere ottenuto immediatamente sulla base del precedente rilievo. ♦

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ con $X_n = \frac{Z_n - np}{\sqrt{npq}}$ e dove la v.a. Z_n è distribuita con legge $\mathcal{B}(n,p)$. Si determini la legge della v.a. X, tale che $X_n^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n \to \infty$.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà della legge Binomiale si ha $\mathrm{E}[X_n] = np$ e $\mathrm{Var}[X_n] = npq$. Inoltre, dal momento che

$$G_{X_n}(t) = (q + pt)^n\ ,$$

per le proprietà dell f.g. risulta $X_n = \sum_{i=1}^n Z_i$, dove le v.a. Z_i sono indipendenti con legge di Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$. Dunque, per il Teorema Centrale del Limite di Lindeberg-Lévy, si ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$, dove la v.a. Z è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(0,1)$. Dal momento che $g(x) = x^2$ è una funzione continua, allora si ha $X_n^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} X = Z^2$. Dunque, la v.a. X è distribuita con legge Chi-quadrato χ_1^2. ♣

• **Esercizio 6.** Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = 3X_t dB_t$$

con condizione iniziale $X_0 = C$ e se ne determini la soluzione.

♠ **Soluzione.** L'equazione differenziale stocastica è quella relativa ad un moto Browniano geometrico con $\mu = 0$ e $\sigma = 3$ e dunque risulta

$$X_t = Ce^{-\frac{9}{2}t + 3B_t}\ .$$

♣

Esame del 6 Novembre 2017

• **Esercizio 1.** Supponendo che le nascite siano ugualmente probabili durante i 12 mesi dell'anno e considerando 4 persone, si determini la probabilità che almeno due di queste persone siano nate nello stesso mese.

♠ **Soluzione.** L'esperimento aleatorio è equivalente a considerare $m = 4$ palline distinguibili inserite in modo casuale in $M = 12$ celle. Dunque, si vuole determinare la probabilità di avere una configurazione con almeno due palline in una cella. Se E rappresenta l'evento di ottenere una configurazione con al più una pallina per cella, la probabilità richiesta è data da

$$P(E^c) = 1 - \frac{M!}{(M-m)!}\,M^{-m} = 1 - \frac{12!}{8!}\,12^{-4} = \frac{41}{96}\ .$$

♣

• **Esercizio 2.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1,x_2) = 2\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1+x_2)\ ,$$

si determini la d.p. della v.a. $Y = X_1 + X_2$.

♠ **Soluzione.** Dall'espressione della d.p. della v.a. somma risulta

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x)\mathbf{1}_{]0,1[}(y-x)\mathbf{1}_{]0,1[}(y)\,dx\,,$$

ovvero

$$f_Y(y) = 2\int_0^1 \mathbf{1}_{]0,y[}(x)\mathbf{1}_{]0,1[}(y)\,dx = 2y\mathbf{1}_{]0,1[}(y)\ . \qquad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che la v.a. Y è distribuita con legge Beta ridotta $\mathcal{BE}(0,1,2,1)$. ♦

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo X dell'Esercizio 2, si determini le d.p.m. delle due componenti marginali.
♠ **Soluzione.** La d.p.m. della v.a. X_1 è data da

$$f_{X_1}(x_1) = 2\int_0^{1-x_1} \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\,dx_2 = 2(1-x_1)\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\ .$$

Dal momento che $f_X(x_1,x_2) = f_X(x_2,x_1)$, per simmetria la d.p.m. della v.a. X_2 risulta

$$f_{X_2}(x_2) = 2(1-x_2)\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\ . \qquad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Si noti che la v.a. X_1 è distribuita con legge Beta ridotta $\mathcal{BE}(0,1,1,2)$. ♦

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. discreto $X = (X_1,X_2,X_3)^{\mathrm{T}}$ con f.g.

$$G_X(t_1,t_2,t_3) = \left(\frac{1}{4}\,t_1 + \frac{1}{2}\,t_2 + \frac{1}{4}\,t_3\right)^3\,,$$

si determini $\mathrm{E}[X_1]$ e $\mathrm{E}[X_1X_2]$.
♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.g. si ha

$$\mathrm{E}[X_1] = \left.\frac{\partial G_X(t_1,t_2,t_3)}{\partial t_1}\right|_{t_1,t_2,t_3=1} = \frac{3}{4}$$

e

$$\mathrm{E}[X_1X_2] = \left.\frac{\partial^2 G_X(t_1,t_2,t_3)}{\partial t_1\partial t_2}\right|_{t_1,t_2,t_3=1} = \frac{3}{4}\ .$$

♥ **Ulteriori rilievi.** I precedenti risultati potevano essere ottenuti immediatamente notando che il v.v.a. X è distribuito con legge Multinomiale $\mathcal{M}(3,p)$, dove $p = (\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4})^{\mathrm{T}}$. ♦

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. indipendenti $(Z_n)_{n\geq 1}$ con $Z_n = \frac{X_n-n}{\sqrt{X_n}}$, per cui la v.a. X_n è distribuita con legge di Poisson $\mathcal{P}(n)$. Si determini la legge della v.a. X, tale che $\frac{X_n-n}{\sqrt{X_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n\to\infty$.
♠ **Soluzione.** Per le proprietà della legge di Poisson si ha $\mathrm{E}[X_n] = \mathrm{Var}[X_n] = n$. Inoltre, dal momento che

$$G_{X_n}(t) = (e^{t-1})^n\,,$$

per le proprietà dell f.g. risulta $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, dove le v.a. Y_i sono indipendenti con legge di Poisson $\mathcal{P}(1)$. Inoltre, si noti che

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{X_n}} = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n}{X_n}} .$$

Per la Legge dei Grandi Numeri si ha $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} 1$ e, dal momento che $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ è una funzione continua per $x = 1$, risulta anche $\sqrt{\frac{n}{X_n}} \xrightarrow{P} 1$. Dunque, per il Teorema Centrale del Limite di Lindeberg-Lévy e per il Teorema di Cramér-Slutsky, la v.a. X è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(0, 1)$. ♣

• **Esercizio 6.** Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = 2X_t \, dt + X_t \, dB_t$$

con condizione iniziale $X_0 = C$ e se ne determini la soluzione.

♠ **Soluzione.** L'equazione differenziale stocastica è quella relativa ad un moto Browniano geometrico con $\mu = 2$ e $\sigma = 1$ e dunque risulta

$$X_t = Ce^{-\frac{3}{2}t + B_t} .$$ ♣

Prova intermedia del 27 Aprile 2018

• **Esercizio 1.** In un certo periodo invernale, la probabilità di contrarre una sindrome influenzale è pari a 0.3. Inoltre, la probabilità di manifestare tosse data la presenza di sindrome influenzale è pari a 0.8, mentre la probabilità del medesimo evento data la mancanza di sindrome influenzale è pari a 0.3. Si determini la probabilità di presenza di sindrome influenzale dato che si è manifestata tosse. Inoltre, si determini la probabilità di mancanza di sindrome influenzale dato che si è manifestata tosse. Infine, sulla base dei risultati ottenuti, si analizzi se la manifestazione di tosse è un valido predittore della sindrome influenzale.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento relativo alla presenza della sindrome influenzale, mentre sia E l'evento relativo alla manifestazione della tosse. Si ha $P(E_1) = 0.3$ e quindi $P(E_1^c) = 0.7$. Inoltre, $P(E \mid E_1) = 0.8$ e $P(E \mid E_1^c) = 0.3$. Dal momento che gli eventi E_1 e E_1^c costituiscono una partizione dello spazio fondamentale, applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E \mid E_1)P(E_1) + P(E \mid E_1^c)P(E_1^c) = 0.45 .$$

Considerando inoltre la Formula di Bayes, la probabilità di presenza di sindrome influenzale dato che si è manifestata tosse risulta

$$P(E_1 \mid E) = \frac{P(E \mid E_1)P(E_1)}{P(E)} \simeq 0.53 .$$

La manifestazione di tosse non è dunque un valido predittore della sindrome influenzale. In effetti, dato che si ha la tosse, si è malati con probabilità pari a 0.53 e non si è malati con probabilità 0.47. Questo fatto è dovuto alla probabilità comunque abbastanza elevata di manifestare tosse data la mancanza di sindrome influenzale. ♣

• **Esercizio 2.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ con d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}$$

si determini la d.p. della v.a. rapporto $Y = \frac{X_1}{X_2}$.

♠ **Soluzione.** Dall'espressione della d.p. della v.a. rapporto risulta

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}(x^2+x^2y^2)}\, |x|\, dx\,,$$

ovvero

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} xe^{-\frac{1}{2}(1+y^2)x^2}\, dx = \frac{1}{\pi(1+y^2)}\,. \qquad ♣$$

♥ **Ulteriori rilievi.** La v.a. Y è distribuita con legge di Cauchy, ovvero con legge t di Student con 1 grado di libertà. ♦

● **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. discreto $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente f.p.c.

$$p_X(x_1, x_2) = \frac{2!}{x_1!x_2!(2-x_1-x_2)!}\, 4^{-x_1}4^{-x_2}2^{x_1+x_2-2}\mathbf{1}_S(x_1, x_2)\,,$$

dove $S = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, 1, 2, x_2 = 0, 1, 2, x_1 + x_2 \leq 2\}$ si determini il valore atteso condizionato $\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1]$.

♠ **Soluzione.** Dal momento che si ha

$$p_X(x_1, x_2) = \binom{2}{x_1\, x_2\, 2-x_1-x_2}\left(\frac{1}{4}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{4}\right)^{x_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x_1-x_2}\mathbf{1}_S(x_1, x_2)\,,$$

il v.v.a. $(X_1, X_2, 2 - X_1 - X_2)^{\mathrm{T}}$ è distribuito con legge Multinomiale $\mathcal{M}(2, p)$, dove $p = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$. Quindi, la v.a. X_1 è distribuita con legge Binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{4})$. Per $x_1 = 0, 1, 2$ si ha

$$p_{X_2|X_1=x_1}(x_2) = \frac{p_X(x_1, x_2)}{p_{X_1}(x_1)} = \binom{2-x_1}{x_2}\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x_1-x_2}\mathbf{1}_{\{0,\ldots,2-x_1\}}(x_2)\,,$$

ovvero la legge condizionata della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$ è Binomiale $\mathcal{B}(2 - x_1, \frac{1}{3})$. Dunque, si ha

$$\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1] = \frac{2-x_1}{3}\,. \qquad ♣$$

♥ **Ulteriori rilievi.** In generale, se si ha il v.v.a. discreto $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la f.p.c.

$$p_X(x_1, x_2) = \binom{n}{x_1\, x_2\, n-x_1-x_2} p_1^{x_1}p_2^{x_2}(1-p_1-p_2)^{n-x_1-x_2}\,\mathbf{1}_S(x_1, x_2)\,,$$

dove $S = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 = 0, 1, \ldots, n, x_1 + x_2 \leq n\}$ e $p_1, p_2 \in\,]0, 1[$, la v.a. X_1 è distribuita con legge Binomiale $\mathcal{B}(n, p_1)$ e per $x_1 = 0, 1, \ldots, n$ si ha

$$p_{X_2|X_1=x_1}(x_2) = \binom{n-x_1}{x_2}\left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{x_2}\left(1-\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{n-x_1-x_2}\mathbf{1}_{\{0,1,\ldots,n-x_1\}}(x_2)\,,$$

ovvero la legge condizionata della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$ è Binomiale $\mathcal{B}(n - x_1, \frac{p_2}{1-p_1})$. Pertanto, si ha

$$\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1] = \frac{p_2}{1-p_1}\,(n-x_1)\,.$$

Dunque, $\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1]$ è una funzione lineare di x_1. ♦

Esame del 18 Giugno 2018

• **Esercizio 1.** Al fine di sostenere un esame, uno studente deve preparare un programma di 10 argomenti. Il docente esamina lo studente sulla base di 2 argomenti selezionati con uguale probabilità fra i 10 argomenti. Dato che lo studente ha preparato 9 argomenti, si determini la probabilità di sostenere l'esame con successo. Inoltre, si determini il numero minimo di argomenti da preparare per sostenere l'esame con successo con una probabilità maggiore di 0.5.

♠ **Soluzione.** Le possibili selezioni di 2 argomenti fra 10 argomenti sono $\binom{10}{2}$, mentre le selezioni di 2 argomenti fra i 9 preparati dallo studente sono $\binom{9}{2}$. Dunque, se E è l'evento relativo al sostenere l'esame con successo, si ha

$$P(E) = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{4}{5} \, .$$

In generale, se lo studente prepara m argomenti, dove $m = 0, 1, \ldots, 10$, si ha

$$P(E) = \frac{\binom{m}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{m(m-1)}{90}$$

e quindi $P(E) > \frac{1}{2}$ se $m \geq 8$.

♥ **Ulteriori rilievi.** Si noti che al docente è sufficiente chiedere 2 soli argomenti fra 10 per verificare con elevata probabilità la preparazione dello studente. ♦

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \mathbf{1}_{]0,1[}(x) \, ,$$

si determini $\mathrm{E}[X^{-1}]$ e $\mathrm{E}[X^{-2}]$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$\mathrm{E}[X^{-1}] = \int_0^1 \frac{1}{x} \, dx = \infty \, .$$

Dal momento che il valore atteso $\mathrm{E}[X^{-1}]$ non è finito, per le proprietà dei momenti non è finito neanche il valore atteso $\mathrm{E}[X^{-2}] = \mathrm{E}[(X^{-1})^2]$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Anche se l'esercizio può essere risolto senza bisogno di calcolare esplicitamente la legge della v.a. trasformata $Y = X^{-1}$, dal momento che $g(x) = \frac{1}{x}$ è una funzione biunivoca e che la v.a. X è assolutamente continua, allora risulta

$$f_Y(y) = \mathbf{1}_{]0,1[}(y^{-1}) \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2} \, \mathbf{1}_{]1,\infty[}(y) \, .$$

Dunque, la v.a. X è distribuita con legge di Pareto con parametro di forma pari ad 1 e dunque è immediato verificare di nuovo che $\mathrm{E}[Y] = \infty$. ♦

• **Esercizio 3.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = 5e^{-5x} \, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x) \, ,$$

si determini le probabilità $P(-1 < X < 0)$ e $P(X > 1)$.

♠ **Soluzione.** Dal momento che

$$F_X(x) = (1 - e^{-5x}) \, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x) \, ,$$

le probabilità richieste sono date da

$$P(\,-1 < X < 0) = F_X(0) - F_X(\,-1) = 0$$

e

$$P(X > 1) = 1 - F_X(1) = e^{-5}\,. \qquad ♣$$

● **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2, X_3)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente f.g.m.

$$G_X(t_1, t_2, t_3) = \left(\frac{3}{5}\,t_1 + \frac{1}{5}\,t_2 + \frac{1}{5}\,t_3\right)^{10}\,,$$

si determini le leggi delle componenti marginali. Si verifichi inoltre se le componenti marginali sono indipendenti.

♠ **Soluzione.** Il v.v.a. X è distribuito con legge Multinomiale $\mathcal{M}(10, p)$, dove $p = (\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})^{\mathrm{T}}$. Per le proprietà della legge Multinomiale, le v.a. X_1, X_2 e X_3 sono rispettivamente distribuite con legge Binomiale $\mathcal{B}(10, \frac{3}{5})$, $\mathcal{B}(10, \frac{1}{5})$ e $\mathcal{B}(10, \frac{1}{5})$. Dal momento che $X_1 + X_2 + X_3 = 10$ le componenti marginali non sono indipendenti. ♣

● **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. $(Z_n)_{n\geq 1}$ dove la v.a. Z_n è distribuita con legge di Poisson $\mathcal{P}(n)$. Si consideri inoltre la successione di v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$, dove $X_n = n^{-1}(Z_n - n)^2$. Si determini la legge della v.a. X, tale che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n \to \infty$.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà della legge di Poisson si ha $\mathrm{E}[Z_n] = \mathrm{Var}[Z_n] = n$. Inoltre, dal momento che

$$G_{Z_n}(t) = (e^{t-1})^n\,,$$

per le proprietà dell f.g. risulta $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, dove le v.a. Y_i sono indipendenti con legge di Poisson $\mathcal{P}(1)$. Dunque, per il Teorema Centrale del Limite di Lindeberg-Lévy, si ottiene che $(n^{-\frac{1}{2}}(Z_n - n))_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$, dove la v.a. Z è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(0,1)$. Dal momento che $g(x) = x^2$ è una funzione continua, per le proprietà della convergenza in distribuzione si ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^2$. Inoltre, per definizione la v.a. $X = Z^2$ è distribuita con legge Chi-quadrato con 1 gradi di libertà χ_1^2. ♣

● **Esercizio 6.** Si consideri i processi di Itô X e Y tali che $dX_t = dB_t$ e $dY_t = dt$. Inoltre, si consideri la funzione $g(x, y) = xy$. Si determini l'espressione di $dg(X_t, t)$ e la legge della v.a. $g(X_t, t)$.

♠ **Soluzione.** Dalla formula semplificata di integrazione per parti, si ha

$$d(tB_t) = t\,dB_t + B_t\,dt\,.$$

Dunque, per le proprietà del moto Browniano la v.a. tB_t è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(0, t^3)$. ♣

Esame del 16 Luglio 2018

● **Esercizio 1.** Si consideri due monete, una delle quali è equilibrata, mentre l'altra è truccata in modo tale che la probabilità di ottenere l'evento testa risulta $\frac{1}{3}$. Si considera inoltre un esperimento aleatorio che consiste nel selezionare una delle due monete con probabilità $\frac{1}{2}$ e successivamente nel lanciare la moneta selezionata. Nel caso che si sia verificato l'evento testa, si determini la probabilità che la moneta scelta sia quella equilibrata.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento relativo alla selezione della moneta equilibrata, mentre sia E l'evento testa. Si ha $P(E_1) = \frac{1}{2}$ e quindi $P(E_1^c) = \frac{1}{2}$. Inoltre, $P(E \mid E_1) = \frac{1}{2}$ e $P(E \mid E_1^c) = \frac{1}{3}$. Dal momento che gli eventi E_1 e E_1^c costituiscono una partizione dello spazio fondamentale, applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E \mid E_1)P(E_1) + P(E \mid E_1^c)P(E_1^c) = \frac{5}{12} \, .$$

Considerando inoltre la Formula di Bayes, la probabilità che la moneta scelta sia quella equilibrata dato che si è verificato l'evento testa è data da

$$P(E_1 \mid E) = \frac{P(E \mid E_1)P(E_1)}{P(E)} = \frac{3}{5} \, .$$

♣

● **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \, \mathbf{1}_{]-1,1[}(x) \, ,$$

si determini la d.p. della v.a. trasformata $Y = X^4$.

♠ **Soluzione.** Data la funzione $g(x) = x^4$, l'immagine dell'intervallo $]-1,1[$ è data dall'intervallo $[0,1[$, ovvero $g(]-1,1[) = [0,1[$. Inoltre, l'immagine inversa dell'intervallo $[0,y]$ è l'intervallo $[-y^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}}]$, ovvero $g^{-1}([0,y]) = [-y^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}}]$. In questo caso, dal momento che la v.a. X è assolutamente continua, si ha

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \in [-y^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{4}}])\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y) = (F_X(y^{\frac{1}{4}}) - F_X(-y^{\frac{1}{4}}))\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y) \, ,$$

ovvero la v.a. Y ammette d.p. data da

$$f_Y(y) = (f_X(y^{\frac{1}{4}}) + f_X(-y^{\frac{1}{4}})) \, \frac{1}{4} \, y^{-\frac{3}{4}} \, \mathbf{1}_{[0,\infty[}(y) = \frac{1}{4} \, y^{-\frac{3}{4}} \, \mathbf{1}_{[0,1[}(y) \, ,$$

dove si è tenuto presente che $\mathbf{1}_{]-1,1[}(y^{\frac{1}{4}}) = \mathbf{1}_{]-1,1[}(-y^{\frac{1}{4}}) = \mathbf{1}_{]-1,1[}(y)$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che la v.a. Y è distribuita con legge Beta ridotta $\mathcal{BE}(0,1,\frac{1}{4},1)$. ♦

● **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = 2 \, \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\mathbf{1}_{]1,\infty[}(x_1 + x_2) \, ,$$

si determini le d.p. delle componenti marginali.

♠ **Soluzione.** La d.p.m. della v.a. X_1 è data da

$$f_{X_1}(x_1) = 2 \int_{1-x_1}^{1} \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) \, dx_2 = 2x_1 \, \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) \, .$$

Dal momento che $f_X(x_1, x_2) = f_X(x_2, x_1)$, per simmetria la d.p.m. della v.a. X_2 risulta

$$f_{X_2}(x_2) = 2x_2 \, \mathbf{1}_{]0,1[}(x_2) \, .$$

♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si noti che la v.a. X_1 è distribuita con legge Beta ridotta $\mathcal{BE}(0,1,2,1)$. ♦

● **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2) = e^{-2t_1^2 - 4t_2^2 + \mathrm{i}t_1} \, ,$$

si determini le leggi delle due componenti marginali. Si verifichi inoltre se le due componenti marginali sono indipendenti.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.c.m. si ha

$$\varphi_{X_1}(t_1) = \varphi_X(t_1, 0) = e^{-2t_1^2 + it_1}$$

e

$$\varphi_{X_2}(t_2) = \varphi_X(0, t_2) = e^{-4t_2^2} \, .$$

Dunque, la v.a. X_1 è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(1,4)$, mentre la v.a. X_2 è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(0,8)$. Le v.a. X_1 e X_2 sono indipendenti dal momento che

$$\varphi_X(t_1, t_2) = \varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2) \, .$$ ♣

● **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ tale che la v.a. X_n possiede f.r. data da

$$F_{X_n}(x) = (1 - e^{-nx}) \, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x) \, .$$

Si verifichi che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$, fornendo i dettagli di questa affermazione. Successivamente, si determini se risulta $X_n \xrightarrow{P} 0$.

♠ **Soluzione.** Per ogni $x \in]-\infty, 0]$ si ha banalmente $\lim_n F_{X_n}(x) = 0$. Inoltre, per ogni $x \in]0, \infty[$ si ha

$$\lim_n F_{X_n}(x) = \lim_n (1 - e^{-nx}) = 1 \, .$$

Dunque, $F_{X_n}(x)$ converge a $F_X(x) = \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$ per ogni punto di continuità di F_X e quindi $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$. Dal momento che la convergenza in distribuzione verso una v.a. degenere implica la convergenza in probabilità, si ha anche $X_n \xrightarrow{P} 0$. ♣

● **Esercizio 6.** Si consideri il processo di Itô X tale che $dX_t = t dt + dB_t$. Inoltre, si consideri la funzione $g(x) = x^2$. Si determini l'espressione di $dg(X_t)$.

♠ **Soluzione.** Si noti che

$$X_t = \int_0^t s \, ds + \int_0^t dB_s = \frac{t^2}{2} + B_t \, .$$

Dalla formula di Itô si ha dunque

$$dX_t^2 = 2X_t \, dX_t + dt = (t^3 + 2tB_t + 1) \, dt + (t^2 + 2B_t) \, dB_t \, .$$ ♣

Esame del 19 Settembre 2018

● **Esercizio 1.** Un test ematico rivela la presenza di una patologia con probabilità pari a 0.95, mentre produce falsi positivi con probabilità pari a 0.01. Se in una popolazione la probabilità di avere la patologia è pari a 0.005, si determini la probabilità di avere la patologia dato che il test ematico è risultato positivo. Si commenti l'efficacia del test ematico.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento relativo alla presenza della patologia, mentre sia E l'evento relativo alla positività al test. Si ha $P(E_1) = 0.005$ e quindi $P(E_1^c) = 0.995$. Inoltre, $P(E \mid E_1) = 0.95$ e $P(E \mid E_1^c) = 0.01$. Dal momento che gli eventi E_1 e E_1^c costituiscono una partizione dello spazio fondamentale, applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E \mid E_1)P(E_1) + P(E \mid E_1^c)P(E_1^c) = 0.0147 \,.$$

Considerando inoltre la Formula di Bayes, si ha

$$P(E_1 \mid E) = \frac{P(E \mid E_1)P(E_1)}{P(E)} = 0.3231 \,.$$

Il test ematico non è dunque efficace. Questo fatto è dovuto alla rarità della patologia e alla probabilità relativamente elevata di falsi positivi. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Al fine di una piena comprensione dell'esercizio, la precedente struttura clinica può essere riformulata in termini di un classico esperimento aleatorio. Si supponga di disporre di due urne che contengono palline rosse e nere. Successivamente, si scelga un'urna in modo aleatorio e si estragga una pallina dall'urna selezionata. Si indichi con E_1 l'evento di avere scelto la prima urna e con E l'evento di avere estratto la pallina rossa. Inoltre, si assuma che $P(E_1) = p$ e quindi si ha anche $P(E_1^c) = 1 - p$. Inoltre, si assuma che $P(E \mid E_1) = p_1$ e $P(E \mid E_1^c) = p_2$. Applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E \mid E_1)P(E_1) + P(E \mid E_1^c)P(E_1^c) = p_1 p + p_2(1 - p) \,.$$

Dalla Formula di Bayes, si ha

$$P(E_1 \mid E) = \frac{p_1 p}{p_1 p + p_2(1-p)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{p} - 1\right)\left(\frac{p_2}{p_1}\right)} \,.$$

Dunque, $P(E_1 \mid E)$ diminuisce al diminuire di p e all'aumentare del rapporto $\frac{p_2}{p_1}$. Inoltre, dal momento che si ha $P(E_1^c \mid E) = 1 - P(E_1 \mid E)$, per questa ultima probabilità valgono considerazioni inverse. Dunque, si desidera che $P(E_1 \mid E) \geq \alpha$, deve risultare

$$\frac{p_2}{p_1} \leq \frac{1-\alpha}{\alpha}\,\frac{p}{1-p} \,.$$

♦

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \mathbf{1}_{]0,1[}(x) \,,$$

si determini la d.p. della v.a. trasformata $Y = \max(X, 1 - X)$.

♠ **Soluzione.** Data la funzione $g(x) = \max(x, 1 - x)$, si noti che l'immagine dell'intervallo $]0, 1[$ è data dall'intervallo $[\frac{1}{2}, 1[$, ovvero $g(]0, 1[) = [\frac{1}{2}, 1[$. Inoltre, l'immagine inversa dell'intervallo $[\frac{1}{2}, y]$ è data dall'intervallo $[1 - y, y]$, ovvero $g^{-1}([\frac{1}{2}, y]) = [1 - y, y]$. In questo caso, dal momento che la v.a. X è assolutamente continua, si ha

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \in [1-y, y])\,\mathbf{1}_{[\frac{1}{2},\infty[}(y) = (F_X(y) - F_X(1-y))\,\mathbf{1}_{[\frac{1}{2},\infty[}(y) \,,$$

ovvero la v.a. Y ammette d.p. data da

$$f_Y(y) = (f_X(y) + f_X(1-y))\,\mathbf{1}_{[\frac{1}{2},\infty[}(y) = 2\,\mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1[}(y) \,.$$

Dunque, la v.a. Y è distribuita con legge Uniforme su $]\frac{1}{2}, 1[$. ♣

• **Esercizio 3.** Si consideri la v.a. assolutamente continua X_1 con d.p.

$$f_{X_1}(x_1) = \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) \,.$$

Si consideri inoltre la v.a. X_2 tale che la d.p. condizionata di X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$ risulta

$$f_{X_2|X_1=x_1}(x_2) = \frac{1}{x_1}\,\mathbf{1}_{]0,x_1[}(x_2)\ .$$

Si determini $\mathrm{E}[X_2]$ e $\mathrm{Var}[X_2]$.

♠ **Soluzione.** Considerato il v.v.a. $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$, dalla definizione di d.p. condizionata si ha

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1}\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\mathbf{1}_{]0,x_1[}(x_2)\ .$$

Dunque, dalla definizione di valore atteso e per $r = 1, 2, \ldots$, si ha

$$\mathrm{E}[X_2^r] = \int_0^1\int_0^{x_1} x_2^r \cdot \frac{1}{x_1}\,dx_1 dx_2 = \frac{1}{(r+1)^2}\ ,$$

da cui $\mathrm{E}[X_2] = \frac{1}{4}$ e $\mathrm{E}[X_2^2] = \frac{1}{9}$. Risulta infine $\mathrm{Var}[X_2] = \frac{7}{144}$. ♣

• **Esercizio 4.** Data la v.a. discreta X con f.g.

$$G_X(t) = \frac{1}{5}\,(3 + 2t)\ ,$$

se il v.v.a. $(X_1, \ldots, X_n)$ possiede componenti indipendenti ed equivalenti in distribuzione alla v.a. X, si determini la legge della v.a. somma $Y = \sum_{i=1}^n X_i$.

♠ **Soluzione.** Dal momento che

$$G_X(t) = \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\,t\right)\ ,$$

la v.a. X è distribuita con legge di Bernoulli $\mathcal{B}(1, \frac{2}{5})$. Dunque, per le proprietà della f.g. la v.a. Y è distribuita con legge Binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{2}{5})$. ♣

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ tale che la v.a. X_n possiede f.r. data da

$$F_{X_n}(x) = \left(x - \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n}\right)\mathbf{1}_{]0,1[}(x) + \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)\ .$$

Si determini la legge della v.a. X, tale che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n \to \infty$.

♠ **Soluzione.** Per ogni $x \in\,]-\infty, 0]$ si ha $\lim_n F_{X_n}(x) = 0$ e per ogni $x \in [1, \infty[$ si ha $\lim_n F_{X_n}(x) = 1$. Inoltre, risulta

$$\left|\frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n}\right| \leq \frac{1}{2\pi n}$$

e per ogni $x \in\,]0, 1[$ si ha

$$\lim_n F_{X_n}(x) = \lim_n \left(x - \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n}\right) = x\ .$$

Dunque, si ottiene infine che

$$F_X(x) = x\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x) + \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)\ ,$$

ovvero la v.a. X è distribuita con legge Uniforme su $]0, 1[$. ♣

• **Esercizio 6.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{[0,T]}$, si determini l'espressione di $d(tB_t^2)$.

♠ **Soluzione.** Applicando la formula semplificata di integrazione stocastica per parti, ovvero

$$d(h(t)g(B_t)) = h'(t)g(B_t)\,dt + h(t)g'(B_t)\,dB_t + \frac{1}{2}\,h(t)g''(B_t)\,dt\,,$$

con $h(t) = t$ e $g(x) = x^2$, si ha

$$d(tB_t^2) = (B_t^2 + t)\,dt + 2tB_t\,dB_t\,.$$

♣

Esame del 17 Giugno 2019

• **Esercizio 4.** Data la v.a. discreta X con f.g.

$$G_X(t) = e^{t-1}\,,$$

se il v.v.a. $(X_1, \ldots, X_n)$ possiede componenti indipendenti ed equivalenti in distribuzione alla v.a. X, si determini la legge della v.a. somma $Y = \sum_{i=1}^n X_i$.

♠ **Soluzione.** La v.a. X è distribuita con legge di Poisson $\mathcal{P}(1)$. Dunque, per le proprietà della f.g., la f.g. della v.a. Y è data da

$$G_Y(t) = e^{n(t-1)}\,,$$

ovvero la v.a. Y è distribuita con legge di Poisson $\mathcal{P}(n)$. ♣

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ tale che la v.a. X_n possiede f.r. data da

$$F_{X_n}(x) = (1 - (1 - x)^n)\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x) + \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)\,.$$

Si verifichi che $X_n \xrightarrow{P} 0$.

♠ **Soluzione.** La v.a. X_n è assolutamente continua e ammette d.p. data da

$$f_{X_n}(x) = n(1 - x)^{n-1}\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x)\,.$$

Si noti che la v.a. X_n è distribuita con legge Beta ridotta $\mathcal{BE}(0, 1, 1, n)$. Dunque, risulta

$$\mathrm{E}[X_n] = \frac{1}{n+1}$$

e

$$\mathrm{Var}[X_n] = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\,.$$

Dal momento che $\lim_n \mathrm{E}[X_n] = 0$ e $\lim_n \mathrm{Var}[X_n] = 0$, per le proprietà della convergenza in probabilità si ha $X_n \xrightarrow{P} 0$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** L'esercizio poteva essere risolto in modo alternativo come segue. Banalmente, per ogni $x \in\,]-\infty, 0]$ si ha $\lim_n F_{X_n}(x) = 0$, mentre per $x \in [1, \infty]$ si ha $\lim_n F_{X_n}(x) = 0$. Inoltre, per ogni $x \in\,]0, 1[$ risulta

$$\lim_n F_{X_n}(x) = \lim_n (1 - (1 - x)^n) = 1\,.$$

Dunque, $F_{X_n}(x)$ converge a $F_X(x) = \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$ per ogni punto di continuità di F_X e quindi $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$. Dal momento che la convergenza in distribuzione verso una v.a. degenere implica la convergenza in probabilità, si ha anche $X_n \xrightarrow{P} 0$. ♦

● **Esercizio 6.** Tenendo presente la formula di integrazione stocastica per parti, si determini l'espressione dell'integrale di Itô

$$\int_0^t e^{B_s}\,dB_s\,.$$

♠ **Soluzione.** Applicando la formula semplificata di integrazione stocastica per parti, ovvero

$$\int_0^t h(s)g'(B_s)\,dB_s = h(s)g(B_s)|_0^t - \int_0^t h'(s)g(B_s)\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t h(s)g''(B_s)\,ds\,,$$

con $h(t) = 1$ e $g(x) = e^x$, si ha

$$\int_0^t e^{B_s}\,dB_s = e^{B_t} - 1 - \frac{1}{2}\int_0^t e^{B_s}\,ds\,.$$ ♣

Esame del 15 Luglio 2019

● **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente f.g.m.

$$G_X(t_1,t_2) = e^{2t_1+t_2-3}\,,$$

si determini le leggi delle due componenti marginali. Si verifichi inoltre se le due componenti marginali sono indipendenti.
♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.g., le f.g. delle v.a. X_1 e X_2 sono rispettivamente date da

$$G_{X_1}(t_1) = G_X(t_1,1) = e^{2(t_1-1)}$$

e

$$G_{X_2}(t_2) = G_X(1,t_2) = e^{t_2-1}\,,$$

ovvero la v.a. X_1 è distribuita con legge di Poisson $\mathcal{P}(2)$, mentre la v.a. X_2 è distribuita con legge di Poisson $\mathcal{P}(1)$. Dal momento che

$$G_X(t_1,t_2) = G_{X_1}(t_1)G_{X_2}(t_2)\,,$$

le due componenti marginali sono indipendenti. ♣

● **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ tale che la v.a. X_n possiede f.r. data da

$$F_{X_n}(x) = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x) + \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)\,,$$

dove $\lfloor x \rfloor$ denota il più grande numero intero minore o uguale a x. Si determini la legge della v.a. X, tale che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n \to \infty$.
♠ **Soluzione.** Si osservi che per ogni $x \in\,]-\infty, 0]$ si ha $\lim_n F_{X_n}(x) = 0$ e per ogni $x \in [1,\infty[$ si ha $\lim_n F_{X_n}(x) = 1$. Inoltre, per $x \in\,]0,1[$ risulta

$$0 \leq x - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq \frac{1}{n}$$

e per ogni $x \in\,]0,1[$ si ha

$$\lim_n F_{X_n}(x) = \lim_n \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x \; .$$

Dunque, si ottiene infine che

$$F_X(x) = x\mathbf{1}_{]0,1[}(x) + \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x) \; ,$$

ovvero la v.a. X è distribuita con legge Uniforme su $]0,1[$. ♣

● **Esercizio 6.** Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = X_t \, dt + 3X_t \, dB_t$$

con condizione iniziale $X_0 = C$ e se ne determini la soluzione.

♠ **Soluzione.** L'equazione differenziale stocastica è quella relativa ad un moto Browniano geometrico con $\mu = 1$ e $\sigma = 3$ e dunque risulta

$$X_t = Ce^{-\frac{7}{2}t + 3B_t} \; .$$ ♣

Esame del 2 Settembre 2019

● **Esercizio 1.** Un'urna contiene 10 palline, in modo tale che 4 palline sono bianche e 6 palline sono nere. Una prima pallina viene estratta dall'urna. Se la pallina è bianca vengono introdotte nell'urna 3 palline bianche, altrimenti vengono introdotte nell'urna 3 palline nere, ottenendo in questa maniera un'urna composta da 12 palline. Se una seconda pallina viene estratta dall'urna, si determini la probabilità che sia bianca.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento relativo alla prima estrazione di una pallina bianca dall'urna, mentre sia E l'evento relativo alla seconda estrazione di una pallina bianca. Si ha $P(E_1) = \frac{2}{5}$ e quindi $P(E_1^c) = \frac{3}{5}$. Inoltre, se alla prima estrazione viene estratta una pallina bianca la nuova composizione dell'urna è di 6 palline bianche e 6 nere, mentre se viene estratta una pallina nera la nuova composizione dell'urna è di 4 palline bianche e 8 nere. Quindi, risulta $P(E \mid E_1) = \frac{1}{2}$ e $P(E \mid E_1^c) = \frac{1}{3}$. Applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E \mid E_1)P(E_1) + P(E \mid E_1^c)P(E_1^c) = \frac{2}{5} \; .$$ ♣

● **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = c\sqrt{x(1-x)}\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x) \; ,$$

si determini il valore della costante $c > 0$.

♠ **Soluzione.** Data la struttura di f_X, la v.a. X è distribuita con legge Beta ridotta $\mathcal{BE}(0,1,\frac{3}{2},\frac{3}{2})$. Dunque deve essere

$$c = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{3}{2})^2} = \frac{8}{\pi} \; .$$ ♣

● **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ con d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\mathbf{1}_{]0,2[}(x_2)$$

si determini la d.p. della v.a. prodotto $Y = X_1 X_2$.

♠ **Soluzione.** Dall'espressione della d.p. della v.a. prodotto risulta

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x)\mathbf{1}_{]0,2[}\Big(\frac{y}{x}\Big)\,\frac{1}{|x|}\,dx\;,$$

ovvero

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathbf{1}_{]\frac{y}{2},\infty[}(x)\mathbf{1}_{]0,2[}(y)\,\frac{1}{x}\,dx = -\frac{1}{2}\log\Big(\frac{y}{2}\Big)\,\mathbf{1}_{]0,2[}(y)\;.$$ ♣

• **Esercizio 4.** Data la v.a. X che ammette d.p. data da

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\;,$$

si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ tale che $X_n = n^{-1}X$. Si verifichi che $X_n \xrightarrow{P} 0$ per $n \to \infty$, ma non che $X_n \xrightarrow{L^2} 0$.

♠ **Soluzione.** La v.a. X è distribuita con legge di Cauchy, ovvero con legge t di Student con 1 grado di libertà. La f.r. della v.a. X è data da

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)\;.$$

Dalla definizione di convergenza in probabilità, tenendo presente che $f_X(x) = f_X(-x)$, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\lim_n P(|X_n| > \varepsilon) = \lim_n P(|X| > n\varepsilon) = \lim_n 2F_X(-n\varepsilon) = 0\;.$$

Dunque, risulta $X_n \xrightarrow{P} 0$. Per quanto riguarda la convergenza in media quadratica, $\mathrm{E}[X^2]$ non è definito e quindi anche $\mathrm{E}[X_n^2]$ non è definito. Dunque, non si ha $X_n \xrightarrow{L^2} 0$. ♣

• **Esercizio 5.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{t\in[0,\infty[}$, assumendo che $s \leq t$, si calcoli $\mathrm{E}[B_s B_t^2]$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$\mathrm{E}[B_s B_t^2] = \mathrm{E}[B_s(B_t - B_s + B_s)^2] = \mathrm{E}[B_s(B_t - B_s)^2 + 2B_s^2(B_t - B_s) + B_s^3]\;.$$

Quindi, per le proprietà del moto Browniano, risulta

$$\mathrm{E}[B_s B_t^2] = \mathrm{E}[B_s]\mathrm{E}[(B_t - B_s)^2] + 2\mathrm{E}[B_s^2]\mathrm{E}[B_t - B_s] + \mathrm{E}[B_s^3] = 0\;,$$

dal momento che $\mathrm{E}[B_s] = \mathrm{E}[B_t - B_s] = \mathrm{E}[B_s^3] = 0$.

♥ **Ulteriori rilievi.** L'esercizio poteva essere risolto in modo immediato tenendo presente che $\mathrm{E}[B_s B_t^2]^2 \leq \mathrm{E}[B_s^2]\mathrm{E}[B_t^4] < \infty$ per la disuguaglianza di Schwarz e che $B_s B_t^2 \stackrel{\mathcal{L}}{=} -B_s B_t^2$, da cui $\mathrm{E}[B_s B_t^2] = 0$. ♦

• **Esercizio 6.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{[0,T]}$, si determini l'espressione di $d(tB_t^3)$.

♠ **Soluzione.** Applicando la formula semplificata di integrazione stocastica per parti, ovvero

$$d(h(t)g(B_t)) = h'(t)g(B_t)\,dt + h(t)g'(B_t)\,dB_t + \frac{1}{2}\,h(t)g''(B_t)\,dt\,,$$

con $h(t) = t$ e $g(x) = x^3$, si ha

$$d(tB_t^3) = (B_t^3 + 3tB_t)\,dt + 3tB_t^2\,dB_t\,. \qquad \clubsuit$$

Esame del 18 Settembre 2019

● **Esercizio 1.** Si consideri tre lanci indipendenti di un dado equilibrato e si determini la probabilità di ottenere al massimo due volte la faccia contrassegnata dal 6.

♠ **Soluzione.** Se la v.a. X rappresenta il numero di volte in cui si è ottenuta la faccia contrassegnata dal 6 nell'esperimento aleatorio, allora la v.a. X è distribuita con legge Binomiale $\mathcal{B}(3, \frac{1}{6})$. Dunque, risulta

$$P(X = 3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3\,,$$

ovvero la probabilità richiesta è data da

$$P(X \leq 2) = 1 - P(X = 3) = \frac{215}{216}\,. \qquad \clubsuit$$

● **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = e^{-x}\,\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)\,,$$

si consideri la v.a. trasformata $Y = e^X$ e si calcoli $\mathrm{E}[Y]$.

♠ **Soluzione.** Si noti che la v.a. X è distribuita con legge Esponenziale, ovvero $\mathcal{G}(0, 1, 1)$. Per le proprietà del valore atteso, si ha

$$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[e^X] = \int_0^\infty e^x \cdot e^{-x}\,dx = \infty\,. \qquad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Anche se l'esercizio può essere risolto senza bisogno di calcolare esplicitamente la legge della v.a. trasformata $Y = e^X$, dal momento che $g(x) = e^x$ è una funzione biunivoca e che la v.a. X è assolutamente continua, allora risulta

$$f_Y(y) = e^{-\log(y)}\,\mathbf{1}_{]0,\infty[}(\log(y)) \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y^2}\,\mathbf{1}_{]1,\infty[}(y)\,.$$

Dunque, la v.a. X è distribuita con legge di Pareto con parametro di forma pari ad 1 ed è immediato verificare di nuovo che $\mathrm{E}[Y] = \infty$. ♦

● **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = 2\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2 - x_1)\,,$$

si determini $\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1]$ e $\mathrm{Var}[X_2 \mid X_1 = x_1]$.

♠ **Soluzione.** La d.p. della v.a. X_1 è data da

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{x_1}^{1} 2\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\,dx_2 = 2(1-x_1)\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\,.$$

La v.a. X_1 è distribuita con legge Beta $\mathcal{BE}(0,1,1,2)$. Dalla definizione di d.p. condizionata si ha

$$f_{X_2|X_1=x_1}(x_2) = \frac{1}{1-x_1}\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2-x_1) = \frac{1}{1-x_1}\,\mathbf{1}_{]x_1,1[}(x_2)\,,$$

per $x_1 \in]0,1[$. La legge condizionata della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$ è Uniforme su $]x_1,1[$. Dunque, si ha

$$\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1] = \frac{1}{1-x_1}\int_{x_1}^{1} x_2\,dx_2 = \frac{1+x_1}{2}$$

e

$$\mathrm{E}[X_2^2 \mid X_1 = x_1] = \frac{1}{1-x_1}\int_{x_1}^{1} x_2^2\,dx_2 = \frac{1+x_1+x_1^2}{3}\,,$$

da cui

$$\mathrm{Var}[X_2 \mid X_1 = x_1] = \frac{(1-x_1)^2}{12}\,. \qquad ♣$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che il valore atteso condizionato della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$ è una funzione lineare di x_1. Anche se non è richiesto dall'esercizio, si noti che

$$f_{X_2}(x_2) = \int_0^{x_2} 2\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\,dx_1 = 2x_2\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\,.$$

In questo caso, la v.a. X_2 è distribuita con legge Beta $\mathcal{BE}(0,1,2,1)$. Si ha

$$\mathrm{E}[X_2] = \int_0^1 x_2 \cdot 2x_2\,dx_2 = \frac{2}{3}\,.$$

Questo risultato poteva essere ottenuto immediatamente dalla relazione

$$\mathrm{E}[X_2] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[X_2 \mid X_1]] = \int_0^1 \frac{1+x_1}{2}\cdot 2(1-x_1)\,dx_1 = \frac{2}{3}\,.$$

Inoltre, si ha che

$$\mathrm{E}[X_2^2] = \int_0^1 x_2^2 \cdot 2x_2\,dx_2 = \frac{1}{2}$$

e dunque $\mathrm{Var}[X_2] = \frac{1}{18}$. Inoltre, si ha

$$\mathrm{E}[\mathrm{Var}[X_2 \mid X_1 = x_1]] = \frac{1}{12}\,(1 - 2\mathrm{E}[X_1] + \mathrm{E}[X_1^2]) = \frac{1}{24}$$

e

$$\mathrm{Var}[\mathrm{E}[X_2 \mid X_1]] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[X_2 \mid X_1]^2] - \mathrm{E}[X_2]^2 = \frac{1}{4}\,(1 + 2\mathrm{E}[X_1] + \mathrm{E}[X_1^2]) - \frac{4}{9} = \frac{1}{72}\,.$$

Infine, si ha

$$\mathrm{Var}[X_2] = \mathrm{E}[\mathrm{Var}[X_2 \mid X_1]] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}[X_2 \mid X_1]] = \frac{1}{18} \, ,$$

che conferma il risultato ottenuto in precedenza. ♦

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2) = e^{-t_1^2 - t_2^2 - t_1 t_2} \, ,$$

si determini $\mathrm{Cov}[X_1, X_2]$.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.c. si ha

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1, t_2 = 0} = \; - 1 = \mathrm{i}^2 \mathrm{E}[X_1 X_2] \, ,$$

ovvero $\mathrm{E}[X_1 X_2] = 1$. Inoltre, si ha

$$\left. \frac{\partial \varphi_X(t_1, t_2)}{\partial t_1} \right|_{t_1, t_2 = 0} = 0 = \mathrm{i}\mathrm{E}[X_1] \, ,$$

ovvero $\mathrm{E}[X_1] = 0$. Inoltre, dal momento che $\varphi_X(t_1, t_2) = \varphi_X(t_2, t_1)$, per simmetria si ottiene $\mathrm{E}[X_2] = 0$. Dunque, $\mathrm{Cov}[X_1, X_2] = 1$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Il risultato poteva essere ottenuto immediatamente, notando che φ_X è la f.c.m. di un v.v.a. X con legge Normale Multivariata $\mathcal{N}_2(\mu_X, \Sigma_X)$, dove il vettore medio è dato da $\mu_X = (0, 0)^{\mathrm{T}}$ e la matrice di varianza-covarianza è data da

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

♦

• **Esercizio 5.** Dato il moto Browniano $B = (B_t)_{t \in [0, \infty[}$ ed il p.a. $M = (M_t)_{t \in [0, \infty[}$ tale che $M_t = B_t^2 - c(t)$, si determini la funzione $c(t)$ in modo che M sia una martingala.

♠ **Soluzione.** Per ogni t si ha

$$\mathrm{E}[|M_t|] = \mathrm{E}[|B_t^2 - c(t)|] \leq \mathrm{E}[|B_t^2| + |c(t)|] = \mathrm{E}[B_t^2] + |c(t)| = t + |c(t)| \, .$$

Dunque, deve essere $c(t) < \infty$. Inoltre, dalla definizione di martingala si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] &= \mathrm{E}[(B_t - B_s + B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] - c(t) \\ &= \mathrm{E}[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] + 2B_s \mathrm{E}[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s] + B_s^2 - c(t) \\ &= t - s + B_s^2 - c(t) = M_s + t - c(t) \, . \end{aligned}$$

Quindi, affinchè M sia una martingala deve risultare $c(t) = t$. ♣

• **Esercizio 6.** Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = \frac{1}{1 - t} (1 - X_t) \, dt + dB_t \, ,$$

con condizione iniziale $X_0 = 0$, dove $t \in [0, 1[$, e se ne determini la soluzione.

♠ **Soluzione.** Risulta semplice verificare che il processo $X = (X_t)_{t \in [0,1[}$ è un processo di Itô. Si consideri l'ulteriore processo di Itô $Y = (Y_t)_{t \in [0,1[}$, dove $Y_t = (1 - t)^{-1}$ è un processo deterministico. Dalla formula di integrazione per parti, si ha

$$d(X_tY_t) = \frac{1}{1-t}\,dX_t + \frac{1}{(1-t)^2}\,X_t\,dt = \frac{1}{(1-t)^2}\,dt + \frac{1}{1-t}\,dB_t\ ,$$

ovvero

$$\frac{1}{1-t}\,X_t = \int_0^t \frac{1}{(1-s)^2}\,ds + \int_0^t \frac{1}{1-s}\,dB_s\ .$$

Dunque, la soluzione $X = (X_t)_{t\in[0,1[}$ dell'equazione differenziale stocastica è tale che

$$X_t = t + (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}\,dB_s\ .$$

L'esercizio poteva essere risolto immediatamente riconoscendo che l'equazione differenziale stocastica è quella relativa ad un ponte Browniano. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si noti che $\int_0^t (1-s)^{-1}dB_s$ è un integrale di Wiener e quindi, essendo $\int_0^t (1-s)^{-2}ds = \frac{t}{1-t}$, è una v.a. con legge Normale $\mathcal{N}(0,\frac{t}{1-t})$. In pratica, la v.a. X_t è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(t, t(1-t))$. ♦

Esame dell'8 Giugno 2020

• **Esercizio 1.** In un test a risposta multipla sono possibili 4 risposte, di cui una solamente è corretta. Un soggetto sottoposto al test conosce la risposta esatta con una probabilità pari a $\frac{7}{10}$ e risponde altrimenti in modo casuale. Se il soggetto risponde correttamente al test, si determini la probabilità che conosca effettivamente la risposta esatta.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E l'evento che il soggetto fornisca la risposta esatta, mentre siano E_1 e E_1^c rispettivamente gli eventi che il soggetto conosca o non conosca la risposta esatta. Dunque, risulta $P(E_1) = \frac{7}{10}$ e $P(E_1^c) = \frac{3}{10}$. Ovviamente, si ha $P(E \mid E_1) = 1$, mentre dalle ipotesi risulta $P(E \mid E_1^c) = \frac{1}{4}$. Applicando la Legge delle Probabilità Totali si ha

$$P(E) = P(E \mid E_1)P(E_1) + P(E \mid E_1^c)P(E_1^c) = \frac{31}{40}\ .$$

Sulla base della Formula di Bayes si ottiene la probabilità richiesta, ovvero

$$P(E_1 \mid E) = \frac{P(E \mid E_1)P(E_1)}{P(E)} = \frac{28}{31}\ .$$ ♣

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con f.r.

$$F_X(x) = e^{-x^{-4}}\,\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)\ ,$$

si verifichi che effettivamente F_X è una f.r. e si calcoli $\mathrm{E}[X]$.

♠ **Soluzione.** La f.r. è assolutamente continua dal momento che $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u)du$, dove la versione della d.p. può essere scelta come

$$f_X(x) = 4x^{-5}e^{-x^{-4}}\,\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)\ .$$

In effetti, F_X è una f.r. dal momento che $0 \le F_X(x) \le 1$ e $\frac{d}{dx}F_X(x) \ge 0$. Inoltre, risulta

$$\mathrm{E}[X] = 4\int_0^\infty x^{-4} e^{-x^{-4}}\, dx = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{4}} e^{-x}\, dx = \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) . \qquad ♣$$

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{3}{4}\,\mathbf{1}_{]-1,1[}(x_1)\mathbf{1}_{]0,1-x_1^2[}(x_2) ,$$

si determini le d.p. delle componenti marginali.
♠ **Soluzione.** Le d.p.m. della prima e della seconda componente marginale sono rispettivamente date da

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{3}{4}\int_0^{1-x_1^2} \mathbf{1}_{]-1,1[}(x_1)\, dx_2 = \frac{3}{4}\,(1 - x_1^2)\mathbf{1}_{]-1,1[}(x_1)$$

e

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{3}{4}\int_{-\sqrt{1-x_2}}^{\sqrt{1-x_2}} \mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\, dx_1 = \frac{3}{2}\,\sqrt{1 - x_2}\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2) . \qquad ♣$$

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2, X_3)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2, t_3) = e^{\mathrm{i}t_1 - t_1^2 - t_2^2 - t_3^2} ,$$

si determini le leggi delle componenti marginali. Si verifichi inoltre se le componenti marginali sono indipendenti.
♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.c.m. si ha

$$\varphi_{X_1}(t_1) = \varphi_X(t_1, 0, 0) = e^{\mathrm{i}t_1 - t_1^2}$$

e

$$\varphi_{X_2}(t_2) = \varphi_X(0, t_2, 0) = e^{-t_2^2} ,$$

mentre

$$\varphi_{X_3}(t_3) = \varphi_X(0, 0, t_3) = e^{-t_3^2} .$$

Dunque, la v.a. X_1 è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(1, 2)$, mentre le v.a. X_2 e X_3 sono rispettivamente distribuite con legge Normale $\mathcal{N}(0, 2)$. Le componenti marginali sono indipendenti, dal momento che

$$\varphi_X(t_1, t_2, t_3) = \varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2)\varphi_{X_3}(t_3) . \qquad ♣$$

• **Esercizio 5.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{t\in[0,\infty[}$, assumendo che $s \leq t$ e tenendo presente che $\mathrm{E}[B_s^4] = 3s^2$, si calcoli $\mathrm{E}[B_s^2 B_t^2]$.
♠ **Soluzione.** Si ha

$$\mathrm{E}[B_s^2 B_t^2] = \mathrm{E}[B_s^2(B_t - B_s + B_s)^2] = \mathrm{E}[B_s^2(B_t - B_s)^2 + 2B_s^3(B_t - B_s) + B_s^4] .$$

Per le proprietà del moto Browniano, risulta

$$\mathrm{E}[B_s^2 B_t^2] = \mathrm{E}[B_s^2]\mathrm{E}[(B_t - B_s)^2] + 2\mathrm{E}[B_s^3]\mathrm{E}[B_t - B_s] + \mathrm{E}[B_s^4] = st + 2s^2 ,$$

dal momento che $\mathrm{E}[B_s^2] = s$, $\mathrm{E}[(B_t - B_s)^2] = t - s$ e $\mathrm{E}[B_t - B_s] = 0$. ♣

• **Esercizio 6.** Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = \, - X_t \, dt + dB_t \, ,$$

con condizione iniziale $X_0 = C$, e se ne determini la soluzione.

♠ **Soluzione.** Risulta semplice verificare che il processo $X = (X_t)_{t \in [0,\infty[}$ è un processo di Itô. Si consideri l'ulteriore processo di Itô $Y = (Y_t)_{t \in [0,\infty[}$, dove $Y_t = e^t$ è un processo deterministico. Dalla formula di integrazione per parti, si ha

$$d(X_t Y_t) = e^t dX_t + e^t X_t dt = e^t dB_t \, ,$$

ovvero

$$e^t X_t = C + \int_0^t e^s \, dB_s \, .$$

Dunque, la soluzione $X = (X_t)_{t \in [0,1[}$ dell'equazione differenziale stocastica è tale che

$$X_t = Ce^{-t} + e^{-t} \int_0^t e^s \, dB_s \, .$$

L'esercizio poteva essere risolto immediatamente riconoscendo che l'equazione differenziale stocastica è quella relativa ad un processo di Ornstein e Uhlenbeck con $\mu = 1$ e $\sigma = 1$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si noti che $\int_0^t e^s dB_s$ è un integrale di Wiener e quindi, essendo $\int_0^t e^{2s} ds = \frac{1}{2}(e^{2t} - 1)$, è una v.a. con legge Normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2}(e^{2t} - 1))$. ♦

Esame del 6 Luglio 2020

• **Esercizio 1.** Un test di laboratorio verifica la presenza di una patologia con una probabilità pari a 0.99 e produce falsi positivi con una probabilità pari a 0.01. Se in una popolazione la patologia è presente con una probabilità pari a 0.01, si determini la probabilità che un soggetto risultato positivo al test presenti effettivamente la patologia.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento relativo alla presenza della patologia, mentre sia E l'evento relativo alla positività al test. Si ha $P(E_1) = 0.01$ e quindi $P(E_1^c) = 0.99$. Inoltre, $P(E \mid E_1) = 0.99$ e $P(E \mid E_1^c) = 0.01$. Dal momento che gli eventi E_1 e E_1^c costituiscono una partizione dello spazio fondamentale, applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E \mid E_1)P(E_1) + P(E \mid E_1^c)P(E_1^c) = 0.0198 \, .$$

Considerando inoltre la Formula di Bayes, si ha

$$P(E_1 \mid E) = \frac{P(E \mid E_1)P(E_1)}{P(E)} = 0.50 \, .$$ ♣

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{1}{2}x^2} \, ,$$

si determini la d.p. della v.a. trasformata $Y = \sqrt{|X|}$.

♠ **Soluzione.** Data la funzione $g(x) = \sqrt{|x|}$, l'immagine inversa dell'intervallo $[0,y]$ è data dall'intervallo $[-y^2, y^2]$, ovvero $g^{-1}([0,y]) = [-y^2, y^2]$. In questo caso, dal momento che la v.a. X è assolutamente continua, si ha

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \in [-y^2, y^2])\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y) = (F_X(y^2) - F_X(-y^2))\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y)\,,$$

ovvero, dal momento che $f_X(x) = f_X(-x)$,

$$F_Y(y) = (2F_X(y^2) - 1)\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y)\,.$$

Dunque, la v.a. Y ammette d.p. data da

$$f_Y(y) = 2f_X(y^2)\cdot 2y\,\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\,ye^{-\frac{1}{2}y^4}\,\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y)\,.$$ ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si noti che f_Y è effettivamente una d.p. dal momento che

$$\int_0^\infty \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\,ye^{-\frac{1}{2}y^4}\,dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}\,dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1\,.$$ ♦

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2, X_3)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1,t_2,t_3) = e^{-t_1^2-t_2^2-t_3^2-2t_1t_2-\mathrm{i}t_3}\,,$$

si determini la legge della v.a. trasformata somma $Y = X_1 + X_2 + X_3$.
♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.c.m. si ha

$$\varphi_Y(t) = \varphi_X(t,t,t) = e^{-\mathrm{i}t-5t^2}\,.$$

Dunque, la v.a. trasformata somma Y è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(-1,10)$. ♣

• **Esercizio 4.** Si consideri la successione di v.a. $(\sqrt{n}(S_n-1))_{n\geq 1}$ tale che $S_n = n^{-1}X_n$ e la v.a. X_n è distribuita con legge di Poisson $\mathcal{P}(n)$. Tenendo presente il Metodo Delta, si determini la convergenza in legge della v.a. S_n^2 per $n\to\infty$.
♠ **Soluzione.** Si noti che $\mathrm{E}[S_n] = 1$ e $\mathrm{Var}[S_n] = \frac{1}{n}$ e che X_n è la somma di n v.a. indipendenti con legge di Poisson $\mathcal{P}(1)$. Dunque, per il Teorema Centrale del Limite si ha che $\sqrt{n}(S_n-1)\xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ per $n\to\infty$, dove la v.a. Z è distribuita con legge $\mathcal{N}(0,1)$. Sulla base del Metodo Delta, essendo $g(x) = x^2$ e

$$Y_n = \sqrt{n}\,\frac{g(S_n)-g(1)}{|g'(1)|} = \sqrt{n}\,\frac{S_n^2-1}{2}\,,$$

si ottiene dunque che $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ per $n\to\infty$. ♣

• **Esercizio 5.** Se i p.a. $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ e $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sono martingale, si verifichi che il p.a. $M = (X_t + Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ è una martingala.
♠ **Soluzione.** Per ogni t si ha

$$\mathrm{E}[|M_t|] = \mathrm{E}[|X_t + Y_t|] \leq \mathrm{E}[|X_t| + |Y_t|] = \mathrm{E}[|X_t|] + \mathrm{E}[|Y_t|] < \infty\,.$$

Inoltre, dalla definizione di martingala si ha

$$\mathrm{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathrm{E}[X_t + Y_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathrm{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] + \mathrm{E}[Y_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s + Y_s = M_s\,.$$

Dunque, M è una martingala. ♣

• **Esercizio 6.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{[0,T]}$, si determini l'espressione di $d(t^2 B_t)$.
♠ **Soluzione.** Applicando la formula semplificata di integrazione stocastica per parti, ovvero

$$d(h(t)g(B_t)) = h'(t)g(B_t)\,dt + h(t)g'(B_t)\,dB_t + \frac{1}{2}\,h(t)g''(B_t)\,dt\,,$$

con $h(t) = t^2$ e $g(x) = x$, si ha

$$d(t^2 B_t) = 2tB_t\,dt + t^2\,dB_t\,.$$

♣

Esame del 18 Settembre 2020

• **Esercizio 1.** Due atleti partecipano ad una maratona e le loro probabilità di concludere la gara in meno di due ore e dieci minuti sono rispettivamente date da $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$. Se le prestazioni dei due atleti non si influenzano reciprocamente, si determini la probabilità che almeno un atleta completi la maratona in meno di due ore e dieci minuti.
♠ **Soluzione.** Si indichino rispettivamente con E_1 e E_2 gli eventi che il primo e il secondo atleta completino la maratona nel tempo richiesto. In questo caso, tenendo presente che gli eventi E_1 e E_2 sono indipendenti, si ha $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$. Dunque, la probabilità richiesta è data da

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1)P(E_2) = \frac{7}{15}\,.$$

♣

• **Esercizio 2.** Tenendo presente la legge Multinomiale e supponendo che le nascite siano equiprobabili fra i giorni della settimana (ovvero, lunedì, martedì, ..., domenica), dato un gruppo di sette persone determinare la probabilità che le persone siano nate in giorni distinti della settimana e la probabilità che almeno due persone siano nate nello stesso giorno della settimana.
♠ **Soluzione.** Se la v.a. X_j rappresenta il numero di persone nate nel j-esimo giorno della settimana, si consideri il v.v.a. $X = (X_1, \ldots, X_7)^{\mathrm{T}}$. In questo caso, il v.v.a. X è distribuito con legge Multinomiale di parametri 7 e $(\frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{7})^{\mathrm{T}}$. Se p_X rappresenta la f.p.c. di X, la probabilità che le sette persone siano nate in giorni distinti della settimana è data da

$$p_X(1, \ldots, 1) = \binom{7}{1 \ldots 1}\left(\frac{1}{7}\right)^7 = \frac{7!}{7^7} \simeq 0.006\,,$$

mentre la probabilità che almeno due persone siano nate nello stesso giorno della settimana è data da

$$1 - p_X(1, \ldots, 1) = 1 - \frac{7!}{7^7} \simeq 0.994\,.$$

♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si noti che il problema considerato è equivalente a considerare l'inserimento di 7 palline distinguibili in 7 celle in modo che ogni configurazione di palline sia equiprobabile. In generale, se si hanno n palline distinguibili e n celle la probabilità di ottenere una configurazione con una pallina per cella è quindi data da $\frac{n!}{n^n}$. Tenendo presente la formula di Stirling, ovvero $n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$, si ha dunque che

$$\frac{n!}{n^n} \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n}\,,$$

ovvero la probabilità richiesta tende rapidamente a zero per $n \to \infty$. ♦

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = 24\, x_1 x_2 \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1 + x_2)\ ,$$

si determini il valore atteso condizionato $\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1]$.

♠ **Soluzione.** La d.p. della v.a. X_1 è data da

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^{1-x_1} 24x_1x_2\, \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\, dx_2 = 12x_1(1-x_1)^2\, \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\ .$$

Dalla definizione di valore atteso della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$, per $x_1 \in\,]0,1[$ si ha

$$\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1] = \int_0^{1-x_1} x_2\, \frac{2x_2}{(1-x_1)^2}\, dx_2 = \frac{2}{3}\,(1-x_1)\ .$$ ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si noti che il v.v.a. X è distribuito secondo una legge che è “equivalente” alla legge di Dirichlet $\mathcal{D}(2,2,1)$. ♦

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2) = e^{-2t_1^2 - t_2^2 - 2t_1t_2 - 2\mathrm{i}t_2}\ ,$$

si determinino il vettore medio e la matrice di varianza-covarianza.

♠ **Soluzione.** Dal momento che φ_X è la f.c.m. di un v.v.a. X con legge Normale Multivariata, il vettore medio è dato da $\mu_X = (0, -2)^{\mathrm{T}}$ e la matrice di varianza-covarianza è data da

$$\varSigma_X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$ ♣

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ dove la v.a. X_n è distribuita con legge Binomiale Negativa $\mathcal{BN}(n, \frac{n}{n+2})$. Si determini la legge della v.a. X, tale che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n \to \infty$.

♠ **Soluzione.** La f.g. della v.a. X_n è data da

$$G_{X_n}(t) = \left(\frac{\frac{n}{n+2}}{1 - \frac{2t}{n+2}}\right)^n = \left(1 + \frac{2(1-t)}{n}\right)^{-n}.$$

Tenendo presente le proprietà della convergenza in legge, si ha

$$\lim_n G_{X_n}(t) = G_X(t) = e^{2(t-1)}\ ,$$

ovvero la v.a. X è distribuita con legge di Poisson $\mathcal{P}(2)$. ♣

• **Esercizio 6.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{[0,1]}$, si determini la legge dell'integrale stocastico $I = \int_0^1 \sqrt{t} dB_t$.

♠ **Soluzione.** Si noti che I è un integrale di Wiener e che $\int_0^1 t dt = \frac{1}{2} < \infty$. Dunque, I è una v.a. con legge Normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$. ♣

Esame del 22 Febbraio 2021

• **Esercizio 1.** All'esame di ammissione ad un corso di laurea magistrale, i candidati vengono accettati mediante un test. La probabilità di superare il test per un candidato con laurea triennale adatta alla magistrale è $\frac{4}{5}$, mentre quella per un candidato con una laurea triennale non adatta alla magistrale è $\frac{1}{4}$. Se la probabilità che un candidato con una laurea triennale adatta alla magistrale si presenti all'esame di ammissione è $\frac{2}{5}$, si determini la probabilità di aver accettato un candidato con una laurea triennale adatta alla magistrale.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento che un candidato con una laurea triennale adatta alla magistrale si presenti all'esame di ammissione, mentre sia E l'evento che un candidato superi il test. Si ha $P(E_1) = \frac{2}{5}$ e $P(E_1^c) = \frac{3}{5}$. Inoltre, $P(E \mid E_1) = \frac{4}{5}$ e $P(E \mid E_1^c) = \frac{1}{4}$. Dal momento che gli eventi E_1 e E_1^c costituiscono una partizione dello spazio fondamentale, applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E \mid E_1)P(E_1) + P(E \mid E_1^c)P(E_1^c) = \frac{47}{100} .$$

Considerando la Formula di Bayes, la probabilità di aver accettato un candidato con una laurea triennale adatta alla magistrale risulta

$$P(E_1 \mid E) = \frac{P(E \mid E_1)P(E_1)}{P(E)} = \frac{32}{47} \simeq 0.68.$$ ♣

• **Esercizio 2.** Tenendo presente la legge Multinomiale e supponendo che le nascite siano equiprobabili fra i giorni della settimana (ovvero, lunedì, martedì, ..., domenica), dato un gruppo di sette persone si calcoli la probabilità che due persone siano nate di lunedì e due di giovedì.

♠ **Soluzione.** Se la v.a. X_1 rappresenta il numero di persone nate di lunedì, la v.a. X_2 il numero di persone nate di giovedì e la v.a. X_3 il numero di persone nate nei restanti giorni, si consideri il v.v.a. $X = (X_1, X_2, X_3)^{\mathrm{T}}$. In questo caso, X è distribuito con legge Multinomiale di parametri 7 e $(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{5}{7})^{\mathrm{T}}$. Se p_X è la f.p.c. del v.v.a. X, la probabilità richiesta è data da

$$p_X(2,2,3) = \binom{7}{2\,2\,3}\left(\frac{1}{7}\right)^2\left(\frac{1}{7}\right)^2\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{7!5^3}{2!2!3!7^7} \simeq 0.03 .$$ ♣

• **Esercizio 3.** Data la v.a. assolutamente continua X con f.r.

$$F_X(x) = \Phi(x)^2 ,$$

dove Φ rappresenta la f.r. di una v.a. con legge $\mathcal{N}(0,1)$, si verifichi che effettivamente F_X è una f.r.

♠ **Soluzione.** La f.r. è assolutamente continua dal momento che $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$, dove la versione della d.p. può essere scelta come

$$f_X(x) = 2\Phi(x)\phi(x) .$$

In effetti, F_X è una f.r. dal momento che $0 < F_X(x) < 1$, essendo $0 < \Phi(x) < 1$, ed inoltre

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = 2\Phi(x)\phi(x) > 0 ,$$

essendo $\phi(x) > 0$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che $X = \max(Z_1, Z_2)$, dove Z_1 e Z_2 sono v.a. indipendenti e ugualmente distribuite con legge $\mathcal{N}(0,1)$. In effetti, se Z_1 e Z_2 sono v.a. indipendenti, si ha in generale che la f.r. della v.a. X è data da

$$F_X(x) = P(\max(Z_1, Z_2) \le x) = P(Z_1 \le x, Z_2 \le x) = P(Z_1 \le x)P(Z_2 \le x) .$$

Ancora più generalmente, se $X = \max(Z_1, \ldots, Z_n)$ dove $(Z_1, \ldots, Z_n)$ è un v.v.a. a componenti marginali indipendenti, si ha

$$F_X(x) = P(\max(Z_1, \ldots, Z_n) \leq x) = P(Z_1 \leq x, \ldots, Z_n \leq x) = \prod_{i=1}^{n} P(Z_i \leq x)\,.$$

Dunque, se le componenti marginali sono ugualmente distribuite con f.r. F_Z, si ottiene

$$F_X(x) = F_Z(x)^n\,.$$ ♦

• **Esercizio 4.** Si consideri le successioni di v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ definite sullo stesso spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dove $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n \to \infty$ e la v.a. X è distribuita con legge Gamma $\mathcal{G}(0,1,1)$, mentre $Y_n \xrightarrow{P} Y$ per $n \to \infty$ e la v.a. Y è degenere nel valore 2. Si determini la f.r. della v.a. Z a cui converge in legge la successione di v.a. $(X_n + Y_n)_{n\geq 1}$ per $n \to \infty$.

♠ **Soluzione.** Per il Teorema di Cramér-Slutsky si ha

$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z = X + 2\,.$$

Dal momento che X è distribuita con legge Gamma $\mathcal{G}(0,1,1)$, ovvero con legge Esponenziale ridotta, allora Z è distribuita con legge Gamma $\mathcal{G}(2,1,1)$, ovvero con legge Esponenziale con parametro di posizione pari ad 2 e parametro di scala pari a 1. Dunque, la f.r. della v.a. Z è data da

$$F_Z(z) = (1 - e^{-(z-2)})\,\mathbf{1}_{]2,\infty[}(z)\,.$$ ♣

• **Esercizio 5.** Sia dato il moto Browniano $B = (B_t)_{t\in[0,\infty[}$ ed il p.a. $M = (M_t)_{t\in[0,\infty[}$ tale che $M_t = e^{B_t - \frac{1}{2}t}$. Tenendo presente che se X è una v.a. con legge Normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ risulta $\mathrm{E}[e^X] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2}$, si verifichi che M è una martingala.

♠ **Soluzione.** Per ogni t si ha

$$\mathrm{E}[|M_t|] = \mathrm{E}[|e^{B_t - \frac{1}{2}t}|] = e^{-\frac{1}{2}t}\,\mathrm{E}[e^{B_t}] = 1 < \infty\,.$$

Inoltre, dalla definizione di martingala si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] &= \mathrm{E}[e^{B_t - \frac{1}{2}t - B_s + B_s} \mid \mathcal{F}_s] = e^{B_s - \frac{1}{2}t}\,\mathrm{E}[e^{B_t - B_s} \mid \mathcal{F}_s] \\ &= e^{B_s - \frac{1}{2}t}\,\mathrm{E}[e^{B_t - B_s}] = e^{B_s - \frac{1}{2}t} e^{\frac{1}{2}(t-s)} = e^{B_s - \frac{1}{2}s}\,.\end{aligned}$$

Quindi M è effettivamente una martingala. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che il p.a. M è un moto Browniano Geometrico ridotto e quindi per le proprietà dell'integrale di Itô si può immediatamente concludere che M è una martingala. ♦

• **Esercizio 6.** Dati i processi di Itô $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ e $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$, si determini $d(X_t + 2Y_t)$.

♠ **Soluzione.** Dalla formula di Itô per trasformate bivariate si ha

$$d(X_t + 2Y_t) = dX_t + 2dY_t\,.$$ ♣

Esame del 15 Marzo 2021

• **Esercizio 1.** Un macchinario produce pezzi difettosi con probabilità pari a $\frac{4}{100}$. Inoltre, se il macchinario produce un pezzo non difettoso, la probabilità che questo pezzo sia di alta qualità è pari a $\frac{3}{4}$. Se viene scelto casualmente un pezzo prodotto dal macchinario, si determini la probabilità che il pezzo sia di alta qualità.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento che il pezzo prodotto sia difettoso, mentre sia E_2 l'evento che il pezzo prodotto sia di alta qualità. Si ha $P(E_1) = \frac{4}{100}$ e $P(E_1^c) = \frac{96}{100}$. Inoltre, risulta $P(E_2 \mid E_1^c) = \frac{3}{4}$. Tenendo conto che $E_2 \subset E_1^c$ e applicando la definizione di probabilità condizionata, si ottiene

$$P(E_2) = P(E_2 \cap E_1^c) = P(E_2 \mid E_1^c)P(E_1^c) = \frac{72}{100} \, . \qquad ♣$$

• **Esercizio 2.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \, e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} \, ,$$

si determini la d.p. della v.a. $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$.

♠ **Soluzione.** Si osservi che il v.v.a. X è distribuito con legge Normale bivariata $\mathcal{N}_2(0, I_2)$ e che le componenti del v.v.a. X sono indipendenti con legge $\mathcal{N}(0,1)$. Dunque, tenendo presente la definizione della legge Chi-quadrato, la v.a. trasformata $Z = X_1^2 + X_2^2$ è distribuita con legge χ_2^2. Quindi, Z ammette d.p. data da

$$f_Z(z) = \frac{1}{2} \, e^{-\frac{1}{2}z} \, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(z) \, .$$

Dal momento che $g(z) = \sqrt{z}$ è una funzione biunivoca su $[0, \infty[$ e che la v.a. Z è assolutamente continua, allora la v.a. trasformata $R = \sqrt{Z}$ ammette d.p. data da

$$f_R(r) = \frac{1}{2} \, e^{-\frac{1}{2}r^2} \cdot 2r \, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(r) = r e^{-\frac{1}{2}r^2} \, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(r) \, . \qquad ♣$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Al fine di ottenere una soluzione alternativa, si consideri la trasformata in coordinate polari $Y = (Y_1, Y_2)^{\mathrm{T}} = g(X)$, dove $g^{-1}(y) = (y_1 \cos(y_2), y_1 \sin(y_2))^{\mathrm{T}}$. Tenendo presente che $|J(g^{-1}(y))| = y_1$, si ha

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \, y_1 e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(y_1) \mathbf{1}_{]0,2\pi[}(y_2) \, .$$

Dunque, è immediato verificare che le v.a. Y_1 e Y_2 sono indipendenti e che la d.p.m. di Y_1 è data da

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \, y_1 e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(y_1) dy_2 = y_1 e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(y_1) \, .$$

Dal momento che $R = Y_1$, si ottiene di nuovo la d.p. della v.a. R vista in precedenza. Inoltre, se U_1 e U_2 sono v.a. indipendenti con legge Uniforme su $]0,1[$, si noti che $Y_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sqrt{-2\log(U_1)}$ e $Y_2 \stackrel{\mathcal{L}}{=} 2\pi U_2$, da cui si ottiene che

$$X_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sqrt{-2\log(U_1)} \cos(2\pi U_2)$$

e

$$X_2 \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sqrt{-2\log(U_1)} \sin(2\pi U_2) \, .$$

Questa trasformata è detta di Box e Muller. ♦

• **Esercizio 3.** Si consideri la v.a. assolutamente continua X che ammette d.p. data da

$$f_X(x) = \frac{1}{b\Gamma(k)} \left(\frac{x}{b}\right)^{k-1} e^{-\frac{x}{b}} \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x) ,$$

dove $b \in]0, \infty[$ e $k \in]0, \infty[$ e si verifichi che è infinitamente divisibile.

♠ **Soluzione.** La v.a. X è distribuita con legge Gamma $\mathcal{G}(0, b, k)$. Dunque, la f.c. di X è data da $\varphi_X(t) = (1 - ibt)^{-k}$. Dal momento che per ogni $n = 1, 2, \ldots$ si ha

$$\varphi_X(t) = (1 - ibt)^{-k} = ((1 - ibt)^{-\frac{k}{n}})^n = \varphi_{X_n}(t)^n ,$$

la legge è infinitamente divisibile, ovvero la v.a. X è equivalente in legge alla somma di n v.a. indipendenti con legge Gamma $\mathcal{G}(0, b, \frac{k}{n})$ per ogni $n = 1, 2, \ldots$. ♣

• **Esercizio 4.** Si consideri le successioni di v.a. indipendenti $(X_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ per cui le leggi delle v.a. X_n e Y_n sono entrambe Poisson $\mathcal{P}(n)$. Si determini la legge della v.a. Z, tale che

$$\frac{X_n + Y_n - 2n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$$

per $n \to \infty$.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà della legge di Poisson, la v.a. $X_n + Y_n$ è distribuita con legge di Poisson $\mathcal{P}(2n)$ e dunque si ha $\mathrm{E}[X_n + Y_n] = 2n$ e $\mathrm{Var}[X_n + Y_n] = 2n$. Inoltre, dal momento che

$$G_{X_n+Y_n}(t) = (e^{2(t-1)})^n ,$$

per le proprietà dell f.g. risulta $X_n = \sum_{i=1}^n V_i$, dove le v.a. V_i sono indipendenti con legge di Poisson $\mathcal{P}(2)$. Dunque, per il Teorema Centrale del Limite di Lindeberg-Lévy, la v.a. Z è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(0, 1)$. ♣

• **Esercizio 5.** Si consideri una successione di v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ a componenti indipendenti tale che $\mathrm{E}[X_n] = 1$ per ogni n e il p.a. $M = (M_n)_{n\geq 0}$ tale che

$$M_n = \prod_{k=1}^n X_k ,$$

dove $\{M_0 = 1\}$ $q.c.$ e $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ è la filtrazione naturale. Si verifichi che M è una martingala.

♠ **Soluzione.** Tenendo presente le assunzioni fatte sul p.a. M, per ogni n si ha $\mathrm{E}[|M_n|] < \infty$. Inoltre, si ha $q.c.$

$$\mathrm{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \mathrm{E}[X_n M_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}\mathrm{E}[X_n] = M_{n-1} .$$

Inoltre, per la Proprietà della torre, si ha $q.c.$

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \mid \mathcal{F}_{n-2}] = \mathrm{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{n-2}]$$

e quindi dalle precedenti relazioni sussiste $q.c.$

$$\mathrm{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{n-2}] = \mathrm{E}[M_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-2}] = M_{n-2} .$$

Procedendo in modo iterativo, si ha infine $\{\mathrm{E}[M_n \mid \mathcal{F}_m] = M_m\}$ $q.c.$ per $m \in \mathbb{N}$ con $m < n$, ovvero il p.a. M è una martingala. ♣

• **Esercizio 6.** Dati i processi di Itô $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ e $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ tali che $dX_t = \alpha_{X,t}dt + \beta_{X,t}dB_t$ e $dY_t = \alpha_{Y,t}dt + \beta_{Y,t}dB_t$, si determini $d(X_t + Y_t + X_tY_t)$.

♠ **Soluzione.** Dalla formula di Itô per trasformate bivariate, posto $g(x, y) = x + y + xy$, si ha

$$d(X_t + Y_t + X_tY_t) = (1 + Y_t)\, dX_t + (1 + X_t)\, dY_t + \beta_{X,t}\beta_{Y,t}\, dt\ . \qquad ♣$$

Esame del 7 Giugno 2021

• **Esercizio 1.** Dato lo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, si consideri i due eventi $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$. Se $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{4}$ e $P(E_1 \mid E_2) = P(E_2)$, si determini $P(E_1 \cap E_2^c)$.
♠ **Soluzione.** Si ha

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \mid E_2)P(E_2) = P(E_2)^2 = \frac{1}{16}\ .$$

Dunque, risulta

$$P(E_1 \cap E_2^c) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{3}{16}\ . \qquad ♣$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Si noti che $P(E_1 \mid E_2) = P(E_2) = P(E_1)$. Quindi, E_1 e E_2 sono eventi indipendenti. Dunque, anche E_1 e E_2^c sono indipendenti. Di conseguenza, si ottiene in modo alternativo

$$P(E_1 \cap E_2^c) = P(E_1)P(E_2^c) = P(E_1)(1 - P(E_2)) = \frac{3}{16}\ . \qquad ♦$$

• **Esercizio 2.** Da un gruppo di 10 persone (composto da 5 donne e 5 uomini) ugualmente qualificate vengono selezionate in modo indipendente 3 persone per l'assunzione ad un impiego. Se le 3 persone selezionate sono uomini, si determini la probabilità di questo evento e si discuta se vi è stata discriminazione di genere.
♠ **Soluzione.** Sulla base delle assunzioni, il numero di uomini selezionati per l'impiego è descritto da una v.a. X distribuita con legge Ipergeometrica $\mathcal{I}(3, 5, 10)$ e dunque si ha

$$P(X = 3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{5}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{12}\ .$$

Dunque, anche se questa probabilità non è estremamente bassa, si potrebbe comunque sospettare la presenza di discriminazione di genere. ♣

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\ ,$$

si determini la covarianza $\mathrm{Cov}[Y_1, Y_2]$ dove $Y = (Y_1, Y_2)^{\mathrm{T}} = (X_1X_2, X_1^2 + X_2^2)^{\mathrm{T}}$.
♠ **Soluzione.** Si noti che X_1 e X_2 sono v.a. indipendenti ed ugualmente distribuite con legge Uniforme su $]0, 1[$. Inoltre, per $r = 0, 1, \ldots$, si ha

$$\mathrm{E}[X_1^r] = \mathrm{E}[X_2^r] = \int_0^1 x_1^r\, dx_1 = \frac{1}{r+1}\ .$$

Dunque, risulta

$$\mathrm{E}[Y_1] = \mathrm{E}[X_1X_2] = \mathrm{E}[X_1]\mathrm{E}[X_2] = \frac{1}{4}$$

e

$$\mathrm{E}[Y_2] = \mathrm{E}[X_1^2 + X_2^2] = \mathrm{E}[X_1^2] + \mathrm{E}[X_2^2] = \frac{2}{3} \, ,$$

mentre

$$\mathrm{E}[Y_1 Y_2] = \mathrm{E}[X_1 X_2 (X_1^2 + X_2^2)] = \mathrm{E}[X_1^3]\mathrm{E}[X_2] + \mathrm{E}[X_1]\mathrm{E}[X_2^3] = \frac{1}{4} \, ,$$

ovvero $\mathrm{Cov}[Y_1, Y_2] = \frac{1}{12}$. ♣

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2, X_3)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2, t_3) = e^{-t_1^2 - t_2^2 - \frac{1}{2}t_3^2 - t_1 t_2 - t_1 t_3 - t_2 t_3} \, ,$$

se ne determini la legge.
♠ **Soluzione.** Posto $t = (t_1, t_2, t_3)^{\mathrm{T}}$ e tenendo presente la forma quadratica all'esponente la forma quadratica all'esponente, φ_X può essere espressa come

$$\varphi_X(t_1, t_2, t_3) = e^{-\frac{1}{2} t^{\mathrm{T}} \Sigma t} \, ,$$

dove

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dunque, il v.v.a. X è distribuito con legge Normale Multivariata $\mathcal{N}_3(0, \Sigma)$. ♣

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. indipendenti $(X_n)_{n \geq 1}$ tale che X_n è una v.a. discreta con f.p. data da

$$p_{X_n}(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{-n^a, n^a\}}(x) \, ,$$

dove $a \in \mathbb{R}$. Si determini l'insieme dei valori di a per cui si ha rispettivamente $X_n \xrightarrow{L^2} 0$ e $X_n \xrightarrow{P} 0$ per $n \to \infty$.
♠ **Soluzione.** Si osservi che $\mathrm{E}[|X_n|^2] = n^{2a}$. Quindi, se $a < 0$, si ha

$$\lim_n \mathrm{E}[|X_n|^2] = \lim_n n^{2a} = 0 \, ,$$

ovvero $X_n \xrightarrow{L^2} 0$ per $n \to \infty$. Inoltre, se $a < 0$ e fissato $\varepsilon > 0$, esiste un valore n_ε tale che per $n > n_\varepsilon$ si ha $P(|X_n| > \varepsilon) = 0$, da cui

$$\lim_n P(|X_n| > \varepsilon) = 0 \, ,$$

ovvero $X_n \xrightarrow{P} 0$ per $n \to \infty$. ♣

• **Esercizio 6.** Sia dato il moto Browniano $B = (B_t)_{t \in [0,T]}$ ed il p.a. $M = (M_t)_{t \in [0,T]}$ tale che $M_t = (2 - B_t)(1 + B_t) + t$. Calcolando il differenziale stocastico di M, si verifichi che questo p.a. è una martingala.
♠ **Soluzione.** Dalla Formula ridotta di Itô con $dX_t = dB_t$ e $g(x, y) = (2 - x)(1 + x) + y$, si ha

$$dM_t = dg(B_t, t) = (1 - 2B_t) \, dB_t \, .$$

Dunque, M è un processo di Itô con $\alpha = (\alpha_t)_{t\in[0,T]}$ e $\beta = (\beta_t)_{t\in[0,T]}$ dove $\alpha_t = 0$ e $\beta_t = 1 - 2B_t$, ovvero è una martingala dal momento che il p.a. α è identicamente nullo, mentre $\beta \in \mathcal{M}_T^2$ essendo $(B_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{M}_T^2$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che in generale $(B_t^m)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{M}_T^2$ dove $m \in \{1, 2, \dots\}$. In effetti, risulta

$$\mathrm{E}[B_t^{2m}] = \frac{2^m \Gamma(m + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}\, t^m \,,$$

da cui

$$\int_0^T \mathrm{E}[B_t^{2m}]\, dt = \frac{2^m \Gamma(m + \frac{1}{2})}{(m+1)\sqrt{\pi}}\, T^{m+1} < \infty \,.$$

In particolare, la precedente espressione fornisce i valori $\frac{1}{2}T^2, T^3, \frac{15}{4}T^4, 21T^5$ per $m = 1, 2, 3, 4$. ♦

Esame del 28 Giugno 2021

• **Esercizio 1.** Un esame è basato su vari test a risposta multipla con 5 possibili scelte. Per ogni singolo test uno studente conosce la risposta corretta con probabilità $\frac{7}{10}$ o sceglie casualmente una delle 5 alternative. Se la risposta ad un singolo test è stata corretta, si determini la probabilità che lo studente conosca effettivamente la risposta. Se l'esame è basato su 10 test a cui si risponde in modo indipendente, si determini inoltre la probabilità di rispondere correttamente ad almeno 9 test.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento relativo alla conoscenza della risposta da parte dello studente, mentre sia E l'evento relativo alla correttezza della risposta. Si ha $P(E_1) = \frac{7}{10}$ e quindi $P(E_1^c) = \frac{3}{10}$. Inoltre, $P(E \mid E_1) = 1$ e $P(E \mid E_1^c) = \frac{1}{5}$. Dal momento che gli eventi E_1 e E_1^c costituiscono una partizione dello spazio fondamentale, applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E \mid E_1)P(E_1) + P(E \mid E_1^c)P(E_1^c) = \frac{19}{25} \,.$$

Considerando inoltre la Formula di Bayes, si ha

$$P(E_1 \mid E) = \frac{P(E \mid E_1)P(E_1)}{P(E)} = \frac{35}{38} \simeq 0.92 \,.$$

Sulla base delle assunzioni, il numero di risposte corrette nei test è descritto da una v.a. X distribuita con legge Binomiale $\mathcal{B}(10, \frac{19}{25})$ e dunque si ha

$$P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9}\left(\frac{19}{25}\right)^9 \left(\frac{6}{25}\right) + \left(\frac{19}{25}\right)^{10} \simeq 0.27 \,.$$ ♣

• **Esercizio 2.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = e^{-x_1 - x_2}\, \mathbf{1}_{]0,\infty[\times]0,\infty[}(x_1, x_2) \,,$$

si determini la d.p. della v.a. $Y = \frac{X_1}{X_2}$.

♠ **Soluzione.** Si osservi che le componenti marginali del v.v.a. sono indipendenti e ugualmente distribuiti con legge Esponenziale ridotta. Dall'espressione della d.p. della v.a. rapporto risulta

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} e^{-xy} x \, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x) \mathbf{1}_{]0,\infty[}(xy) \, dx \, ,$$

ovvero

$$f_Y(y) = \mathbf{1}_{]0,\infty[}(y) \int_0^{\infty} x e^{-(1+y)x} \, dx = \frac{1}{(1+y)^2} \mathbf{1}_{]0,\infty[}(y) \int_0^{\infty} x e^{-x} \, dx = \frac{1}{(1+y)^2} \mathbf{1}_{]0,\infty[}(y) \, ,$$

tenendo presente che $\int_0^\infty x e^{-x} dx = \Gamma(2) = 1$. ♣

• **Esercizio 3.** Data la v.a. assolutamente continua X con f.r.

$$F_X(x) = 1 - (1 - H(x))^2 \, ,$$

dove H è una f.r. assolutamente continua tale che $\frac{d}{dx} H(x) = h(x) \geq 0$, si verifichi che effettivamente F_X è una f.r.

♠ **Soluzione.** La f.r. è assolutamente continua dal momento che $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u) du$, dove la versione della d.p. può essere scelta come

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = 2(1 - H(x)) h(x) \, .$$

Dunque, F_X è una f.r. dal momento che $0 \leq F_X(x) \leq 1$, essendo per ogni x

$$0 \leq H(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - H(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (1 - H(x))^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - (1 - H(x))^2 \leq 1 \, ,$$

mentre $\frac{d}{dx} F_X(x) \geq 0$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che $X = \min(Z_1, Z_2)$, dove Z_1 e Z_2 sono v.a. indipendenti e ugualmente distribuite con f.r. H. In effetti, la f.r. della v.a. X è data da

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(\min(Z_1, Z_2) \leq x) = 1 - P(Z_1 > x, Z_2 > x) \\ &= 1 - P(Z_1 > x) P(Z_2 > x) = 1 - (1 - H(x))^2 \, . \end{aligned}$$

Ancora più generalmente, se $X = \min(Z_1, \ldots, Z_n)$ dove $(Z_1, \ldots, Z_n)$ è un v.v.a. a componenti marginali indipendenti, si ha

$$F_X(x) = P(\min(Z_1, \ldots, Z_n) \leq x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(Z_i > x) \, .$$

Dunque, se le componenti marginali sono ugualmente distribuite con f.r. H, si ottiene

$$F_X(x) = 1 - (1 - H(x))^n \, .$$ ♦

• **Esercizio 4.** Data la v.a. discreta X con f.g.

$$G_X(t) = \frac{1}{2 - t} \, ,$$

se il v.v.a. $(X_1, \ldots, X_n)$ possiede componenti indipendenti ed equivalenti in distribuzione alla v.a. X, si determini la legge della v.a. somma $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

♠ **Soluzione.** Dal momento che

$$G_X(t) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} t} \, ,$$

la v.a. X è distribuita con legge Binomiale Negativa $\mathcal{BN}(1, \frac{1}{2})$, ovvero con legge Geometrica. Per le proprietà della f.g. la v.a. Y è distribuita con legge Binomiale Negativa $\mathcal{BN}(n, \frac{1}{2})$. ♣

• **Esercizio 5.** Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di v.a. tale che

$$\sqrt{n}\,\frac{X_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$$

per $n \to \infty$, dove la v.a. Z è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(0,1)$, mentre $\lambda > 0$. Tenendo presente il Metodo Delta, si determini la trasformazione stabilizzatrice della varianza $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ovvero la trasformazione tale che $\sqrt{n}(g(X_n) - g(\lambda)) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ per $n \to \infty$.

♠ **Soluzione.** Se g è una funzione continua e differenziabile tale che $g'(\lambda) \neq 0$, per il Metodo Delta si ha

$$\sqrt{n}\,\frac{g(X_n) - g(\lambda)}{|g'(\lambda)|\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$$

per $n \to \infty$. Dunque, per quanto riguarda la trasformata stabilizzatrice della varianza, si deve avere $|g'(\lambda)|\sqrt{\lambda} = 1$, ovvero $g(\lambda) = 2\sqrt{\lambda}$. ♣

• **Esercizio 6.** Dato il moto Browniano $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$, si consideri il p.a. $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ tale che $M_t = B_t^3 - 3tB_t$. Calcolando il differenziale stocastico di M mediante la formula ridotta di Itô, si verifichi che questo p.a. è una martingala.

♠ **Soluzione.** Dalla Formula ridotta di Itô con $dX_t = dB_t$ e $g(x,y) = x^3 - 3xy$, si ha

$$dM_t = dg(B_t, t) = 3(B_t^2 - t)\,dB_t\,.$$

Dunque, M è un processo di Itô con $\alpha = (\alpha_t)_{t\in[0,T]}$ e $\beta = (\beta_t)_{t\in[0,T]}$ dove $\alpha_t = 0$ e $\beta_t = 3(B_t^2 - t)$, ovvero è una martingala, essendo il p.a. α identicamente nullo, mentre $\beta \in \mathcal{M}_T^2$ dal momento che $(B_t^m)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{M}_T^2$ con $m \in \{1, 2, \dots\}$. ♣

Esame del 30 Agosto 2021

• **Esercizio 1.** Alla fine di un semestre accademico vengono tenuti tre esami relativi a tre insegnamenti di un corso di laurea. La probabilità che uno studente superi uno qualsiasi dei tre esami è data da $\frac{4}{5}$, la probabilità che superi due qualsiasi dei tre esami è data da $\frac{3}{5}$ e la probabilità che superi tutti e tre gli esami è data da $\frac{2}{5}$. Si determini la probabilità che lo studente superi almeno un esame.

♠ **Soluzione.** Si indichi rispettivamente con E_1, E_2 e E_3 gli eventi relativi al superamento del primo, del secondo e del terzo esame. Dunque, la probabilità richiesta è data da $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$. Si ha

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{4}{5}$$

e

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \cap E_3) = P(E_2 \cap E_3) = \frac{3}{5}\,,$$

mentre

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{2}{5}\,.$$

Quindi, dalla Formula di Inclusione ed Esclusione risulta

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) \\ + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 1 \, . \qquad \clubsuit$$

• **Esercizio 2.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = 4x_1x_2 \, \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2) \, ,$$

si determini la d.p. della v.a. $Y = X_1X_2$.

♠ **Soluzione.** Dall'espressione della d.p. della v.a. prodotto risulta

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 4 \, \frac{y}{x} \, \mathbf{1}_{]0,1[}(x)\mathbf{1}_{]0,1[}\Big(\frac{y}{x}\Big)\mathbf{1}_{]0,1[}(y) \, dx \, ,$$

ovvero

$$f_Y(y) = 4y \, \mathbf{1}_{]0,1[}(y) \int_0^1 \frac{1}{x} \, \mathbf{1}_{]y,\infty[}(x) \, dx = 4y \, \mathbf{1}_{]0,1[}(y) \int_y^1 \frac{1}{x} \, dx = \, -4y\log(y) \, \mathbf{1}_{]0,1[}(y) \, . \qquad \clubsuit$$

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo X considerato nell'Esercizio 2 si determini media e varianza della v.a. $Y = X_1 + X_2$.

♠ **Soluzione.** Si noti che

$$f_{X_1}(x_1) = 4x_1 \, \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) \int_0^1 x_2 \, dx_2 = 2x_1 \, \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) \, ,$$

e quindi per simmetria si ha

$$f_{X_2}(x_2) = 2x_2 \, \mathbf{1}_{]0,1[}(x_2) \, ,$$

ovvero $X_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_2$. Dal momento che $f_X(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$, le v.a. X_1 e X_2 sono indipendenti. Inoltre, per $r = 1, 2, \ldots$ risulta

$$\mathrm{E}[X_1^r] = \mathrm{E}[X_2^r] = 2\int_0^1 x_1^{r+1} \, dx_1 = \frac{2}{r+2} \, ,$$

da cui $\mathrm{E}[X_1] = \mathrm{E}[X_2] = \frac{2}{3}$ e $\mathrm{Var}[X_1] = \mathrm{Var}[X_2] = \frac{1}{18}$. Quindi, si ha

$$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[X_1] + \mathrm{E}[X_2] = \frac{4}{3}$$

e

$$\mathrm{Var}[Y] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2] = \frac{1}{9} \, . \qquad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che le v.a. X_1 e X_2 sono distribuite con legge Beta ridotta $\mathcal{BE}(0, 1, 2, 1)$. ♦

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2) = e^{-\frac{1}{2}t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2 - 4t_1t_2} \, ,$$

si determini le leggi delle due componenti marginali. Si verifichi inoltre se le due componenti marginali sono indipendenti.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.c.m. si ha

$$\varphi_{X_1}(t_1) = \varphi_X(t_1, 0) = e^{-\frac{1}{2}t_1^2}$$

e

$$\varphi_{X_2}(t_2) = \varphi_X(0, t_2) = e^{-\frac{1}{2}t_2^2} .$$

Dunque, le v.a. X_1 e X_2 sono distribuite con legge Normale $\mathcal{N}(0,1)$. Le due componenti marginali non sono indipendenti in quanto

$$\varphi_X(t_1, t_2) \neq \varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2) .$$

♣

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. indipendenti $(X_n)_{n\geq 2}$ tale che X_n è una v.a. con f.p. data da

$$p_{X_n}(x) = \frac{1}{2}\,\mathbf{1}_{\{0\}}(x) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\mathbf{1}_{\{1\}}(x) + \frac{1}{n}\,\mathbf{1}_{\{n\}}(x) .$$

Mediante l'uso della f.g. si determini la legge della v.a. X tale che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n \to \infty$.
♠ **Soluzione.** Si osservi che

$$G_{X_n}(t) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)t + \frac{1}{n}\,t^n$$

e, tenendo presente che $t \in [0,1]$, si ha

$$\lim_n G_{X_n}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,t .$$

La precedente espressione fornisce la f.g. di una v.a. X distribuita con legge di Bernoulli di parametro $\frac{1}{2}$. ♣

• **Esercizio 6.** Sia dato il moto Browniano $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ ed il p.a. $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ tale che $M_t = e^{2B_t - 2t}$. Calcolando il differenziale stocastico di M, si verifichi che questo p.a. è una martingala.
♠ **Soluzione.** Dalla Formula ridotta di Itô con $dX_t = dB_t$ e $g(x,y) = e^{2x-2y}$, si ha

$$dM_t = dg(B_t, t) = 2e^{2B_t - 2t}\,dB_t .$$

Dunque, M è un processo di Itô con $\alpha = (\alpha_t)_{t\in[0,T]}$ e $\beta = (\beta_t)_{t\in[0,T]}$ dove $\alpha_t = 0$ e $\beta_t = 2e^{2B_t-2t}$, ovvero è una martingala dal momento che il p.a. α è identicamente nullo, mentre $\beta \in \mathcal{M}_T^2$ essendo $(e^{B_t})_{t\in[0,T]} \in \mathcal{M}_T^2$. ♣

Esame del 20 Settembre 2021

• **Esercizio 1.** In un incontro di un torneo di biliardo aperto a ogni tipo di partecipante, un giocatore ha probabilità $\frac{3}{10}$ di vincere contro un professionista, probabilità $\frac{4}{10}$ di vincere contro un amatore e probabilità $\frac{1}{2}$ di vincere contro un principiante. Se la probabilità di incontrare un professionista è $\frac{1}{2}$, quella di incontrare un amatore è $\frac{1}{4}$ e quella di incontrare un principiante è $\frac{1}{4}$, si determini la probabilità che il giocatore vinca l'incontro.
♠ **Soluzione.** Si indichino rispettivamente con E_1, E_2 e E_3 gli eventi relativi ad incontrare un professionista, un amatore e un principiante, mentre sia E l'evento relativo alla vittoria dell'incontro.

Dunque, si ha $P(E_1) = \frac{1}{2}$, $P(E_2) = \frac{1}{4}$ e $P(E_3) = \frac{1}{4}$, mentre si ha $P(E \mid E_1) = \frac{3}{10}$, $P(E \mid E_2) = \frac{4}{10}$ e $P(E \mid E_3) = \frac{1}{2}$. Quindi, risulta

$$P(E) = P(E \mid E_1)P(E_1) + P(E \mid E_2)P(E_2) + P(E \mid E_3)P(E_3) = \frac{3}{8} = 0.375 \,. \qquad \clubsuit$$

• **Esercizio 2.** Un dado bilanciato viene lanciato 10 volte in modo indipendente. Si determini la probabilità che nei 10 lanci si verifichi 2 volte la faccia contrassegnata da un punto e 3 volte la faccia contrassegnata da due punti.

♠ **Soluzione.** Se la v.a. X_1 rappresenta il numero di volte che si verifica la faccia contrassegnata con un punto, la v.a. X_2 il numero di volte che si verifica la faccia contrassegnata con due punti e la v.a. X_3 il numero volte che si verificano le rimanenti facce, si consideri il v.v.a. $X = (X_1, X_2, X_3)^{\mathrm{T}}$. In questo caso, X è distribuito con legge Multinomiale di parametri 10 e $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$. Se p_X è la f.p.c. del v.v.a. X, la probabilità richiesta è data da

$$p_X(2,3,5) = \binom{10}{2\,3\,5}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{10!4^5}{2!3!5!6^{10}} \simeq 0.04 \,. \qquad \clubsuit$$

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1,x_2) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, x_1^{a-1}(x_2-x_1)^{b-1}e^{-x_2}\, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x_1)\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x_2)\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x_2-x_1)$$

con $a, b \in \mathbb{R}^+$, si determini le d.p.m. delle due componenti marginali.

♠ **Soluzione.** Operando il cambio di variabile $x_2 = z + x_1$, si ha

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{x_1}^{\infty} x_1^{a-1}(x_2-x_1)^{b-1}e^{-x_2}\, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x_1)\, dx_2 \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, x_1^{a-1}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x_1) \int_0^{\infty} (z+x_1-x_1)^{b-1}e^{-(z+x_1)}\, dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, x_1^{a-1}e^{-x_1}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x_1) \int_0^{\infty} z^{b-1}e^{-z}\, dz = \frac{1}{\Gamma(a)}\, x_1^{a-1}e^{-x_1}\, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x_1) \,, \end{aligned}$$

dove si è tenuta presente la definizione della funzione Gamma di Eulero. Inoltre, operando il cambio di variabile $x_1 = x_2 u$, si ha

$$\begin{aligned} f_{X_2}(x_2) &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^{x_2} x_1^{a-1}(x_2-x_1)^{b-1}e^{-x_2}\, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x_2)\, dx_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, e^{-x_2}\, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x_2) \int_0^1 (x_2u)^{a-1}(x_2-x_2u)^{b-1}x_2\, dx_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, x_2^{a+b-1}e^{-x_2}\, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x_2) \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\, dx_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(a+b)}\, x_2^{a+b-1}e^{-x_2}\, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x_2) \,. \end{aligned}$$

dove si è tenuta presente la definizione della funzione Beta di Eulero.

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che la v.a. X_1 è distribuita con legge Gamma ridotta $\mathcal{G}(0,1,a)$, mentre la v.a. X_2 è distribuita con legge Gamma ridotta $\mathcal{G}(0,1,a+b)$. ♦

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. discreto $X = (X_1, X_2, X_3)^{\mathrm{T}}$ con f.g.p.

$$G_X(t_1, t_2, t_3) = 3^{-5}(t_1 + t_2 + t_3)^5 \,,$$

si determini la relativa matrice di varianza-covarianza.
♠ **Soluzione.** Dal momento che

$$G_X(t_1, t_2, t_3) = \left(\frac{1}{3}\,t_1 + \frac{1}{3}\,t_2 + \frac{1}{3}\,t_3\right)^5 \,,$$

il v.v.a. X è distribuito con legge Multinomiale di parametri $n = 5$ e $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^{\mathrm{T}}$. Dunque, la matrice di varianza-covarianza è data da

$$\Sigma = n(\mathrm{diag}(p) - pp^{\mathrm{T}}) = 5\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} .$$ ♣

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. indipendenti $(X_n)_{n\geq 1}$ tale che X_n è una v.a. con f.p. data da

$$p_{X_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\mathbf{1}_{\{1\}}(x) + \frac{1}{n^2}\,\mathbf{1}_{\{n\}}(x) \,.$$

Si verifichi che $X_n \xrightarrow{L^1} 1$ per $n \to \infty$.
♠ **Soluzione.** Si osservi che

$$\mathrm{E}[|X_n - 1|] = \frac{n-1}{n^2} \,,$$

da cui

$$\lim_n \mathrm{E}[|X_n - 1|] = 0 \,,$$

ovvero $X_n \xrightarrow{L^1} 1$ per $n \to \infty$. ♣

• **Esercizio 6.** Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = e^t\,dt + 2\,dB_t$$

con condizione iniziale $X_0 = 1$ $q.c.$ e se ne determini la soluzione. Si calcoli inoltre $\mathrm{E}[X_t]$ e $\mathrm{Var}[X_t]$.
♠ **Soluzione.** Dalla definizione di processo di Itô si ha

$$X_t = 1 + \int_0^t e^s\,ds + \int_0^t 2\,dB_s = e^t + 2B_t \,.$$

Inoltre, per le proprietà del moto Browniano si ha

$$\mathrm{E}[X_t] = e^t + 2\,\mathrm{E}[B_t] = e^t$$

e

$$\mathrm{Var}[X_t] = 4\,\mathrm{Var}[B_t] = 4t \,.$$ ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Per le proprietà del moto Browniano, la v.a. X_t è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(e^t, 4t)$. ♦

♣

Esame del 4 Ottobre 2021

• **Esercizio 1.** Si consideri 2 urne che contengono palline bianche e nere, in modo tale che la probabilità di estrarre una pallina bianca è $2/3$ dalla prima urna e $1/3$ dalla seconda urna. Se l'urna da cui estrarre la pallina viene scelta con un ulteriore esperimento aleatorio che seleziona la prima urna con probabilità $1/3$, determinare la probabilità di ottenere una pallina bianca al termine dell'esperimento aleatorio complessivo.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento relativo alla selezione della prima urna, mentre sia E l'evento relativo all'estrazione di una pallina bianca. Si ha $P(E_1) = \frac{1}{3}$ e quindi deve essere $P(E_1^c) = \frac{2}{3}$. Inoltre, $P(E \mid E_1) = \frac{2}{3}$ e $P(E \mid E_1^c) = \frac{1}{3}$. Dal momento che gli eventi E_1 e E_1^c costituiscono una partizione dello spazio fondamentale, applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E \mid E_1)P(E_1) + P(E \mid E_1^c)P(E_1^c) = \frac{4}{9} \,. \qquad ♣$$

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\,(x-2)^2\,e^{-x+2}\,\mathbf{1}_{]2,\infty[}(x)\,,$$

si calcoli $\mathrm{E}[X]$ e $\mathrm{Var}[X]$.

♠ **Soluzione.** Considerando la v.a. trasformata $Y = X - 2$, si ha

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}\,y^2\,e^{-y}\,\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)\,,$$

ovvero, per $r = 1, 2, \ldots$, si ha

$$\mathrm{E}[Y^r] = \frac{1}{2}\int_0^\infty y^{r+2}e^{-y}\,dy = \frac{1}{2}\,\Gamma(r+3)\,.$$

Dunque, risulta $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y+2] = 5$ e $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[Y+2] = 3$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Il risultato era immediato osservando che la v.a. X è distribuita con legge Gamma ridotta $\mathcal{G}(2,1,3)$. ♦

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\,x_1\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\,,$$

si determini il valore atteso condizionato $\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1]$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2}\int_0^1 x_1\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\,dx_2 = \frac{1}{2}\,x_1\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\,,$$

da cui

$$\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1] = \int_0^1 x_2\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\,dx_2 = \frac{1}{2}\,. \qquad ♣$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che $f_X(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$ e quindi le v.a. X_1 e X_2 sono indipendenti. Banalmente, si ha dunque che $\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1] = \mathrm{E}[X_2]$. ♦

● **Esercizio 4.** Si consideri le successioni di v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ definite sullo stesso spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dove $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n \to \infty$ e la v.a. X è distribuita con legge Gamma $\mathcal{G}(0, 1, k)$, mentre $Y_n \xrightarrow{P} Y$ per $n \to \infty$ e la v.a. Y è degenere nel valore 3. Si determini la legge della v.a. a cui converge la successione di v.a. $(X_n + Y_n)_{n\geq 1}$ per $n \to \infty$.

♠ **Soluzione.** Per il Teorema di Cramér-Slutsky si ha

$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z = X + 3 \,.$$

Dal momento che X è distribuita con legge Gamma $\mathcal{G}(0, 1, k)$, allora Z è distribuita con legge Gamma $\mathcal{G}(3, 1, k)$. ♣

● **Esercizio 5.** Data la v.a. discreta X con f.g. data da

$$G_X(s) = e^{\sqrt{1-c}-\sqrt{1-cs}} \,,$$

dove $c \in \,]0, 1]$, si determini $\mathrm{E}[X]$. Si discuta inoltre il caso particolare $c = 1$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$G_X^{(1)}(t) = \frac{d}{dt}\, e^{\sqrt{1-c}-\sqrt{1-cs}} = \frac{cG_X(s)}{2\sqrt{1-cs}} \,,$$

da cui si ha $\mathrm{E}[X] = G_X^{(1)}(1) = \frac{c}{2\sqrt{1-c}}$. Dal momento che

$$\lim_{c\to 1^-} \frac{c}{2\sqrt{1-c}} = \infty \,,$$

il valore atteso della v.a. X non è finito per $c = 1$. ♣

● **Esercizio 6.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{[0,1]}$, si determini la legge dell'integrale stocastico $I = \int_0^1 \cos(2\pi t) dB_t$.

♠ **Soluzione.** Si noti che I è un integrale di Wiener e che $\int_0^1 (\cos(2\pi t))^2 dt = \frac{1}{2} < \infty$. Dunque, I è una v.a. con legge Normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$. ♣

Esame del 14 Gennaio 2022

● **Esercizio 1.** Un dado bilanciato viene lanciato indipendentemente per due volte. Se E_1 rappresenta l'evento che la faccia contrassegnata da un punto si è verificata al primo lancio e E_2 rappresenta l'evento che la somma dei punti ottenuta nei due lanci è pari a 7, si determini se i due eventi sono indipendenti.

♠ **Soluzione.** Lo spazio fondamentale relativo ad un lancio del dado risulta $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Quindi, lo spazio fondamentale relativo all'esperimento è dato da Ω^2, i cui eventi elementari sono coppie cartesiane del tipo $\{(j, k)\}$ con $j, k = 1, \ldots, 6$. Sulla base di quanto specificato riguardo all'esperimento si assume l'assegnazione di Laplace, ovvero si assume che gli eventi elementari di Ω^2 siano equiprobabili con $P(\{(j, k)\}) = \frac{1}{36}$ per $j, k = 1, \ldots, 6$. Si ha

$$E_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}$$

e

$$E_2 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\} \,,$$

mentre $E_1 \cap E_2 = \{(1,6)\}$. Dunque, risulta $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{6}$ e $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{36}$. Dunque, se si assume l'assegnazione di Laplace, gli eventi E_1 e E_2 sono indipendenti dal momento che $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$. ♣

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\,\mathbf{1}_{]0,2[}(x)\,,$$

si consideri la v.a. trasformata $Y = \cos(\pi X)$ e si determini $\mathrm{E}[Y]$.
♠ **Soluzione.** Si ha

$$\mathrm{E}[Y] = \frac{1}{2}\int_0^2 \cos(\pi x)\,dx = 0\,.$$ ♣

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1,x_2) = 6(1 - x_1 - x_2)\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1+x_2)\,,$$

si determini il valore atteso condizionato $\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1]$.
♠ **Soluzione.** La d.p. della v.a. X_1 è data da

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^{1-x_1} 6(1-x_1-x_2)\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\,dx_2 = 3(1-x_1)^2\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\,.$$

Dalla definizione di valore atteso della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$, per $x_1 \in\,]0,1[$ si ha

$$\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1] = \int_0^{1-x_1} x_2\,\frac{6(1-x_1-x_2)}{3(1-x_1)^2}\,dx_2 = \frac{1-x_1}{3}\,.$$ ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2, 1 - X_1 - X_2)^{\mathrm{T}}$ è distribuito con legge di Dirichlet $\mathcal{D}(\alpha)$, dove $\alpha = (1,1,2)^{\mathrm{T}}$. ♦

• **Esercizio 4.** Si consideri la successione di v.a. indipendenti $(X_n)_{n\geq 1}$ tale che X_n è una v.a. con f.p. data da

$$p_{X_n}(x) = e^{-n}\,\mathbf{1}_{\{-n\}}(x) + (1 - 2e^{-n})\,\mathbf{1}_{\{0\}}(x) + e^{-n}\,\mathbf{1}_{\{n\}}(x)$$

e si verifichi che $X_n \xrightarrow{P} 0$ per $n \to \infty$.
♠ **Soluzione.** Si ha $\mathrm{E}[X_n] = 0$ e $\mathrm{Var}[X_n] = 2n^2e^{-n}$. Dal momento che

$$\lim_n \mathrm{Var}[X_n] = \lim_n 2n^2e^{-n} = 0\,,$$

si ottiene la convergenza in probabilità richiesta. ♣

• **Esercizio 5.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{t\in[0,\infty[}$, assumendo che $s \leq t$, si calcoli $\mathrm{Cov}[B_s^2, B_t]$.
♠ **Soluzione.** Si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[B_s^2, B_t] &= \mathrm{E}[B_s^2B_t] - \mathrm{E}[B_s^2]\mathrm{E}[B_t] = \mathrm{E}[B_s^2(B_t - B_s + B_s)] - \mathrm{E}[B_s^2]\mathrm{E}[B_t]\\ &= \mathrm{E}[B_s^2(B_t - B_s)] + \mathrm{E}[B_s^3] - \mathrm{E}[B_s^2]\mathrm{E}[B_t]\end{aligned}$$

Per le proprietà del moto Browniano, risulta

$$\mathrm{Cov}[B_s^2, B_t] = \mathrm{E}[B_s^2]\mathrm{E}[B_t - B_s] + \mathrm{E}[B_s^3] - \mathrm{E}[B_s^2]\mathrm{E}[B_t] = 0\,,$$

dal momento che $\mathrm{E}[B_s^3]=0$, $\mathrm{E}[B_t]=0$ e $\mathrm{E}[B_t-B_s]=0$. ♣

• **Esercizio 6.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{[0,1]}$, si determini la legge dell'integrale stocastico $I=\int_0^1 \frac{1}{1+t}dB_t$.

♠ **Soluzione.** Si noti che I è un integrale di Wiener e che $\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}dt=\frac{1}{2}<\infty$. Dunque, I è una v.a. con legge Normale $\mathcal{N}(0,\frac{1}{2})$. ♣

Esame del 7 Febbraio 2022

• **Esercizio 1.** In una certa sessione, uno studente sostiene due esami. La probabilità di sostenere con successo almeno un esame è data da $\frac{9}{10}$, mentre la probabilità di sostenere con successo entrambi gli esami è data da $\frac{1}{2}$. Si determini la probabilità di sostenere con successo esattamente un esame.

♠ **Soluzione.** Si indichino rispettivamente con E_1 e E_2 gli eventi relativi al successo nel sostenere il primo ed il secondo esame. La probabilità richiesta è data da

$$P(E_1\cup E_2)-P(E_1\cap E_2)=\frac{9}{10}-\frac{1}{2}=\frac{2}{5}\,.$$ ♣

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x)=\frac{1}{2}\,e^{-|x|}\,,$$

si determini la d.p. della v.a. trasformata $Y=\sqrt{|X|}$.

♠ **Soluzione.** Dal momento che la funzione $y:x\mapsto\sqrt{|x|}$ è decrescente in $B_1=]-\infty,0]$ e crescente in $B_2=]0,\infty[$, allora

$$f_Y(y)=(f_X(y^2)+f_X(-y^2))\,2y\,\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y)=2y\,e^{-y^2}\,\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y)\,.$$ ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** La legge relativa alla v.a. X è detta legge di Laplace, mentre la legge relativa alla v.a. Y è detta legge di Rayleigh ed è connessa alla lunghezza aleatoria di un v.v.a. con legge Normale multivariata. ♦

• **Esercizio 3.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x)=\frac{15}{4}\,x^{\frac{1}{2}}(1-x)\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x)\,,$$

si determini le probabilità $P(-1<X<\frac{1}{4})$ e $P(X>\frac{1}{4})$.

♠ **Soluzione.** Dal momento che

$$F_X(x)=\frac{1}{2}\,x^{\frac{3}{2}}(5-3x)\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x)+\mathbf{1}_{]1,\infty[}(x)\,,$$

le probabilità richieste sono date da

$$P\Big(-1<X<\frac{1}{4}\Big)=F_X\Big(\frac{1}{4}\Big)-F_X(-1)=\frac{17}{64}$$

e

$$P\left(X > \frac{1}{4}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{47}{64} \,. \qquad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che la v.a. X è distribuita con legge Beta ridotta $\mathcal{BE}(0,1,\frac{3}{2},2)$. ♦

• **Esercizio 4.** Data la v.a. discreta X con f.g.

$$G_X(t) = \frac{1}{4-3t} \,,$$

se il v.v.a. $(X_1,\ldots,X_n)$ possiede componenti indipendenti ed equivalenti in distribuzione alla v.a. X, si determini la legge della v.a. somma $Y = \sum_{i=1}^n X_i$.
♠ **Soluzione.** Dal momento che

$$G_X(t) = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{4}t} \,,$$

la v.a. X è distribuita con legge di Binomiale Negativa $\mathcal{BN}(1,\frac{1}{4})$. Dunque, per le proprietà della f.g. la v.a. Y è distribuita con legge Binomiale Negativa $\mathcal{BN}(n,\frac{1}{4})$. ♣

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. indipendenti $(X_n)_{n\geq 1}$ tale che la f.p di X_n è data da

$$p_{X_n}(x) = \frac{n-1}{n}\,\mathbf{1}_{\{0\}}(x) + \frac{1}{n}\,\mathbf{1}_{\{n\}}(x) \,.$$

Si verifichi che la successione di v.a. converge in probabilità ad una v.a. degenere concentrata su 0, ma non converge in media quadratica.
♠ **Soluzione.** Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\lim_n P(|X_n| > \varepsilon) = \lim_n \frac{1}{n} = 0 \,,$$

ovvero $X_n \xrightarrow{P} 0$ per $n \to \infty$. Dal momento che $\mathrm{E}[|X_n|^2] = n$, si ha

$$\lim_n \mathrm{E}[|X_n|^2] = \lim_n n = \infty \,,$$

ovvero la successione di v.a. non converge in media quadratica. ♣

• **Esercizio 6.** Sia dato il moto Browniano $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ ed il p.a. $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ tale che $M_t = e^{B_t+\frac{1}{2}t}$. Calcolando il differenziale stocastico di M, si verifichi se M è una martingala.
♠ **Soluzione.** Dalla Formula ridotta di Itô con $dX_t = dB_t$ e $g(x,y) = e^{x+\frac{1}{2}y}$, si ha

$$dM_t = dg(B_t,t) = e^{B_t+\frac{1}{2}t}\,dB_t + e^{B_t+\frac{1}{2}t}\,dt \,.$$

Dunque, M è un processo di Itô con $\alpha = (\alpha_t)_{t\in[0,T]}$ e $\beta = (\beta_t)_{t\in[0,T]}$ dove $\alpha_t = \beta_t = e^{B_t+\frac{1}{2}t}$, ovvero non è una martingala dal momento che il p.a. α non è identicamente nullo. ♣
♥ **Ulteriori rilievi.** Il p.a. M è un moto Browniano geometrico con $\mu = 1$ e $\sigma = 1$. Affinchè un moto Browniano geometrico sia una martingala deve sussistere la relazione $\mu = 0$. ♦

Esame del 14 Marzo 2022

• **Esercizio 1.** Dato lo spazio probabilizzato $(\Omega,\mathcal{F},P)$, si consideri i due eventi $E_1,E_2 \in \mathcal{F}$ tali che $P(E_1) = \frac{3}{4}$ e $P(E_2) = \frac{1}{3}$. Tenendo presenti le proprietà della probabilità, si verifichi che

$$\frac{1}{12} \leq P(E_1 \cap E_2) \leq \frac{1}{3} \, .$$

♠ **Soluzione.** Da due classiche disuguaglianze per la probabilità, nel caso di due eventi si ha $P(E_1 \cap E_2) \leq \min(P(E_1), P(E_2))$ e $P(E_1 \cap E_2) \geq P(E_1) + P(E_2) - 1$. Sostituendo i valori di $P(E_1)$ e $P(E_2)$, si ottiene la relazione richiesta. ♣

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = cx^{\frac{3}{2}}(1-x)\mathbf{1}_{]0,1[}(x) \, ,$$

si determini il valore della costante $c > 0$.

♠ **Soluzione.** Considerata la struttura di f_X, si evince che la v.a. X è distribuita con legge Beta ridotta $\mathcal{BE}(0, 1, \frac{5}{2}, 2)$. Dunque, deve risultare

$$c = \frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(2)} = \frac{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(2)} = \frac{35}{4} \, .$$ ♣

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2) = e^{-t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2 - t_1 t_2} \, ,$$

se ne determini la legge e la varianza generalizzata.

♠ **Soluzione.** Posto $t = (t_1, t_2)^{\mathrm{T}}$ e tenendo presente la forma quadratica all'esponente, φ_X può essere espresso come

$$\varphi_X(t_1, t_2) = e^{-\frac{1}{2}t^{\mathrm{T}}\Sigma t} \, ,$$

dove

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dunque, il v.v.a. X è distribuito con legge Normale Multivariata $\mathcal{N}_2(0, \Sigma)$, mentre la varianza generalizzata è data da $\det(\Sigma) = 1$. ♣

• **Esercizio 4.** Si consideri la v.a. X tale che $X = \sum_{k=1}^{Y} Z_k$, dove la legge della v.a. Y è Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, mentre le Z_k sono v.a. indipendenti e identicamente distribuite come la v.a. Z con legge di Bernoulli $\mathcal{B}(1, \pi)$. Tenendo presente i risultati per le leggi composte, si determini la legge della v.a. X.

♠ **Soluzione.** Le f.g. delle v.a. Y e Z sono $G_Y(t) = (1 - p + pt)^n$ e $G_Z(t) = 1 - \pi + \pi t$, da cui

$$G_X(t) = G_Y(G_Z(t)) = (1 - p\pi + p\pi t)^n \, .$$

Si deve concludere che la v.a. X si distribuisce con legge Binomiale $\mathcal{B}(n, p\pi)$. ♣

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ tale che la v.a. X_n possiede f.r. data da

$$F_{X_n}(x) = x^{3n} \, \mathbf{1}_{]0,1[}(x) + \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x) \, .$$

Si determini la legge della v.a. X per cui $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

♠ **Soluzione.** Banalmente, per ogni $x \in]-\infty, 0]$ si ha $\lim_n F_{X_n}(x) = 0$ e per ogni $x \in [1, \infty[$ si ha $\lim_n F_{X_n}(x) = 1$. Inoltre, per ogni $x \in]0, 1[$ si ha

$$\lim_n F_{X_n}(x) = \lim_n x^{3n} = 0 \,.$$

Dunque, $F_{X_n}(x)$ converge a $F_X(x) = \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)$ per ogni punto di continuità di F_X e quindi $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$.♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Dal momento che la convergenza in distribuzione verso una v.a. degenere implica la convergenza in probabilità, si ha anche $X_n \xrightarrow{P} 1$. ♦

• **Esercizio 6.** Se $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ è un moto Browniano, si consideri il p.a. $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ con $X_t = \int_0^t s dB_s$. Tenendo presente che X_t è un integrale di Wiener e se $I(X)$ è l'integrale stocastico di Itô, si calcoli $\mathrm{E}[I(X)]$ e $\mathrm{Var}[I(X)]$.

♠ **Soluzione.** Dal momento che X_t è un integrale di Wiener si ha $\mathrm{E}[X_t] = 0$ e

$$\mathrm{E}[X_t^2] = \mathrm{Var}[X_t] = \int_0^t s^2\,ds = \frac{t^3}{3} \,.$$

Per le proprietà dell'integrale di Itô si ha dunque $\mathrm{E}[I(X)] = 0$, mentre

$$\mathrm{Var}[I(X)] = \int_0^T \mathrm{E}[X_t^2]\,dt = \frac{T^4}{12} \,.$$ ♣

Prova intermedia del 26 Aprile 2022

• **Esercizio 1.** In una famiglia vi sono due adolescenti ed è noto che almeno uno dei due è una femmina. Assumendo che il genere sia equiprobabile, si determini la probabilità che entrambi gli adolescenti siano femmine.

♠ **Soluzione.** Codificando i due eventi elementari relativi al genere con i simboli f e m, lo spazio fondamentale relativo ad un singolo adolescente è dato da $\Omega = \{f, m\}$ e quindi lo spazio fondamentale prodotto relativo ai due adolescenti risulta

$$\Omega^2 = \{(f,f),(f,m),(m,f),(m,m)\} \,.$$

Per le assunzioni fatte, ogni evento elementare in Ω^2 ha probabilità $\frac{1}{4}$. Inoltre, $E_1 = \{(f,f)\}$ è l'evento che entrambi gli adolescenti siano femmine, mentre $E_2 = \{(f,f),(f,m),(m,f)\}$ è l'evento che almeno un adolescente sia femmina. Dunque, la probabilità richiesta è data da

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{1}{3} \,.$$ ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che il probabilista ingenuo è portato a pensare che la probabilità richiesta sia data da $\frac{1}{2}$. ♦

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \mathbf{1}_{]0,1[}(x) \,,$$

si consideri la v.a. trasformata $Y = \cos(2\pi X)$ e si calcoli $\mathrm{E}[Y]$ e $\mathrm{Var}[Y]$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$\mathrm{E}[Y] = \int_0^1 \cos(2\pi x)\,dx = 0$$

e

$$\mathrm{E}[Y^2] = \int_0^1 \cos(2\pi x)^2 \, dx = \frac{1}{2} \,,$$

da cui $\mathrm{Var}[Y] = \frac{1}{2}$. ♣

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ con d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = x_1 \, e^{-x_1 - x_2} \, \mathbf{1}_{]0,\infty[\times]0,\infty[}(x_1, x_2)$$

si determini la d.p. della v.a. somma $Y = X_1 + X_2$.
♠ **Soluzione.** La d.p. della v.a. Y è data da

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x, y-x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \, e^{-y} \, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x) \mathbf{1}_{]0,\infty[}(y-x) \, dx \\ &= e^{-y} \, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(y) \int_0^y x \, dx = \frac{1}{2} \, y^2 \, e^{-y} \, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(y) \,. \end{aligned}$$ ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che si ha

$$f_X(x_1, x_2) = x_1 \, e^{-x_1} \, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x_1) \, e^{-x_2} \, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x_2) \,,$$

per cui il v.v.a. X possiede componenti marginali indipendenti, rispettivamente distribuite con legge Gamma $\mathcal{G}(0, 1, 2)$ e legge Gamma $\mathcal{G}(0, 1, 1)$. Dunque, dal momento che la legge Gamma è additiva rispetto al parametro di forma, la v.a. Y è distribuita con legge Gamma $\mathcal{G}(0, 1, 3)$, come risulta immediato verificare dall'espressione di f_Y. ♦

Esame del 13 Giugno 2022

• **Esercizio 1.** Una lotteria è basata su un'estrazione da un'urna che contiene palline numerate con i primi cento numeri naturali. Una pallina viene estratta dall'urna in modo equiprobabile e i partecipanti alla lotteria vincono se il numero della pallina è divisibile per due o per cinque. Si determini la probabilità di vittoria.
♠ **Soluzione.** Codificando gli eventi elementari mediante i primi cento numeri naturali, lo spazio fondamentale relativo all'esperimento aleatorio è dato da $\Omega = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Se E_1 è l'evento che sia stato estratto un numero divisibile per due e E_2 è l'evento che sia stato estratto un numero divisibile per cinque, allora si ha $E_1 \cap E_2 = \{10, 20, \ldots, 100\}$. Sulla base di quanto specificato riguardo all'esperimento si assume l'assegnazione di Laplace e risulta

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{10} \,.$$ ♣

• **Esercizio 2.** Si consideri la v.a. X che ammette d.p. data da

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \, \mathbf{1}_{]-1,1[}(x)$$

e si determini la d.p. della v.a. $Y = -\log(|X|)$.
♠ **Soluzione.** La trasformata $g(x) = -\log(|x|)$ non è biunivoca per $x \in \,]-1, 1[$, ma si può esprimere come somma di funzioni biunivoche su una partizione, ovvero

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) \,,$$

dove $g_1(x) = -\log(-x)\mathbf{1}_{]-1,0[}(x)$ e $g_2(x) = -\log(x)\mathbf{1}_{]0,1[}(x)$. Dunque, si ottiene

$$f_Y(y) = f_X(g_1^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy}\, g_1^{-1}(y) \right| + f_X(g_2^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy}\, g_2^{-1}(y) \right| ,$$

ovvero, essendo $g_1^{-1}(y) = -e^{-y}$ e $g_2^{-1}(y) = e^{-y}$, si ha

$$f_Y(y) = e^{-y}\, \mathbf{1}_{[0,\infty[}(y) \ . \qquad ♣$$

♥ **Ulteriori rilievi.** In modo alternativo, si può considerare inizialmente la trasformata $Z = |X|$ con relativa d.p.

$$f_Z(z) = 2f_X(z)\mathbf{1}_{[0,\infty[}(z) = \mathbf{1}_{[0,1[}(z)$$

e successivamente la trasformata monotona $Y = -\log(Z)$ con relativa d.p.

$$f_Y(y) = f_Z(e^{-y})e^{-y} = e^{-y}\, \mathbf{1}_{[0,\infty[}(y) \ . \qquad ♦$$

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = 6x_2\, \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1 + x_2) \ ,$$

si determini il valore atteso condizionato $\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1]$.
♠ **Soluzione.** La d.p. della v.a. X_1 è data da

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^{1-x_1} 6x_2\, \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\, dx_2 = 3(1-x_1)^2\, \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) \ .$$

Dalla definizione di valore atteso della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$, per $x_1 \in \,]0,1[$ si ha

$$\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1] = \int_0^{1-x_1} x_2 \frac{6x_2}{3(1-x_1)^2}\, dx_2 = \frac{2}{3}\,(1-x_1) \ . \qquad ♣$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Il v.v.a. $(X_1, X_2, 1 - X_1 - X_2)^{\mathrm{T}}$ è distribuito con legge di Dirichlet $\mathcal{D}(\alpha)$ dove $\alpha = (1,2,1)^{\mathrm{T}}$. ♦

• **Esercizio 4.** Si consideri la v.a. X_1 con f.g.

$$G_{X_1}(t) = \left(\frac{2}{3-t} \right)^2$$

e la v.a. X_2 con f.g.

$$G_{X_2}(t) = \left(\frac{2}{3-t} \right)^5 .$$

Si determini la legge della v.a. $Y = X_1 + X_2$.
♠ **Soluzione.** La v.a. X_1 è distribuita con legge Binomiale Negativa $\mathcal{BN}(2, \frac{2}{3})$, mentre la v.a. X_2 è distribuita con legge Binomiale Negativa $\mathcal{BN}(5, \frac{2}{3})$. Dal momento che la legge Binomiale Negativa è additiva rispetto al primo parametro, risulta immediato verificare che la v.a. Y è distribuita con legge Binomiale Negativa $\mathcal{BN}(7, \frac{2}{3})$. ♣

• **Esercizio 5.** Si considerino due successioni di v.a. a valori positivi $(X_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ tali che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 4$ e $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$ per $n \to \infty$. Si determini la legge della v.a. X tale che $\frac{\sqrt{X_n}}{Y_n} \xrightarrow{P} X$ per $n \to \infty$.

♠ **Soluzione.** Dal momento che la convergenza in distribuzione verso una v.a. degenere implica la convergenza in probabilità, si ha anche $X_n \xrightarrow{P} 4$ e $Y_n \xrightarrow{P} 1$. Inoltre, per il Teorema della Trasformata continua si ha $\sqrt{X_n} \xrightarrow{P} 2$ e quindi dal Teorema di Cramér-Slutsky risulta $\frac{\sqrt{X_n}}{Y_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} 2$. Dunque, si ha infine che $\frac{\sqrt{X_n}}{Y_n} \xrightarrow{P} 2$, ovvero la v.a. X è degenere con $P(X = 2) = 1$. ♣

• **Esercizio 6.** Sia $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ un moto Browniano. Se $I(B) = \int_0^T B_t dB_t$, si calcoli $\mathrm{E}[I(B)]$ e $\mathrm{Var}[I(B)]$.
♠ **Soluzione.** Per le proprietà del moto Browniano, si ha $\mathrm{E}[B_t] = 0$ e $\mathrm{E}[B_t^2] = \mathrm{Var}[B_t] = t$. Inoltre, per le proprietà dell'integrale di Itô si ha $\mathrm{E}[I(B)] = 0$, mentre

$$\mathrm{Var}[I(B)] = \int_0^T \mathrm{E}[B_t^2]\, dt = \frac{T^2}{2}\ .$$ ♣

Esame del 11 Luglio 2022

• **Esercizio 1.** In un circolo sportivo in cui vi sono N iscritti, due responsabili vengono scelti annualmente mediante un'estrazione effettuata in modo equiprobabile. Si determini la probabilità che un iscritto ricopra una delle due cariche in un certo anno. Se l'estrazione viene ripetuta con le medesime modalità, si determini inoltre la probabilità che l'iscritto ricopra una delle due cariche in due anni consecutivi.
♠ **Soluzione.** Dal momento che vi sono $\binom{N}{2}$ modi di selezionare due responsabili fra gli N iscritti, la prima probabilità richiesta è data da $\binom{N}{2}^{-1}$. Dal momento che le estrazioni sono indipendenti, la seconda probabilità richiesta è data da $\binom{N}{2}^{-2}$. ♣

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = c(1-x^2)^{\frac{5}{2}}\, \mathbf{1}_{]0,1[}(x)\ ,$$

si determini il valore della costante $c > 0$, eventualmente considerando la legge della v.a. trasformata $Y = X^2$.
♠ **Soluzione.** Si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = c\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{5}{2}}\, dx = \frac{c}{2}\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{5}{2}}\, dx\ .$$

Dal momento che

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{5}{2}}\, dx = B\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(4)} = \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})^2}{\Gamma(4)} = \frac{5\pi}{16}\ ,$$

deve essere $c = \frac{32}{5\pi}$. In effetti, la v.a. Y è distribuita con legge Beta ridotta $\mathcal{BE}(0,1,\frac{1}{2},\frac{7}{2})$. ♣

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1,x_2) = 2(1-x_1-x_2+2x_1x_2)\, \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\ ,$$

si determini il valore atteso condizionato $\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1]$.
♠ **Soluzione.** La d.p. della v.a. X_1 è data da

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^1 2(1 - x_1 - x_2 + 2x_1x_2)\, \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\, dx_2 = \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\ .$$

Dalla definizione di valore atteso della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$, per $x_1 \in\ ]0,1[$ si ha

$$\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1] = \int_0^1 x_2 \cdot 2(1 - x_1 - x_2 + 2x_1x_2)\, dx_2 = \frac{1}{3}\,(1 + x_1)\ . \qquad ♣$$

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2) = e^{\mathrm{i}t_1 + t_1t_2 - t_1^2 - t_2^2}\ ,$$

si determini le leggi delle due componenti marginali e si verifichi se sono indipendenti.
♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.c.m. si ha

$$\varphi_{X_1}(t_1) = \varphi_X(t_1, 0) = e^{\mathrm{i}t_1 - t_1^2}$$

e

$$\varphi_{X_2}(t_2) = \varphi_X(0, t_2) = e^{-t_2^2}\ .$$

Dunque, la v.a. X_1 è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(1, 2)$, mentre la v.a. X_2 è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(0, 2)$. Le due componenti non sono indipendenti in quanto $\varphi_X(t_1, t_2) \neq \varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2)$.♣

• **Esercizio 5.** Dato il moto Browniano $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ ed il p.a. $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ tale che $M_t = B_t + B_t^2 - t$, si verifichi che M è una martingala, tenendo presente l'espressione mediante l'integrale di Itô delle v.a. B_t e B_t^2.
♠ **Soluzione.** Dal momento che

$$B_t^2 = t + 2\int_0^t B_s\, dB_s\ ,$$

allora risulta

$$M_t = \int_0^t dB_s + 2\int_0^t B_s\, dB_s = \int_0^t (1 + 2B_s)\, dB_s\ .$$

Quindi, M è un processo di Itô con $\alpha = (\alpha_t)_{t\in[0,T]}$ e $\beta = (\beta_t)_{t\in[0,T]}$ dove $\alpha_t = 0$ e $\beta_t = 1 + 2B_t$, ovvero è una martingala dal momento che il p.a. α è identicamente nullo, mentre $\beta \in \mathcal{M}_T^2$ essendo $(1 + 2B_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{M}_T^2$. ♣
♥ **Ulteriori rilievi.** Risulta immediato verificare che M è una martingala, dal momento che i p.a. $(B_t)_{t\in[0,T]}$ e $(B_t^2 - t)_{t\in[0,T]}$ sono martingale e che la somma di martingale è una martingala. ♦

• **Esercizio 6.** Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = t^2 dt + dB_t$$

con condizione iniziale $X_0 = 0\ q.c.$ e se ne determini la soluzione. Si calcoli inoltre $\mathrm{E}[X_t]$ e $\mathrm{Var}[X_t]$.
♠ **Soluzione.** Dalla definizione di processo di Itô si ha

$$X_t = \int_0^t s^2 ds + \int_0^t dB_s = \frac{t^3}{3} + B_t\ .$$

Inoltre, per le proprietà del moto Browniano si ha

$$\mathrm{E}[X_t] = \frac{t^3}{3} + \mathrm{E}[B_t] = \frac{t^3}{3}$$

e

$$\mathrm{Var}[X_t] = \mathrm{Var}[B_t] = t\,. \qquad ♣$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Per le proprietà del moto Browniano, la v.a. X_t è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(\frac{t^3}{3}, t)$. ♦

Esame del 5 Settembre 2022

• **Esercizio 1.** In una popolazione viene considerata un'indagine relativa ai comportamenti rispetto al fumo e al genere. La probabilità di selezionare un fumatore nella popolazione è pari a $\frac{1}{4}$. Inoltre, la probabilità di selezionare un uomo dato che il soggetto è fumatore è pari a $\frac{7}{10}$, mentre la probabilità di selezionare un uomo è pari a $\frac{1}{2}$. Si determini la probabilità di essere fumatore dato che si è selezionato un uomo.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento di essere fumatori, mentre sia E l'evento di essere uomo. Si ha $P(E_1) = \frac{1}{4}$, mentre $P(E \mid E_1) = \frac{7}{10}$ e $P(E) = \frac{1}{2}$. Considerando la Formula di Bayes, la probabilità di essere fumatore dato che si è selezionato un uomo risulta

$$P(E_1 \mid E) = \frac{P(E \mid E_1)P(E_1)}{P(E)} = \frac{7}{20}\,. \qquad ♣$$

• **Esercizio 2.** Si considerino le v.a. indipendenti X_1 e X_2 distribuite rispettivamente con legge di Bernoulli di parametro $\frac{1}{2}$. Si determini la legge condizionata della v.a. X_1 all'evento $\{X_1 + X_2 = 1\}$.

♠ **Soluzione.** Tenendo presente la Formula di Bayes, la f.p. condizionata della v.a. X_1 all'evento $\{X_1 + X_2 = 1\}$ è data da

$$\begin{aligned} p_{X_1|X_1+X_2=1}(x_1) = P(X_1 = x_1 \mid X_1 + X_2 = 1) &= \frac{P(X_1 + X_2 = 1 \mid X_1 = x_1)P(X_1 = x_1)}{P(X_1 + X_2 = 1)} \\ &= \frac{P(X_2 = 1 - x_1)P(X_1 = x_1)}{P(X_1 + X_2 = 1)}\,\mathbf{1}_{\{0,1\}}(x_1) = \frac{1}{2}\,\mathbf{1}_{\{0,1\}}(x_1)\,, \end{aligned}$$

dal momento che $P(X_2 = 1 - x_1) = P(X_1 = x_1) = \frac{1}{2}$ per $x_1 \in \{0, 1\}$, mentre la v.a. $(X_1 + X_2)$ è distribuita con legge Binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$ e quindi $P(X_1 + X_2 = 1) = \frac{1}{2}$. ♣

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = 2\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1 + x_2)\,,$$

si determini $\mathrm{E}[Y_1Y_2]$ dove $Y = (Y_1, Y_2)^{\mathrm{T}} = (X_1, X_1X_2)^{\mathrm{T}}$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$\mathrm{E}[Y_1Y_2] = \mathrm{E}[X_1^2X_2] = \int_0^1\int_0^{1-x_1} x_1^2x_2 \cdot 2\,dx_1dx_2 = \int_0^1 x_1^2(1 - x_1)^2\,dx_1 = \frac{\Gamma(3)^2}{\Gamma(6)} = \frac{1}{30}\,. \qquad ♣$$

• **Esercizio 4.** Date le v.a. indipendenti X_1, X_2 e X_3, rispettivamente con legge di Poisson $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ e $\mathcal{P}(3)$, si determini la legge della v.a. $Y = X_1 + X_2 + X_3$.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.g. si ha

$$G_Y(t) = \prod_{i=1}^{3} G_{X_i}(t) = e^{6(t-1)} \, .$$

Dunque, la v.a. Y è distribuita con legge di Poisson $\mathcal{P}(6)$. ♣

• **Esercizio 5.** Data la v.a. assolutamente continua Z che ammette f.r.

$$F_Z(z) = (1 - e^{-z^2}) \, \mathbf{1}_{[0,\infty[}(z) \, ,$$

si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ tale che $X_n = n^{-1} Z$. Si verifichi che la successione di v.a. converge in probabilità ad una v.a. degenere concentrata su 0.

♠ **Soluzione.** La f.r. della v.a. X_n è data da

$$F_{X_n}(x) = (1 - e^{-n^2 x^2}) \, \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x) \, ,$$

da cui

$$\lim_n F_{X_n}(x) = \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x) \, ,$$

ovvero $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$ per $n \to \infty$. Dal momento che la convergenza in distribuzione verso una v.a. degenere implica la convergenza in probabilità, si ha anche $X_n \xrightarrow{P} 0$. ♣

• **Esercizio 6.** Sia $X = (B_t^2)_{t \in [0,T]}$ dove $B = (B_t)_{t \in [0,T]}$ è un moto Browniano. Se $I(X)$ è l'integrale di Itô, si calcoli $\mathrm{E}[I(X)]$ e $\mathrm{Var}[I(X)]$.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà del moto Browniano, si ha

$$\mathrm{E}[X_t^2] = \mathrm{E}[B_t^4] = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \, \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \, e^{-\frac{1}{2t}x^2} \, dx = t^2 \int_{-\infty}^{\infty} z^4 \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{1}{2}z^2} \, dz = 3t^2 \, .$$

Inoltre, per le proprietà dell'integrale di Itô si ha $\mathrm{E}[I(X)] = 0$, mentre

$$\mathrm{Var}[I(X)] = \int_0^T \mathrm{E}[X_t^2] \, dt = T^3 \, .$$ ♣

Esame del 20 Settembre 2022

• **Esercizio 1.** Tre monete equilibrate vengono lanciate contemporaneamente in modo indipendente. Se almeno due monete mostrano la faccia contrassegnata dalla testa, si verifichi che la probabilità di avere testa anche per la terza moneta è pari ad $\frac{1}{4}$. Al fine di risolvere l'esercizio, è conveniente descrivere opportunamente lo spazio degli eventi, prima di considerare la probabilità condizionata richiesta.

♠ **Soluzione.** L'esperimento aleatorio considerato è equivalente a tre lanci ripetuti di una singola moneta. Codificando i due eventi elementari relativi ad un singolo lancio con i simboli t e c, lo spazio fondamentale è dato da $\Omega = \{t, c\}$ e quindi lo spazio fondamentale prodotto relativo all'esperimento aleatorio considerato risulta

$$\Omega^3 = \{(t,t,t), (t,t,c), (t,c,t), (c,t,t), (t,c,c), (c,t,c), (c,c,t), (c,c,c)\} \, .$$

Per le assunzioni fatte, ogni evento elementare in Ω^3 ha probabilità $\frac{1}{8}$. Dunque, se $E_1 = \{(t,t,t)\}$ e $E_2 = \{(t,t,t), (t,t,c), (t,c,t), (c,t,t)\}$, la probabilità richiesta è data da

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{1}{4} \,. \qquad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Il problema considerato è anche detto paradosso di Galton (Francis Galton, 1822-1911, uno dei padri fondatori della statistica), in quanto il probabilista ingenuo è portato ad affermare che la probabilità richiesta sia pari a $\frac{1}{2}$. ♦

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \frac{3}{4}\,(1 - x^2)\,\mathbf{1}_{]-1,1[}(x)\,,$$

si determini la d.p. della v.a. trasformata $Y = |X|$.

♠ **Soluzione.** La trasformata $g(x) = |x|$ non è biunivoca per $x \in\,]-1, 1[$, anche se si può esprimere come somma di funzioni biunivoche su una partizione, ovvero $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ con $g_1(x) = \,-\,x\mathbf{1}_{]-1,0[}(x)$ e $g_2(x) = x\mathbf{1}_{]0,1[}(x)$. Tenendo presente che

$$f_Y(y) = f_X(g_1^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}\,g_1^{-1}(y)\right| + f_X(g_2^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}\,g_2^{-1}(y)\right|$$

ed essendo $g_1^{-1}(y) = \,-\,y$ e $g_2^{-1}(y) = y$, si ha

$$f_Y(y) = \frac{3}{2}\,(1 - x^2)\,\mathbf{1}_{[0,1[}(y)\,. \qquad \clubsuit$$

• **Esercizio 3.** Si consideri la v.a. assolutamente continua X_1 con d.p.

$$f_{X_1}(x_1) = \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\,.$$

Data la v.a. trasformata $Y = \sqrt{X}$, si determini $\mathrm{Var}[Y]$.

♠ **Soluzione.** Per $r = 0, 1, \ldots$ si ha

$$\mathrm{E}[Y^r] = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}r}\,dx = \frac{2}{r+2}\,,$$

da cui

$$\mathrm{Var}[Y] = \mathrm{E}[Y^2] - \mathrm{E}[Y]^2 = \frac{1}{18}\,. \qquad \clubsuit$$

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. discreto $X = (X_1, X_2, X_3)^{\mathrm{T}}$ con f.g.p.

$$G_X(t_1, t_2, t_3) = \left(\frac{1}{6}\,t_1 + \frac{1}{3}\,t_2 + \frac{1}{2}\,t_3\right)^4,$$

si determini $\mathrm{Cov}[X_1, X_3]$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$\mathrm{E}[X_1] = \left.\frac{\partial G_X(t_1, t_2, t_3)}{\partial t_1}\right|_{t_1,t_2,t_3=1} = \frac{2}{3}$$

e

$$\mathrm{E}[X_3] = \frac{\partial G_X(t_1,t_2,t_3)}{\partial t_3}\bigg|_{t_1,t_2,t_3=1} = 2\,,$$

mentre

$$\mathrm{E}[X_1X_3] = \frac{\partial^2 G_X(t_1,t_2,t_3)}{\partial t_1 \partial t_3}\bigg|_{t_1,t_2,t_3=1} = 1\,.$$

Dunque, risulta

$$\mathrm{Cov}[X_1,X_3] = -\frac{1}{3}\,. \qquad ♣$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Il v.v.a. X è distribuito con legge Multinomiale di parametri $n=4$ e $p=(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$. Quindi, si ottiene immediatamente che $\mathrm{Cov}[X_1,X_3] = -np_1p_3 = -\frac{1}{3}$. ♦

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. indipendenti $(X_n)_{n\geq 1}$ tale che X_n è una v.a. con f.p. data da

$$p_{X_n}(x) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\mathbf{1}_{\{1\}}(x) + \frac{1}{n}\,\mathbf{1}_{\{n+1\}}(x)\,.$$

Mediante l'uso della f.g. si verifichi che $X_n \xrightarrow{P} 1$ per $n\to\infty$. Si verifichi inoltre che la successione non converge in media quadratica ad 1.

♠ **Soluzione.** Si osservi che

$$G_{X_n}(t) = \left(1-\frac{1}{n}\right)t + \frac{1}{n}\,t^{n+1}$$

e, dal momento che $t\in[0,1]$, si ha

$$\lim_n G_{X_n}(t) = t\,.$$

Tenendo presente che $G_X(t)=t$ implica che $P(X=1)=1$, si ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$ per $n\to\infty$ e quindi $X_n \xrightarrow{P} 1$ per $n\to\infty$. Inoltre, risulta

$$\lim_n \mathrm{E}[(X_n-1)^2] = \lim_n n = \infty$$

e quindi la successione non converge in media quadratica. ♣

• **Esercizio 6.** Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = -2X_t dt + 3dB_t\,,$$

con condizione iniziale $X_0=0$, e se ne determini la soluzione.

♠ **Soluzione.** Risulta semplice verificare che il processo $X=(X_t)_{t\in[0,\infty[}$ è un processo di Itô. Si consideri l'ulteriore processo di Itô $Y=(Y_t)_{t\in[0,\infty[}$, dove $Y_t=e^{2t}$ è un processo deterministico. Dalla formula di integrazione per parti, si ha

$$d(X_tY_t) = e^{2t}dX_t + 2e^{2t}X_tdt = e^{2t}(-2X_tdt+3dB_t) + 2e^{2t}\,X_tdt = 3e^{2t}dB_t\,,$$

ovvero

$$e^{2t}X_t = \int_0^t 3e^{2s}dB_s \ .$$

Dunque, la soluzione $X = (X_t)_{t\in[0,1[}$ dell'equazione differenziale stocastica è tale che

$$X_t = 3e^{-2t}\int_0^t e^{2s}dB_s \ .$$

La soluzione poteva essere ottenuta immediatamente riconoscendo che l'equazione differenziale stocastica è quella relativa ad un processo di Ornstein e Uhlenbeck con $\mu = 2$ e $\sigma = 3$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che $\int_0^t e^{2s}dB_s$ è un integrale di Wiener e quindi, essendo $\int_0^t e^{4s}ds = \frac{1}{4}(e^{4t}-1)$, è una v.a. con legge Normale $\mathcal{N}(0,\frac{1}{4}(e^{4t}-1))$. Quindi, la v.a. X_t è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(0,\frac{9}{4}(1-e^{-4t}))$. ♦

Esame del 3 Ottobre 2022

• **Esercizio 1.** Un'urna contiene 20 palline rosse, 40 palline nere e 40 palline verdi. Una prima pallina viene estratta dall'urna e viene accantonata senza osservarne il colore. Se una seconda pallina viene estratta dall'urna, si determini la probabilità che sia rossa.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento relativo alla prima estrazione di una pallina rossa dall'urna, mentre sia E l'evento relativo alla seconda estrazione di una pallina rossa. Si ha $P(E_1) = \frac{1}{5}$ e $P(E_1^c) = \frac{4}{5}$. Inoltre, $P(E \mid E_1) = \frac{19}{99}$ e $P(E \mid E_1^c) = \frac{20}{99}$. Dal momento che gli eventi E_1 e E_1^c costituiscono una partizione dello spazio fondamentale, applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E \mid E_1)P(E_1) + P(E \mid E_1^c)P(E_1^c) = \frac{1}{5} \ .$$ ♣

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\,e^{-|x|} \ ,$$

si determini la d.p. della v.a. trasformata $Y = X^2$.

♠ **Soluzione.** Data la funzione $g(x) = x^2$, l'immagine di $\mathbb{R}$ è data da $\mathbb{R}^+$, ovvero $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$. Inoltre, l'immagine inversa dell'intervallo $[0,y]$ è l'intervallo $[-\sqrt{y},\sqrt{y}]$, ovvero $g^{-1}([0,y]) = [-\sqrt{y},\sqrt{y}]$. In questo caso, dal momento che la v.a. X è assolutamente continua, si ha

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X \in [-\sqrt{y},\sqrt{y}])\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y) = (F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}))\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y) \ ,$$

ovvero la v.a. Y ammette d.p. data da

$$f_Y(y) = (f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}))\,\frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\,e^{-\sqrt{y}}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(y) \ .$$ ♣

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1,x_2) = 60x_1^2x_2\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1+x_2) \ ,$$

si determini il valore atteso condizionato $\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1]$.

♠ **Soluzione.** La d.p. della v.a. X_1 è data da

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^{1-x_1} 60x_1^2 x_2 \,\mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\, dx_2 = 30x_1^2(1-x_1)^2\, \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\,.$$

Dalla definizione di valore atteso della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$, per $x_1 \in\,]0,1[$ si ha

$$\mathrm{E}[X_2 \mid X_1 = x_1] = \int_0^{1-x_1} x_2 \,\frac{2x_2}{(1-x_1)^2}\, dx_2 = \frac{2}{3}\,(1-x_1)\,.$$ ♣

● **Esercizio 4.** Si consideri la v.a. X tale che $X = \sum_{k=1}^{Y} Z_k$, dove Y è una v.a. distribuita con legge di Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, mentre le Z_k sono v.a. indipendenti e identicamente distribuite come la v.a. Z con legge di Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$. Tenendo presente i risultati per le leggi composte, si determini la legge della v.a. X.

♠ **Soluzione.** Le f.g. delle v.a. Y e Z sono $G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}$ e $G_Z(t) = 1 - p + pt$, da cui

$$G_X(t) = G_Y(G_Z(t)) = e^{p\lambda(t-1)}\,.$$

Si deve concludere che la v.a. X si distribuisce con legge di Poisson $\mathcal{P}(p\lambda)$. ♣

● **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. indipendenti $(X_n)_{n\geq 1}$ tale che X_n è una v.a. con f.p. data da

$$p_{X_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbf{1}_{\{1\}}(x) + \frac{1}{n}\, \mathbf{1}_{\{n\}}(x)\,.$$

Mediante l'uso della f.g. si determini la legge della v.a. X tale che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n \to \infty$.

♠ **Soluzione.** Si osservi che

$$G_{X_n}(t) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) t + \frac{1}{n}\, t^n$$

e, tenendo presente che $t \in [0,1]$, si ha

$$\lim_n G_{X_n}(t) = t\,.$$

La precedente espressione fornisce la f.g. di una v.a. X degenere nel valore 1, ovvero $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$. ♣

● **Esercizio 6.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{[0,1]}$, si determini la legge dell'integrale stocastico $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dB_t$.

♠ **Soluzione.** Si noti che I è un integrale di Wiener e che

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dt = \log 2 < \infty\,.$$

Dunque, I è una v.a. con legge Normale $\mathcal{N}(0, \log 2)$. ♣