

Esame dell'8 Giugno 2020

● **Esercizio 1.** In un test a risposta multipla sono possibili 4 risposte, di cui una solamente è corretta. Un soggetto sottoposto al test conosce la risposta esatta con una probabilità pari a $\frac{7}{10}$ e risponde altrimenti in modo casuale. Se il soggetto risponde correttamente al test, si determini la probabilità che conosca effettivamente la risposta esatta.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E l'evento che il soggetto fornisca la risposta esatta, mentre siano E_1 e E_1^c rispettivamente gli eventi che il soggetto conosca o non conosca la risposta esatta. Dunque, risulta $P(E_1) = \frac{7}{10}$ e $P(E_1^c) = \frac{3}{10}$. Ovviamente, si ha $P(E | E_1) = 1$, mentre dalle ipotesi risulta $P(E | E_1^c) = \frac{1}{4}$. Applicando la Legge delle Probabilità Totali si ha

$$P(E) = P(E | E_1)P(E_1) + P(E | E_1^c)P(E_1^c) = \frac{31}{40}.$$

Sulla base della Formula di Bayes si ottiene la probabilità richiesta, ovvero

$$P(E_1 | E) = \frac{P(E | E_1)P(E_1)}{P(E)} = \frac{28}{31}. \quad \clubsuit$$

● **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con f.r.

$$F_X(x) = e^{-x^{-4}} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x),$$

si verifichi che effettivamente F_X è una f.r. e si calcoli $E[X]$.

♠ **Soluzione.** La f.r. è assolutamente continua dal momento che $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$, dove la versione della d.p. può essere scelta come

$$f_X(x) = 4x^{-5}e^{-x^{-4}} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x).$$

In effetti, F_X è una f.r. dal momento che $0 \leq F_X(x) \leq 1$ e $\frac{d}{dx}F_X(x) \geq 0$. Inoltre, risulta

$$E[X] = 4 \int_0^\infty x^{-4}e^{-x^{-4}} dx = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{4}}e^{-x} dx = \Gamma\left(\frac{3}{4}\right). \quad \clubsuit$$

● **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{3}{4} \mathbf{1}_{]-1, 1[}(x_1) \mathbf{1}_{]0, 1-x_1^2[}(x_2),$$

si determini le d.p. delle componenti marginali.

♠ **Soluzione.** Le d.p.m. della prima e della seconda componente marginale sono rispettivamente date da

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{3}{4} \int_0^{1-x_1^2} \mathbf{1}_{]-1, 1[}(x_1) dx_2 = \frac{3}{4} (1 - x_1^2) \mathbf{1}_{]-1, 1[}(x_1)$$

e

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{3}{4} \int_{-\sqrt{1-x_2}}^{\sqrt{1-x_2}} \mathbf{1}_{]0, 1[}(x_2) dx_1 = \frac{3}{2} \sqrt{1-x_2} \mathbf{1}_{]0, 1[}(x_2). \quad \clubsuit$$

● **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2, t_3) = e^{it_1 - t_1^2 - t_2^2 - t_3^2},$$

si determini le leggi delle componenti marginali. Si verifichi inoltre se le componenti marginali sono indipendenti.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.c.m. si ha

$$\varphi_{X_1}(t_1) = \varphi_X(t_1, 0, 0) = e^{it_1 - t_1^2}, \varphi_{X_2}(t_2) = \varphi_X(0, t_2, 0) = e^{-t_2^2}, \varphi_{X_3}(t_3) = \varphi_X(0, 0, t_3) = e^{-t_3^2}.$$

Dunque, la v.a. X_1 è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(1, 2)$, mentre le v.a. X_2 e X_3 sono rispettivamente distribuite con legge Normale $\mathcal{N}(0, 2)$. Le componenti marginali sono indipendenti, dal momento che $\varphi_X(t_1, t_2, t_3) = \varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2)\varphi_{X_3}(t_3)$. ♣

● **Esercizio 5.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{t \in [0, \infty[}$, assumendo che $s \leq t$ e tenendo presente che $E[B_s^4] = 3s^2$, si calcoli $E[B_s^2 B_t^2]$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$E[B_s^2 B_t^2] = E[B_s^2 (B_t - B_s + B_s)^2] = E[B_s^2 (B_t - B_s)^2 + 2B_s^3 (B_t - B_s) + B_s^4].$$

Per le proprietà del moto Browniano, risulta

$$E[B_s^2 B_t^2] = E[B_s^2]E[(B_t - B_s)^2] + 2E[B_s^3]E[B_t - B_s] + E[B_s^4] = st + 2s^2,$$

dal momento che $E[B_s^2] = s$, $E[(B_t - B_s)^2] = t - s$ e $E[B_t - B_s] = 0$. ♣

● **Esercizio 6.** Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = -X_t dt + dB_t,$$

con condizione iniziale $X_0 = C$, e se ne determini la soluzione.

♠ **Soluzione.** Risulta semplice verificare che il processo $X = (X_t)_{t \in [0, \infty[}$ è un processo di Itô. Si consideri l'ulteriore processo di Itô $Y = (Y_t)_{t \in [0, \infty[}$, dove $Y_t = e^t$ è un processo deterministico. Dalla formula di integrazione per parti, si ha

$$d(X_t Y_t) = e^t dX_t + e^t X_t dt = e^t dB_t,$$

ovvero

$$e^t X_t = C + \int_0^t e^s dB_s.$$

Dunque, la soluzione $X = (X_t)_{t \in [0, \infty[}$ dell'equazione differenziale stocastica è tale che

$$X_t = Ce^{-t} + e^{-t} \int_0^t e^s dB_s.$$

L'esercizio poteva essere risolto immediatamente riconoscendo che l'equazione differenziale stocastica è quella relativa ad un processo di Ornstein e Uhlenbeck con $\mu = 1$ e $\sigma = 1$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si noti che $\int_0^t e^s dB_s$ è un integrale di Wiener e quindi, essendo $\int_0^t e^{2s} ds = \frac{1}{2}(e^{2t} - 1)$, è una v.a. con legge Normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2}(e^{2t} - 1))$. ♦

Esame del 6 Luglio 2020

● **Esercizio 1.** Un test di laboratorio verifica la presenza di una patologia con una probabilità pari a 0.99 e produce falsi positivi con una probabilità pari a 0.01. Se in una popolazione la patologia è

presente con una probabilità pari a 0.01, si determini la probabilità che un soggetto risultato positivo al test presenti effettivamente la patologia.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento relativo alla presenza della patologia, mentre sia E l'evento relativo alla positività al test. Si ha $P(E_1) = 0.01$ e quindi $P(E_1^c) = 0.99$. Inoltre, $P(E | E_1) = 0.99$ e $P(E | E_1^c) = 0.01$. Dal momento che gli eventi E_1 e E_1^c costituiscono una partizione dello spazio fondamentale, applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E | E_1)P(E_1) + P(E | E_1^c)P(E_1^c) = 0.0198.$$

Considerando inoltre la Formula di Bayes, si ha

$$P(E_1 | E) = \frac{P(E | E_1)P(E_1)}{P(E)} = 0.50.$$

♣

● **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

si determini la d.p. della v.a. trasformata $Y = \sqrt{|X|}$.

♠ **Soluzione.** Data la funzione $g(x) = \sqrt{|x|}$, l'immagine inversa dell'intervallo $[0, y]$ è data dall'intervallo $[-y^2, y^2]$, ovvero $g^{-1}([0, y]) = [-y^2, y^2]$. In questo caso, dal momento che la v.a. X è assolutamente continua, si ha

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \in [-y^2, y^2])\mathbf{1}_{[0, \infty[}(y) = (F_X(y^2) - F_X(-y^2))\mathbf{1}_{[0, \infty[}(y),$$

ovvero, dal momento che $f_X(x) = f_X(-x)$,

$$F_Y(y) = (2F_X(y^2) - 1)\mathbf{1}_{[0, \infty[}(y).$$

Dunque, la v.a. Y ammette d.p. data da

$$f_Y(y) = 2f_X(y^2) \cdot 2y \mathbf{1}_{[0, \infty[}(y) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} y e^{-\frac{1}{2}y^4} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(y).$$

♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si noti che f_Y è effettivamente una d.p. dal momento che

$$\int_0^\infty \frac{4}{\sqrt{2\pi}} y e^{-\frac{1}{2}y^4} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

♦

● **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2, t_3) = e^{-t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 - 2t_1 t_2 - i t_3},$$

si determini la legge della v.a. trasformata somma $Y = X_1 + X_2 + X_3$.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.c.m. si ha

$$\varphi_Y(t) = \varphi_X(t, t, t) = e^{-it - 5t^2}.$$

Dunque, la v.a. trasformata somma Y è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(-1, 10)$.

♣

● **Esercizio 4.** Si consideri la successione di v.a. $(\sqrt{n}(S_n - 1))_{n \geq 1}$ tale che $S_n = n^{-1}X_n$ e la v.a. X_n è distribuita con legge di Poisson $\mathcal{P}(n)$. Tenendo presente il Metodo Delta, si determini la convergenza in legge della v.a. S_n^2 per $n \rightarrow \infty$.

♠ **Soluzione.** Si noti che $E[S_n] = 1$ e $\text{Var}[S_n] = \frac{1}{n}$ e che X_n è la somma di n v.a. indipendenti con legge di Poisson $\mathcal{P}(1)$. Dunque, per il Teorema Centrale del Limite si ha che $\sqrt{n}(S_n - 1) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ per $n \rightarrow \infty$, dove la v.a. Z è distribuita con legge $\mathcal{N}(0, 1)$. Sulla base del Metodo Delta, essendo $g(x) = x^2$ e

$$Y_n = \sqrt{n} \frac{g(S_n) - g(1)}{|g'(1)|} = \sqrt{n} \frac{S_n^2 - 1}{2},$$

si ottiene dunque che $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ per $n \rightarrow \infty$. ♣

• **Esercizio 5.** Se i p.a. $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ e $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$ sono martingale, si verifichi che il p.a. $M = (X_t + Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$ è una martingala.

♠ **Soluzione.** Per ogni t si ha

$$E[|M_t|] = E[|X_t + Y_t|] \leq E[|X_t| + |Y_t|] = E[|X_t|] + E[|Y_t|] < \infty.$$

Inoltre, dalla definizione di martingala si ha

$$E[M_t | \mathcal{F}_s] = E[X_t + Y_t | \mathcal{F}_s] = E[X_t | \mathcal{F}_s] + E[Y_t | \mathcal{F}_s] = X_s + Y_s = M_s.$$

Dunque, M è una martingala. ♣

• **Esercizio 6.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{[0, T]}$, si determini l'espressione di $d(t^2 B_t)$.

♠ **Soluzione.** Applicando la formula semplificata di integrazione stocastica per parti, ovvero

$$d(h(t)g(B_t)) = h'(t)g(B_t) dt + h(t)g'(B_t) dB_t + \frac{1}{2} h(t)g''(B_t) dt,$$

con $h(t) = t^2$ e $g(x) = x$, si ha

$$d(t^2 B_t) = 2t B_t dt + t^2 dB_t.$$
 ♣

Esame del 18 Settembre 2020

• **Esercizio 1.** Due atleti partecipano ad una maratona e le loro probabilità di concludere la gara in meno di due ore e dieci minuti sono rispettivamente date da $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$. Se le prestazioni dei due atleti non si influenzano reciprocamente, si determini la probabilità che almeno un atleta completi la maratona in meno di due ore e dieci minuti.

♠ **Soluzione.** Si indichino rispettivamente con E_1 e E_2 gli eventi che il primo e il secondo atleta completino la maratona nel tempo richiesto. In questo caso, tenendo presente che gli eventi E_1 e E_2 sono indipendenti, si ha $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$. Dunque, la probabilità richiesta è data da

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1)P(E_2) = \frac{7}{15}.$$
 ♣

• **Esercizio 2.** Tenendo presente la legge Multinomiale e supponendo che le nascite siano equiprobabili fra i giorni della settimana (ovvero, lunedì, martedì, ..., domenica), dato un gruppo di sette persone determinare la probabilità che le persone siano nate in giorni distinti della settimana e la probabilità che almeno due persone siano nate nello stesso giorno della settimana.

♠ **Soluzione.** Se la v.a. X_j rappresenta il numero di persone nate nel j -esimo giorno della settimana, si consideri il v.v.a. $X = (X_1, \dots, X_7)^T$. In questo caso, il v.v.a. X è distribuito con legge Multinomiale

di parametri 7 e $(\frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{7})^T$. Se p_X rappresenta la f.p.c. di X , la probabilità che le sette persone siano nate in giorni distinti della settimana è data da

$$p_X(1, \dots, 1) = \binom{7}{1 \dots 1} \left(\frac{1}{7}\right)^7 = \frac{7!}{7^7} \simeq 0.006,$$

mentre la probabilità che almeno due persone siano nate nello stesso giorno della settimana è data da

$$1 - p_X(1, \dots, 1) = 1 - \frac{7!}{7^7} \simeq 0.994. \quad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Si noti che il problema considerato è equivalente a considerare l'inserimento di 7 palline distinguibili in 7 celle in modo che ogni configurazione di palline sia equiprobabile. In generale, se si hanno n palline distinguibili e n celle la probabilità di ottenere una configurazione con una pallina per cella è quindi data da $\frac{n!}{n^n}$. Tenendo presente la formula di Stirling, ovvero $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$, si ha dunque che

$$\frac{n!}{n^n} \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n},$$

ovvero la probabilità richiesta tende rapidamente a zero per $n \rightarrow \infty$. ♦

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = 24 x_1 x_2 \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) \mathbf{1}_{]0,1[}(x_2) \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1 + x_2),$$

si determini il valore atteso condizionato $E[X_2 \mid X_1 = x_1]$.

♠ **Soluzione.** La d.p. della v.a. X_1 è data da

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^{1-x_1} 24 x_1 x_2 \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) dx_2 = 12 x_1 (1 - x_1)^2 \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1).$$

Dalla definizione di valore atteso della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$, per $x_1 \in]0, 1[$ si ha

$$E[X_2 \mid X_1 = x_1] = \int_0^{1-x_1} x_2 \frac{2x_2}{(1-x_1)^2} dx_2 = \frac{2}{3} (1 - x_1). \quad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Si noti che il v.v.a. X è distribuito secondo una legge che è “equivalente” alla legge di Dirichlet $\mathcal{D}(2, 2, 1)$. ♦

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2) = e^{-2t_1^2 - t_2^2 - 2it_1 t_2 - 2it_2},$$

si determinino il vettore medio e la matrice di varianza-covarianza.

♠ **Soluzione.** Dal momento che φ_X è la f.c.m. di un v.v.a. X con legge Normale Multivariata, il vettore medio è dato da $\mu_X = (0, -2)^T$ e la matrice di varianza-covarianza è data da

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ dove la v.a. X_n è distribuita con legge Binomiale Negativa $\mathcal{BN}(n, \frac{n}{n+2})$. Si determini la legge della v.a. X , tale che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n \rightarrow \infty$.

♠ **Soluzione.** La f.g. della v.a. X_n è data da

$$G_{X_n}(t) = \left(\frac{\frac{n}{n+2}}{1 - \frac{2t}{n+2}} \right)^n = \left(1 + \frac{2(1-t)}{n} \right)^{-n}.$$

Tenendo presente le proprietà della convergenza in legge, si ha

$$\lim_n G_{X_n}(t) = G_X(t) = e^{2(t-1)},$$

ovvero la v.a. X è distribuita con legge di Poisson $\mathcal{P}(2)$. ♣

• **Esercizio 6.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{[0,1]}$, si determini la legge dell'integrale stocastico $I = \int_0^1 \sqrt{t} dB_t$.

♠ **Soluzione.** Si noti che I è un integrale di Wiener e che $\int_0^1 t dt = \frac{1}{2} < \infty$. Dunque, I è una v.a. con legge Normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$. ♣

Esame del 22 Febbraio 2021

• **Esercizio 1.** All'esame di ammissione ad un corso di laurea magistrale, i candidati vengono accettati mediante un test. La probabilità di superare il test per un candidato con laurea triennale adatta alla magistrale è $\frac{4}{5}$, mentre quella per un candidato con una laurea triennale non adatta alla magistrale è $\frac{1}{4}$. Se la probabilità che un candidato con una laurea triennale adatta alla magistrale si presenti all'esame di ammissione è $\frac{2}{5}$, si determini la probabilità di aver accettato un candidato con una laurea triennale adatta alla magistrale.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento che un candidato con una laurea triennale adatta alla magistrale si presenti all'esame di ammissione, mentre sia E l'evento che un candidato superi il test. Si ha $P(E_1) = \frac{2}{5}$ e $P(E_1^c) = \frac{3}{5}$. Inoltre, $P(E | E_1) = \frac{4}{5}$ e $P(E | E_1^c) = \frac{1}{4}$. Dal momento che gli eventi E_1 e E_1^c costituiscono una partizione dello spazio fondamentale, applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E | E_1)P(E_1) + P(E | E_1^c)P(E_1^c) = \frac{47}{100}.$$

Considerando la Formula di Bayes, la probabilità di aver accettato un candidato con una laurea triennale adatta alla magistrale risulta

$$P(E_1 | E) = \frac{P(E | E_1)P(E_1)}{P(E)} = \frac{32}{47} \simeq 0.68. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 2.** Tenendo presente la legge Multinomiale e supponendo che le nascite siano equiprobabili fra i giorni della settimana (ovvero, lunedì, martedì, ..., domenica), dato un gruppo di sette persone si calcoli la probabilità che due persone siano nate di lunedì e due di giovedì.

♠ **Soluzione.** Se la v.a. X_1 rappresenta il numero di persone nate di lunedì, la v.a. X_2 il numero di persone nate di giovedì e la v.a. X_3 il numero di persone nate nei restanti giorni, si consideri il v.v.a. $X = (X_1, X_2, X_3)^T$. In questo caso, X è distribuito con legge Multinomiale di parametri 7 e $(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{5}{7})^T$. Se p_X è la f.p.c. del v.v.a. X , la probabilità richiesta è data da

$$p_X(2, 2, 3) = \binom{7}{2 \ 2 \ 3} \left(\frac{1}{7}\right)^2 \left(\frac{1}{7}\right)^2 \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{7!5^3}{2!2!3!7^7} \simeq 0.03. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 3.** Data la v.a. assolutamente continua X con f.r.

$$F_X(x) = \Phi(x)^2,$$

dove Φ rappresenta la f.r. di una v.a. con legge $\mathcal{N}(0, 1)$, si verifichi che effettivamente F_X è una f.r.

♠ **Soluzione.** La f.r. è assolutamente continua dal momento che $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$, dove la versione della d.p. può essere scelta come

$$f_X(x) = 2\Phi(x)\phi(x).$$

In effetti, F_X è una f.r. dal momento che $0 < F_X(x) < 1$, essendo $0 < \Phi(x) < 1$, ed inoltre

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = 2\Phi(x)\phi(x) > 0,$$

essendo $\phi(x) > 0$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che $X = \max(Z_1, Z_2)$, dove Z_1 e Z_2 sono v.a. indipendenti e ugualmente distribuite con legge $\mathcal{N}(0, 1)$. In effetti, se Z_1 e Z_2 sono v.a. indipendenti, si ha in generale che la f.r. della v.a. X è data da

$$F_X(x) = P(\max(Z_1, Z_2) \leq x) = P(Z_1 \leq x, Z_2 \leq x) = P(Z_1 \leq x)P(Z_2 \leq x).$$

Ancora più generalmente, se $X = \max(Z_1, \dots, Z_n)$ dove $(Z_1, \dots, Z_n)$ è un v.v.a. a componenti marginali indipendenti, si ha

$$F_X(x) = P(\max(Z_1, \dots, Z_n) \leq x) = P(Z_1 \leq x, \dots, Z_n \leq x) = \prod_{i=1}^n P(Z_i \leq x).$$

Dunque, se le componenti marginali sono ugualmente distribuite con f.r. F_Z , si ottiene

$$F_X(x) = F_Z(x)^n. \quad \blacklozenge$$

● **Esercizio 4.** Si consideri le successioni di v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ e $(Y_n)_{n \geq 1}$ definite sullo stesso spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dove $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n \rightarrow \infty$ e la v.a. X è distribuita con legge Gamma $\mathcal{G}(0, 1, 1)$, mentre $Y_n \xrightarrow{P} Y$ per $n \rightarrow \infty$ e la v.a. Y è degenera nel valore 2. Si determini la f.r. della v.a. Z a cui converge in legge la successione di v.a. $(X_n + Y_n)_{n \geq 1}$ per $n \rightarrow \infty$.

♠ **Soluzione.** Per il Teorema di Cramér-Slutsky si ha

$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z = X + 2.$$

Dal momento che X è distribuita con legge Gamma $\mathcal{G}(0, 1, 1)$, ovvero con legge Esponenziale ridotta, allora Z è distribuita con legge Gamma $\mathcal{G}(2, 1, 1)$, ovvero con legge Esponenziale con parametro di posizione pari ad 2 e parametro di scala pari a 1. Dunque, la f.r. della v.a. Z è data da

$$F_Z(z) = (1 - e^{-(z-2)}) \mathbf{1}_{]2, \infty[}(z). \quad \clubsuit$$

● **Esercizio 5.** Sia dato il moto Browniano $B = (B_t)_{t \in [0, \infty[}$ ed il p.a. $M = (M_t)_{t \in [0, \infty[}$ tale che $M_t = e^{B_t - \frac{1}{2}t}$. Tenendo presente che se X è una v.a. con legge Normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ risulta $E[e^X] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2}$, si verifichi che M è una martingala.

♠ **Soluzione.** Per ogni t si ha

$$E[|M_t|] = E[e^{B_t - \frac{1}{2}t}] = e^{-\frac{1}{2}t} E[e^{B_t}] = 1 < \infty.$$

Inoltre, dalla definizione di martingala si ha

$$\begin{aligned} E[M_t | \mathcal{F}_s] &= E[e^{B_t - \frac{1}{2}t - B_s + B_s} | \mathcal{F}_s] = e^{B_s - \frac{1}{2}t} E[e^{B_t - B_s} | \mathcal{F}_s] \\ &= e^{B_s - \frac{1}{2}t} E[e^{B_t - B_s}] = e^{B_s - \frac{1}{2}t} e^{\frac{1}{2}(t-s)} = e^{B_s - \frac{1}{2}s} . \end{aligned}$$

Quindi M è effettivamente una martingala. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che il p.a. M è un moto Browniano Geometrico ridotto e quindi per le proprietà dell'integrale di Itô si può immediatamente concludere che M è una martingala. ♦

• **Esercizio 6.** Dati i processi di Itô $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ e $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$, si determini $d(X_t + 2Y_t)$.

♠ **Soluzione.** Dalla formula di Itô per trasformate bivariate si ha

$$d(X_t + 2Y_t) = dX_t + 2dY_t . \quad \clubsuit$$

Esame del 15 Marzo 2021

• **Esercizio 1.** Un macchinario produce pezzi difettosi con probabilità pari a $\frac{4}{100}$. Inoltre, se il macchinario produce un pezzo non difettoso, la probabilità che questo pezzo sia di alta qualità è pari a $\frac{3}{4}$. Se viene scelto casualmente un pezzo prodotto dal macchinario, si determini la probabilità che il pezzo sia di alta qualità.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento che il pezzo prodotto sia difettoso, mentre sia E_2 l'evento che il pezzo prodotto sia di alta qualità. Si ha $P(E_1) = \frac{4}{100}$ e $P(E_1^c) = \frac{96}{100}$. Inoltre, risulta $P(E_2 | E_1^c) = \frac{3}{4}$. Tenendo conto che $E_2 \subset E_1^c$ e applicando la definizione di probabilità condizionata, si ottiene

$$P(E_2) = P(E_2 \cap E_1^c) = P(E_2 | E_1^c)P(E_1^c) = \frac{72}{100} . \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 2.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} ,$$

si determini la d.p. della v.a. $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$.

♠ **Soluzione.** Si osservi che il v.v.a. X è distribuito con legge Normale bivariata $\mathcal{N}_2(0, I_2)$ e che le componenti del v.v.a. X sono indipendenti con legge $\mathcal{N}(0, 1)$. Dunque, tenendo presente la definizione della legge Chi-quadrato, la v.a. trasformata $Z = X_1^2 + X_2^2$ è distribuita con legge χ_2^2 . Quindi, Z ammette d.p. data da

$$f_Z(z) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(z) .$$

Dal momento che $g(z) = \sqrt{z}$ è una funzione biunivoca su $[0, \infty[$ e che la v.a. Z è assolutamente continua, allora la v.a. trasformata $R = \sqrt{Z}$ ammette d.p. data da

$$f_R(r) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}r^2} \cdot 2r \mathbf{1}_{]0, \infty[}(r) = r e^{-\frac{1}{2}r^2} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(r) . \quad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Al fine di ottenere una soluzione alternativa, si consideri la trasformata in coordinate polari $Y = (Y_1, Y_2)^T = g(X)$, dove $g^{-1}(y) = (y_1 \cos(y_2), y_1 \sin(y_2))^T$. Tenendo presente che $|J(g^{-1}(y))| = y_1$, si ha

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} y_1 e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(y_1) \mathbf{1}_{]0, 2\pi[}(y_2) .$$

Dunque, è immediato verificare che le v.a. Y_1 e Y_2 sono indipendenti e che la d.p.m. di Y_1 è data da

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} y_1 e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(y_1) dy_2 = y_1 e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(y_1) .$$

Dal momento che $R = Y_1$, si ottiene di nuovo la d.p. della v.a. R vista in precedenza. Inoltre, se U_1 e U_2 sono v.a. indipendenti con legge Uniforme su $]0, 1[$, si noti che $Y_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sqrt{-2\log(U_1)}$ e $Y_2 \stackrel{\mathcal{L}}{=} 2\pi U_2$, da cui si ottiene che

$$X_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sqrt{-2\log(U_1)} \cos(2\pi U_2)$$

e

$$X_2 \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sqrt{-2\log(U_1)} \sin(2\pi U_2) .$$

Questa trasformata è detta di Box e Muller. ♦

• **Esercizio 3.** Si consideri la v.a. assolutamente continua X che ammette d.p. data da

$$f_X(x) = \frac{1}{b\Gamma(k)} \left(\frac{x}{b}\right)^{k-1} e^{-\frac{x}{b}} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x) ,$$

dove $b \in]0, \infty[$ e $k \in]0, \infty[$ e si verifichi che è infinitamente divisibile.

♠ **Soluzione.** La v.a. X è distribuita con legge Gamma $\mathcal{G}(0, b, k)$. Dunque, la f.c. di X è data da $\varphi_X(t) = (1 - ibt)^{-k}$. Dal momento che per ogni $n = 1, 2, \dots$ si ha

$$\varphi_X(t) = (1 - ibt)^{-k} = ((1 - ibt)^{-\frac{k}{n}})^n = \varphi_{X_n}(t)^n ,$$

la legge è infinitamente divisibile, ovvero la v.a. X è equivalente in legge alla somma di n v.a. indipendenti con legge Gamma $\mathcal{G}(0, b, \frac{k}{n})$ per ogni $n = 1, 2, \dots$ ♣

• **Esercizio 4.** Si consideri le successioni di v.a. indipendenti $(X_n)_{n \geq 1}$ e $(Y_n)_{n \geq 1}$ per cui le leggi delle v.a. X_n e Y_n sono entrambe Poisson $\mathcal{P}(n)$. Si determini la legge della v.a. Z , tale che

$$\frac{X_n + Y_n - 2n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$$

per $n \rightarrow \infty$.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà della legge di Poisson, la v.a. $X_n + Y_n$ è distribuita con legge di Poisson $\mathcal{P}(2n)$ e dunque si ha $E[X_n + Y_n] = 2n$ e $\text{Var}[X_n + Y_n] = 2n$. Inoltre, dal momento che

$$G_{X_n+Y_n}(t) = (e^{2(t-1)})^n ,$$

per le proprietà dell f.g. risulta $X_n = \sum_{i=1}^n V_i$, dove le v.a. V_i sono indipendenti con legge di Poisson $\mathcal{P}(2)$. Dunque, per il Teorema Centrale del Limite di Lindeberg-Lévy, la v.a. Z è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(0, 1)$. ♣

• **Esercizio 5.** Si consideri una successione di v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ a componenti indipendenti tale che $E[X_n] = 1$ per ogni n e il p.a. $M = (M_n)_{n \geq 0}$ tale che

$$M_n = \prod_{k=1}^n X_k ,$$

dove $\{M_0 = 1\}$ q.c. e $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ è la filtrazione naturale. Si verifichi che M è una martingala.

♠ **Soluzione.** Tenendo presente le assunzioni fatte sul p.a. M , per ogni n si ha $E[|M_n|] < \infty$. Inoltre, si ha *q.c.*

$$E[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] = E[X_n M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1} E[X_n] = M_{n-1}.$$

Inoltre, per la Proprietà della torre, si ha *q.c.*

$$E[E[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] | \mathcal{F}_{n-2}] = E[M_n | \mathcal{F}_{n-2}]$$

e quindi dalle precedenti relazioni sussiste *q.c.*

$$E[M_n | \mathcal{F}_{n-2}] = E[M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-2}] = M_{n-2}.$$

Procedendo in modo iterativo, si ha infine $\{E[M_n | \mathcal{F}_m] = M_m\}$ *q.c.* per $m \in \mathbb{N}$ con $m < n$, ovvero il p.a. M è una martingala. ♣

● **Esercizio 6.** Dati i processi di Itô $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ e $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$ tali che $dX_t = \alpha_{X,t} dt + \beta_{X,t} dB_t$ e $dY_t = \alpha_{Y,t} dt + \beta_{Y,t} dB_t$, si determini $d(X_t + Y_t + X_t Y_t)$.

♠ **Soluzione.** Dalla formula di Itô per trasformate bivariate, posto $g(x, y) = x + y + xy$, si ha

$$d(X_t + Y_t + X_t Y_t) = (1 + Y_t) dX_t + (1 + X_t) dY_t + \beta_{X,t} \beta_{Y,t} dt. \quad \clubsuit$$

Esame del 7 Giugno 2021

● **Esercizio 1.** Dato lo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, si consideri i due eventi $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$. Se $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{4}$ e $P(E_1 | E_2) = P(E_2)$, si determini $P(E_1 \cap E_2^c)$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 | E_2) P(E_2) = P(E_2)^2 = \frac{1}{16}.$$

Dunque, risulta

$$P(E_1 \cap E_2^c) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{3}{16}. \quad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che $P(E_1 | E_2) = P(E_2) = P(E_1)$. Quindi, E_1 e E_2 sono eventi indipendenti. Dunque, anche E_1 e E_2^c sono indipendenti. Di conseguenza, si ottiene in modo alternativo

$$P(E_1 \cap E_2^c) = P(E_1) P(E_2^c) = P(E_1)(1 - P(E_2)) = \frac{3}{16}. \quad \blacklozenge$$

● **Esercizio 2.** Da un gruppo di 10 persone (composto da 5 donne e 5 uomini) ugualmente qualificate vengono selezionate in modo indipendente 3 persone per l'assunzione ad un impiego. Se le 3 persone selezionate sono uomini, si determini la probabilità di questo evento e si discuta se vi è stata discriminazione di genere.

♠ **Soluzione.** Sulla base delle assunzioni, il numero di uomini selezionati per l'impiego è descritto da una v.a. X distribuita con legge Ipergeometrica $\mathcal{I}(3, 5, 10)$ e dunque si ha

$$P(X = 3) = \frac{\binom{5}{3} \binom{5}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{12}.$$

Dunque, anche se questa probabilità non è estremamente bassa, si potrebbe comunque sospettare la presenza di discriminazione di genere. ♣

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) \mathbf{1}_{]0,1[}(x_2),$$

si determini la covarianza $\text{Cov}[Y_1, Y_2]$ dove $Y = (Y_1, Y_2)^T = (X_1 X_2, X_1^2 + X_2^2)^T$.

♠ **Soluzione.** Si noti che X_1 e X_2 sono v.a. indipendenti ed ugualmente distribuite con legge Uniforme su $]0, 1[$. Inoltre, per $r = 0, 1, \dots$, si ha

$$E[X_1^r] = E[X_2^r] = \int_0^1 x_1^r dx_1 = \frac{1}{r+1}.$$

Dunque, risulta

$$E[Y_1] = E[X_1 X_2] = E[X_1]E[X_2] = \frac{1}{4}, E[Y_2] = E[X_1^2 + X_2^2] = E[X_1^2] + E[X_2^2] = \frac{2}{3},$$

e

$$E[Y_1 Y_2] = E[X_1 X_2 (X_1^2 + X_2^2)] = E[X_1^3]E[X_2] + E[X_1]E[X_2^3] = \frac{1}{4},$$

ovvero $\text{Cov}[Y_1, Y_2] = \frac{1}{12}$. ♣

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2, t_3) = e^{-t_1^2 - t_2^2 - \frac{1}{2}t_3^2 - t_1 t_2 - t_1 t_3 - t_2 t_3},$$

se ne determini la legge.

♠ **Soluzione.** Posto $t = (t_1, t_2, t_3)^T$ e tenendo presente la forma quadratica all'esponente, la f.c.m. φ_X può essere espressa come

$$\varphi_X(t_1, t_2, t_3) = e^{-\frac{1}{2}t^T \Sigma t},$$

dove

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, il v.v.a. X è distribuito con legge Normale Multivariata $\mathcal{N}_3(0, \Sigma)$. ♣

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ tale che X_n è una v.a. discreta con f.p. data da

$$p_{X_n}(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{-n^a, n^a\}}(x),$$

dove $a \in \mathbb{R}$. Si determini l'insieme dei valori di a per cui si ha rispettivamente $X_n \xrightarrow{L^2} 0$ e $X_n \xrightarrow{P} 0$ per $n \rightarrow \infty$.

♠ **Soluzione.** Si osservi che $E[|X_n|^2] = n^{2a}$. Quindi, se $a < 0$, si ha

$$\lim_n E[|X_n|^2] = \lim_n n^{2a} = 0,$$

ovvero $X_n \xrightarrow{L^2} 0$ per $n \rightarrow \infty$. Inoltre, se $a < 0$ e fissato $\varepsilon > 0$, esiste un valore n_ε tale che per $n > n_\varepsilon$ si ha $P(|X_n| > \varepsilon) = 0$, da cui

$$\lim_n P(|X_n| > \varepsilon) = 0,$$

ovvero $X_n \xrightarrow{P} 0$ per $n \rightarrow \infty$. ♣

• **Esercizio 6.** Sia dato il moto Browniano $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ ed il p.a. $M = (M_t)_{t \in [0, T]}$ tale che $M_t = (2 - B_t)(1 + B_t) + t$. Calcolando il differenziale stocastico di M , si verifichi che questo p.a. è una martingala.

♠ **Soluzione.** Dalla Formula ridotta di Itô con $dX_t = dB_t$ e $g(x, y) = (2 - x)(1 + x) + y$, si ha

$$dM_t = dg(B_t, t) = (1 - 2B_t) dB_t.$$

Dunque, M è un processo di Itô con $\alpha = (\alpha_t)_{t \in [0, T]}$ e $\beta = (\beta_t)_{t \in [0, T]}$ dove $\alpha_t = 0$ e $\beta_t = 1 - 2B_t$, ovvero è una martingala dal momento che il p.a. α è identicamente nullo, mentre $\beta \in \mathcal{M}_T^2$ essendo $(B_t)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{M}_T^2$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che in generale $(B_t^m)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{M}_T^2$ dove $m \in \{1, 2, \dots\}$. In effetti, risulta

$$E[B_t^{2m}] = \frac{2^m \Gamma(m + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} t^m,$$

da cui

$$\int_0^T E[B_t^{2m}] dt = \frac{2^m \Gamma(m + \frac{1}{2})}{(m+1)\sqrt{\pi}} T^{m+1} < \infty.$$

In particolare, la precedente espressione fornisce i valori $\frac{1}{2}T^2, T^3, \frac{15}{4}T^4, 21T^5$ per $m = 1, 2, 3, 4$. ♦

Esame del 28 Giugno 2021

• **Esercizio 1.** Un esame è basato su vari test a risposta multipla con 5 possibili scelte. Per ogni singolo test uno studente conosce la risposta corretta con probabilità $\frac{7}{10}$ o sceglie casualmente una delle 5 alternative. Se la risposta ad un singolo test è stata corretta, si determini la probabilità che lo studente conosca effettivamente la risposta. Se l'esame è basato su 10 test a cui si risponde in modo indipendente, si determini inoltre la probabilità di rispondere correttamente ad almeno 9 test.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento relativo alla conoscenza della risposta da parte dello studente, mentre sia E l'evento relativo alla correttezza della risposta. Si ha $P(E_1) = \frac{7}{10}$ e quindi $P(E_1^c) = \frac{3}{10}$. Inoltre, $P(E | E_1) = 1$ e $P(E | E_1^c) = \frac{1}{5}$. Dal momento che gli eventi E_1 e E_1^c costituiscono una partizione dello spazio fondamentale, applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E | E_1)P(E_1) + P(E | E_1^c)P(E_1^c) = \frac{19}{25}.$$

Considerando inoltre la Formula di Bayes, si ha

$$P(E_1 | E) = \frac{P(E | E_1)P(E_1)}{P(E)} = \frac{35}{38} \simeq 0.92.$$

Sulla base delle assunzioni, il numero di risposte corrette nei test è descritto da una v.a. X distribuita con legge Binomiale $\mathcal{B}(10, \frac{19}{25})$ e dunque si ha

$$P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9} \left(\frac{19}{25}\right)^9 \left(\frac{6}{25}\right) + \left(\frac{19}{25}\right)^{10} \simeq 0.27. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 2.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = e^{-x_1 - x_2} \mathbf{1}_{]0, \infty[\times]0, \infty[}(x_1, x_2),$$

si determini la d.p. della v.a. $Y = \frac{X_1}{X_2}$.

♠ **Soluzione.** Si osservi che le componenti marginali del v.v.a. sono indipendenti e ugualmente distribuiti con legge Esponenziale ridotta. Dall'espressione della d.p. della v.a. rapporto risulta

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} e^{-xy} x \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x) \mathbf{1}_{]0, \infty[}(xy) dx,$$

ovvero

$$f_Y(y) = \mathbf{1}_{]0, \infty[}(y) \int_0^{\infty} x e^{-(1+y)x} dx = \frac{1}{(1+y)^2} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(y) \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \frac{1}{(1+y)^2} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(y),$$

tenendo presente che $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \Gamma(2) = 1$. ♣

• **Esercizio 3.** Data la v.a. assolutamente continua X con f.r.

$$F_X(x) = 1 - (1 - H(x))^2,$$

dove H è una f.r. assolutamente continua tale che $\frac{d}{dx} H(x) = h(x) \geq 0$, si verifichi che effettivamente F_X è una f.r.

♠ **Soluzione.** La f.r. è assolutamente continua dal momento che $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$, dove la versione della d.p. può essere scelta come

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = 2(1 - H(x))h(x).$$

Dunque, F_X è una f.r. dal momento che $0 \leq F_X(x) \leq 1$, essendo per ogni x

$$0 \leq H(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - H(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (1 - H(x))^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - (1 - H(x))^2 \leq 1,$$

mentre $\frac{d}{dx} F_X(x) \geq 0$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che $X = \min(Z_1, Z_2)$, dove Z_1 e Z_2 sono v.a. indipendenti e ugualmente distribuite con f.r. H . In effetti, la f.r. della v.a. X è data da

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(\min(Z_1, Z_2) \leq x) = 1 - P(Z_1 > x, Z_2 > x) \\ &= 1 - P(Z_1 > x)P(Z_2 > x) = 1 - (1 - H(x))^2. \end{aligned}$$

Ancora più generalmente, se $X = \min(Z_1, \dots, Z_n)$ dove $(Z_1, \dots, Z_n)$ è un v.v.a. a componenti marginali indipendenti, si ha

$$F_X(x) = P(\min(Z_1, \dots, Z_n) \leq x) = 1 - \prod_{i=1}^n P(Z_i > x).$$

Dunque, se le componenti marginali sono ugualmente distribuite con f.r. H , si ottiene

$$F_X(x) = 1 - (1 - H(x))^n. \quad \blacklozenge$$

• **Esercizio 4.** Data la v.a. discreta X con f.g.

$$G_X(t) = \frac{1}{2-t},$$

se il v.v.a. $(X_1, \dots, X_n)$ possiede componenti indipendenti ed equivalenti in distribuzione alla v.a. X , si determini la legge della v.a. somma $Y = \sum_{i=1}^n X_i$.

♠ **Soluzione.** Dal momento che

$$G_X(t) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}t},$$

la v.a. X è distribuita con legge Binomiale Negativa $\mathcal{BN}(1, \frac{1}{2})$, ovvero con legge Geometrica. Per le proprietà della f.g. la v.a. Y è distribuita con legge Binomiale Negativa $\mathcal{BN}(n, \frac{1}{2})$. ♣

● **Esercizio 5.** Sia $(X_n)_{n \geq 1}$ una successione di v.a. tale che

$$\sqrt{n} \frac{X_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$$

per $n \rightarrow \infty$, dove la v.a. Z è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(0, 1)$, mentre $\lambda > 0$. Tenendo presente il Metodo Delta, si determini la trasformazione stabilizzatrice della varianza $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ovvero la trasformazione tale che $\sqrt{n}(g(X_n) - g(\lambda)) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ per $n \rightarrow \infty$.

♠ **Soluzione.** Se g è una funzione continua e differenziabile tale che $g'(\lambda) \neq 0$, per il Metodo Delta si ha

$$\sqrt{n} \frac{g(X_n) - g(\lambda)}{|g'(\lambda)|\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$$

per $n \rightarrow \infty$. Dunque, per quanto riguarda la trasformata stabilizzatrice della varianza, si deve avere $|g'(\lambda)|\sqrt{\lambda} = 1$, ovvero $g(\lambda) = 2\sqrt{\lambda}$. ♣

● **Esercizio 6.** Dato il moto Browniano $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$, si consideri il p.a. $M = (M_t)_{t \in [0, T]}$ tale che $M_t = B_t^3 - 3tB_t$. Calcolando il differenziale stocastico di M mediante la formula ridotta di Itô, si verifichi che questo p.a. è una martingala.

♠ **Soluzione.** Dalla Formula ridotta di Itô con $dX_t = dB_t$ e $g(x, y) = x^3 - 3xy$, si ha

$$dM_t = dg(B_t, t) = 3(B_t^2 - t) dB_t.$$

Dunque, M è un processo di Itô con $\alpha = (\alpha_t)_{t \in [0, T]}$ e $\beta = (\beta_t)_{t \in [0, T]}$ dove $\alpha_t = 0$ e $\beta_t = 3(B_t^2 - t)$, ovvero è una martingala, essendo il p.a. α identicamente nullo, mentre $\beta \in \mathcal{M}_T^2$ dal momento che $(B_t^m)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{M}_T^2$ con $m \in \{1, 2, \dots\}$. ♣

Esame del 30 Agosto 2021

● **Esercizio 1.** Alla fine di un semestre accademico vengono tenuti tre esami relativi a tre insegnamenti di un corso di laurea. La probabilità che uno studente superi uno qualsiasi dei tre esami è data da $\frac{4}{5}$, la probabilità che superi due qualsiasi dei tre esami è data da $\frac{3}{5}$ e la probabilità che superi tutti e tre gli esami è data da $\frac{2}{5}$. Si determini la probabilità che lo studente superi almeno un esame.

♠ **Soluzione.** Si indichi rispettivamente con E_1 , E_2 e E_3 gli eventi relativi al superamento del primo, del secondo e del terzo esame. Dunque, la probabilità richiesta è data da $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$. Si ha

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{4}{5}, P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \cap E_3) = P(E_2 \cap E_3) = \frac{3}{5},$$

e

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{2}{5}.$$

Quindi, dalla Formula di Inclusione ed Esclusione risulta

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 1. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 2.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = 4x_1x_2 \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1)\mathbf{1}_{]0,1[}(x_2),$$

si determini la d.p. della v.a. $Y = X_1X_2$.

♠ **Soluzione.** Dall'espressione della d.p. della v.a. prodotto risulta

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 4 \frac{y}{x} \mathbf{1}_{]0,1[}(x) \mathbf{1}_{]0,1[}\left(\frac{y}{x}\right) \mathbf{1}_{]0,1[}(y) dx,$$

ovvero

$$f_Y(y) = 4y \mathbf{1}_{]0,1[}(y) \int_0^1 \frac{1}{x} \mathbf{1}_{]y,\infty[}(x) dx = 4y \mathbf{1}_{]0,1[}(y) \int_y^1 \frac{1}{x} dx = -4y \log(y) \mathbf{1}_{]0,1[}(y). \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo X considerato nell'Esercizio 2 si determini media e varianza della v.a. $Y = X_1 + X_2$.

♠ **Soluzione.** Si osservi che

$$f_{X_1}(x_1) = 4x_1 \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) \int_0^1 x_2 dx_2 = 2x_1 \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1),$$

e quindi per simmetria si ha

$$f_{X_2}(x_2) = 2x_2 \mathbf{1}_{]0,1[}(x_2),$$

ovvero $X_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_2$. Dal momento che $f_X(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$, le v.a. X_1 e X_2 sono indipendenti. Inoltre, per $r = 1, 2, \dots$ risulta

$$E[X_1^r] = E[X_2^r] = 2 \int_0^1 x_1^{r+1} dx_1 = \frac{2}{r+2},$$

da cui $E[X_1] = E[X_2] = \frac{2}{3}$ e $\text{Var}[X_1] = \text{Var}[X_2] = \frac{1}{18}$. Quindi, si ha

$$E[Y] = E[X_1] + E[X_2] = \frac{4}{3}, \text{Var}[Y] = \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] = \frac{1}{9}. \quad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che le v.a. X_1 e X_2 sono distribuite con legge Beta ridotta $\mathcal{BE}(0, 1, 2, 1)$. ♦

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2) = e^{-\frac{1}{2}t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2 - 4t_1t_2},$$

si determini le leggi delle due componenti marginali. Si verifichi inoltre se le due componenti marginali sono indipendenti.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.c.m. si ha

$$\varphi_{X_1}(t_1) = \varphi_X(t_1, 0) = e^{-\frac{1}{2}t_1^2}, \varphi_{X_2}(t_2) = \varphi_X(0, t_2) = e^{-\frac{1}{2}t_2^2}.$$

Dunque, le v.a. X_1 e X_2 sono distribuite con legge Normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Le due componenti marginali non sono indipendenti in quanto $\varphi_X(t_1, t_2) \neq \varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2)$. ♣

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. indipendenti $(X_n)_{n \geq 2}$ tale che X_n è una v.a. con f.p. data da

$$p_{X_n}(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{0\}}(x) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) \mathbf{1}_{\{1\}}(x) + \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\{n\}}(x).$$

Mediante l'uso della f.g. si determini la legge della v.a. X tale che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n \rightarrow \infty$.

♠ **Soluzione.** Si osservi che

$$G_{X_n}(t) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)t + \frac{1}{n}t^n$$

e, tenendo presente che $t \in [0, 1]$, si ha

$$\lim_n G_{X_n}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t.$$

La precedente espressione fornisce la f.g. di una v.a. X distribuita con legge di Bernoulli di parametro $\frac{1}{2}$. ♣

• **Esercizio 6.** Sia dato il moto Browniano $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ ed il p.a. $M = (M_t)_{t \in [0, T]}$ tale che $M_t = e^{2B_t - 2t}$. Calcolando il differenziale stocastico di M , si verifichi che questo p.a. è una martingala.

♠ **Soluzione.** Dalla Formula ridotta di Itô con $dX_t = dB_t$ e $g(x, y) = e^{2x - 2y}$, si ha

$$dM_t = dg(B_t, t) = 2e^{2B_t - 2t} dB_t.$$

Dunque, M è un processo di Itô con $\alpha = (\alpha_t)_{t \in [0, T]}$ e $\beta = (\beta_t)_{t \in [0, T]}$ dove $\alpha_t = 0$ e $\beta_t = 2e^{2B_t - 2t}$, ovvero è una martingala dal momento che il p.a. α è identicamente nullo, mentre $\beta \in \mathcal{M}_T^2$ essendo $(e^{B_t})_{t \in [0, T]} \in \mathcal{M}_T^2$. ♣

Esame del 20 Settembre 2021

• **Esercizio 1.** In un incontro di un torneo di biliardo aperto a ogni tipo di partecipante, un giocatore ha probabilità $\frac{3}{10}$ di vincere contro un professionista, probabilità $\frac{4}{10}$ di vincere contro un amatore e probabilità $\frac{1}{2}$ di vincere contro un principiante. Se la probabilità di incontrare un professionista è $\frac{1}{2}$, quella di incontrare un amatore è $\frac{1}{4}$ e quella di incontrare un principiante è $\frac{1}{4}$, si determini la probabilità che il giocatore vinca l'incontro.

♠ **Soluzione.** Si indichino rispettivamente con E_1 , E_2 e E_3 gli eventi relativi ad incontrare un professionista, un amatore e un principiante, mentre sia E l'evento relativo alla vittoria dell'incontro. Dunque, si ha $P(E_1) = \frac{1}{2}$, $P(E_2) = \frac{1}{4}$ e $P(E_3) = \frac{1}{4}$, mentre si ha $P(E | E_1) = \frac{3}{10}$, $P(E | E_2) = \frac{4}{10}$ e $P(E | E_3) = \frac{1}{2}$. Quindi, risulta

$$P(E) = P(E | E_1)P(E_1) + P(E | E_2)P(E_2) + P(E | E_3)P(E_3) = \frac{3}{8} = 0.375. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 2.** Un dado bilanciato viene lanciato 10 volte in modo indipendente. Si determini la probabilità che nei 10 lanci si verifichi 2 volte la faccia contrassegnata da un punto e 3 volte la faccia contrassegnata da due punti.

♠ **Soluzione.** Se la v.a. X_1 rappresenta il numero di volte che si verifica la faccia contrassegnata con un punto, la v.a. X_2 il numero di volte che si verifica la faccia contrassegnata con due punti e la v.a. X_3 il numero volte che si verificano le rimanenti facce, si consideri il v.v.a. $X = (X_1, X_2, X_3)^T$. In questo caso, X è distribuito con legge Multinomiale di parametri 10 e $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3})^T$. Se p_X è la f.p.c. del v.v.a. X , la probabilità richiesta è data da

$$p_X(2, 3, 5) = \binom{10}{2 \ 3 \ 5} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{10!4^5}{2!3!5!6^{10}} \simeq 0.04. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x_1^{a-1} (x_2 - x_1)^{b-1} e^{-x_2} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_1) \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_2) \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_2 - x_1)$$

con $a, b \in \mathbb{R}^+$, si determini le d.p.m. delle due componenti marginali.

♠ **Soluzione.** Operando il cambio di variabile $x_2 = z + x_1$, si ha

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{x_1}^{\infty} x_1^{a-1} (x_2 - x_1)^{b-1} e^{-x_2} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_1) dx_2 \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x_1^{a-1} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_1) \int_0^{\infty} (z + x_1 - x_1)^{b-1} e^{-(z+x_1)} dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x_1^{a-1} e^{-x_1} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_1) \int_0^{\infty} z^{b-1} e^{-z} dz = \frac{1}{\Gamma(a)} x_1^{a-1} e^{-x_1} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_1), \end{aligned}$$

dove si è tenuta presente la definizione della funzione Gamma di Eulero. Inoltre, operando il cambio di variabile $x_1 = x_2 u$, si ha

$$\begin{aligned} f_{X_2}(x_2) &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^{x_2} x_1^{a-1} (x_2 - x_1)^{b-1} e^{-x_2} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_2) dx_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-x_2} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_2) \int_0^1 (x_2 u)^{a-1} (x_2 - x_2 u)^{b-1} x_2 dx_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x_2^{a+b-1} e^{-x_2} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_2) \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} dx_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(a+b)} x_2^{a+b-1} e^{-x_2} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_2). \end{aligned}$$

dove si è tenuta presente la definizione della funzione Beta di Eulero.

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che la v.a. X_1 è distribuita con legge Gamma ridotta $\mathcal{G}(0, 1, a)$, mentre la v.a. X_2 è distribuita con legge Gamma ridotta $\mathcal{G}(0, 1, a+b)$. ♦

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. discreto $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ con f.g.p.

$$G_X(t_1, t_2, t_3) = 3^{-5} (t_1 + t_2 + t_3)^5,$$

si determini la relativa matrice di varianza-covarianza.

♠ **Soluzione.** Dal momento che

$$G_X(t_1, t_2, t_3) = \left(\frac{1}{3} t_1 + \frac{1}{3} t_2 + \frac{1}{3} t_3 \right)^5,$$

il v.v.a. X è distribuito con legge Multinomiale di parametri $n = 5$ e $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$. Dunque, la matrice di varianza-covarianza è data da

$$\Sigma = n(\text{diag}(p) - pp^T) = 5 \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. indipendenti $(X_n)_{n \geq 1}$ tale che X_n è una v.a. con f.p. data da

$$p_{X_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \mathbf{1}_{\{1\}}(x) + \frac{1}{n^2} \mathbf{1}_{\{n\}}(x).$$

Si verifichi che $X_n \xrightarrow{L^1} 1$ per $n \rightarrow \infty$.

♠ **Soluzione.** Si osservi che

$$E[|X_n - 1|] = \frac{n-1}{n^2},$$

da cui

$$\lim_n E[|X_n - 1|] = 0,$$

ovvero $X_n \xrightarrow{L^1} 1$ per $n \rightarrow \infty$. ♣

• **Esercizio 6.** Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = e^t dt + 2 dB_t$$

con condizione iniziale $X_0 = 1$ q.c. e se ne determini la soluzione. Si calcoli inoltre $E[X_t]$ e $\text{Var}[X_t]$.

♠ **Soluzione.** Dalla definizione di processo di Itô si ha

$$X_t = 1 + \int_0^t e^s ds + \int_0^t 2 dB_s = e^t + 2B_t.$$

Inoltre, per le proprietà del moto Browniano si ha

$$E[X_t] = e^t + 2E[B_t] = e^t$$

e

$$\text{Var}[X_t] = 4 \text{Var}[B_t] = 4t. \quad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Per le proprietà del moto Browniano, la v.a. X_t è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(e^t, 4t)$. ♦

Esame del 4 Ottobre 2021

• **Esercizio 1.** Si consideri 2 urne che contengono palline bianche e nere, in modo tale che la probabilità di estrarre una pallina bianca è $2/3$ dalla prima urna e $1/3$ dalla seconda urna. Se l'urna da

cui estrarre la pallina viene scelta con un ulteriore esperimento aleatorio che seleziona la prima urna con probabilità $1/3$, determinare la probabilità di ottenere una pallina bianca al termine dell'esperimento aleatorio complessivo.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento relativo alla selezione della prima urna, mentre sia E l'evento relativo all'estrazione di una pallina bianca. Si ha $P(E_1) = \frac{1}{3}$ e quindi deve essere $P(E_1^c) = \frac{2}{3}$. Inoltre, $P(E | E_1) = \frac{2}{3}$ e $P(E | E_1^c) = \frac{1}{3}$. Dal momento che gli eventi E_1 e E_1^c costituiscono una partizione dello spazio fondamentale, applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E | E_1)P(E_1) + P(E | E_1^c)P(E_1^c) = \frac{4}{9}. \quad \clubsuit$$

● **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \frac{1}{2} (x-2)^2 e^{-x+2} \mathbf{1}_{]2, \infty[}(x),$$

si calcoli $E[X]$ e $\text{Var}[X]$.

♠ **Soluzione.** Considerando la v.a. trasformata $Y = X - 2$, si ha

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} y^2 e^{-y} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(y),$$

ovvero, per $r = 1, 2, \dots$, si ha

$$E[Y^r] = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{r+2} e^{-y} dy = \frac{1}{2} \Gamma(r+3).$$

Dunque, risulta $E[X] = E[Y + 2] = 5$ e $\text{Var}[X] = \text{Var}[Y + 2] = 3$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Il risultato era immediato osservando che la v.a. X è distribuita con legge Gamma ridotta $\mathcal{G}(2, 1, 3)$. ♦

● **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1 \mathbf{1}_{]0, 1[}(x_1) \mathbf{1}_{]0, 1[}(x_2),$$

si determini il valore atteso condizionato $E[X_2 | X_1 = x_1]$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2} \int_0^1 x_1 \mathbf{1}_{]0, 1[}(x_1) dx_2 = \frac{1}{2} x_1 \mathbf{1}_{]0, 1[}(x_1),$$

da cui

$$E[X_2 | X_1 = x_1] = \int_0^1 x_2 \mathbf{1}_{]0, 1[}(x_2) dx_2 = \frac{1}{2}. \quad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che $f_X(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$ e quindi le v.a. X_1 e X_2 sono indipendenti. Banalmente, si ha dunque che $E[X_2 | X_1 = x_1] = E[X_2]$. ♦

● **Esercizio 4.** Si consideri le successioni di v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ e $(Y_n)_{n \geq 1}$ definite sullo stesso spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dove $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n \rightarrow \infty$ e la v.a. X è distribuita con legge Gamma $\mathcal{G}(0, 1, k)$, mentre $Y_n \xrightarrow{P} Y$ per $n \rightarrow \infty$ e la v.a. Y è degenere nel valore 3. Si determini la legge della v.a. a cui converge la successione di v.a. $(X_n + Y_n)_{n \geq 1}$ per $n \rightarrow \infty$.

♠ **Soluzione.** Per il Teorema di Cramér-Slutsky si ha

$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z = X + 3.$$

Dal momento che X è distribuita con legge Gamma $\mathcal{G}(0, 1, k)$, allora Z è distribuita con legge Gamma $\mathcal{G}(3, 1, k)$. ♣

• **Esercizio 5.** Data la v.a. discreta X con f.g. data da

$$G_X(s) = e^{\sqrt{1-c}-\sqrt{1-cs}},$$

dove $c \in]0, 1]$, si determini $E[X]$. Si discuta inoltre il caso particolare $c = 1$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$G_X^{(1)}(t) = \frac{d}{dt} e^{\sqrt{1-c}-\sqrt{1-cs}} = \frac{cG_X(s)}{2\sqrt{1-cs}},$$

da cui si ha $E[X] = G_X^{(1)}(1) = \frac{c}{2\sqrt{1-c}}$. Dal momento che

$$\lim_{c \rightarrow 1^-} \frac{c}{2\sqrt{1-c}} = \infty,$$

il valore atteso della v.a. X non è finito per $c = 1$. ♣

• **Esercizio 6.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{[0,1]}$, si determini la legge dell'integrale stocastico $I = \int_0^1 \cos(2\pi t) dB_t$.

♠ **Soluzione.** Si noti che I è un integrale di Wiener e che $\int_0^1 (\cos(2\pi t))^2 dt = \frac{1}{2} < \infty$. Dunque, I è una v.a. con legge Normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$. ♣

Esame del 14 Gennaio 2022

• **Esercizio 1.** Un dado bilanciato viene lanciato indipendentemente per due volte. Se E_1 rappresenta l'evento che la faccia contrassegnata da un punto si è verificata al primo lancio e E_2 rappresenta l'evento che la somma dei punti ottenuta nei due lanci è pari a 7, si determini se i due eventi sono indipendenti.

♠ **Soluzione.** Lo spazio fondamentale relativo ad un lancio del dado risulta $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Quindi, lo spazio fondamentale relativo all'esperimento è dato da Ω^2 , i cui eventi elementari sono coppie cartesiane del tipo $\{(j, k)\}$ con $j, k = 1, \dots, 6$. Sulla base di quanto specificato riguardo all'esperimento si assume l'assegnazione di Laplace, ovvero si assume che gli eventi elementari di Ω^2 siano equiprobabili con $P(\{(j, k)\}) = \frac{1}{36}$ per $j, k = 1, \dots, 6$. Si ha

$$E_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}$$

e

$$E_2 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\},$$

mentre $E_1 \cap E_2 = \{(1, 6)\}$. Dunque, risulta $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{6}$ e $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{36}$. Dunque, se si assume l'assegnazione di Laplace, gli eventi E_1 e E_2 sono indipendenti dal momento che $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$. ♣

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{]0,2[}(x),$$

si consideri la v.a. trasformata $Y = \cos(\pi X)$ e si determini $E[Y]$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$E[Y] = \frac{1}{2} \int_0^2 \cos(\pi x) dx = 0.$$

♣

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = 6(1 - x_1 - x_2) \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) \mathbf{1}_{]0,1[}(x_2) \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1 + x_2),$$

si determini il valore atteso condizionato $E[X_2 | X_1 = x_1]$.

♠ **Soluzione.** La d.p. della v.a. X_1 è data da

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^{1-x_1} 6(1 - x_1 - x_2) \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) dx_2 = 3(1 - x_1)^2 \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1).$$

Dalla definizione di valore atteso della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$, per $x_1 \in]0, 1[$ si ha

$$E[X_2 | X_1 = x_1] = \int_0^{1-x_1} x_2 \frac{6(1 - x_1 - x_2)}{3(1 - x_1)^2} dx_2 = \frac{1 - x_1}{3}.$$

♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2, 1 - X_1 - X_2)^T$ è distribuito con legge di Dirichlet $\mathcal{D}(\alpha)$, dove $\alpha = (1, 1, 2)^T$. ♦

• **Esercizio 4.** Si consideri la successione di v.a. indipendenti $(X_n)_{n \geq 1}$ tale che X_n è una v.a. con f.p. data da

$$p_{X_n}(x) = e^{-n} \mathbf{1}_{\{-n\}}(x) + (1 - 2e^{-n}) \mathbf{1}_{\{0\}}(x) + e^{-n} \mathbf{1}_{\{n\}}(x)$$

e si verifichi che $X_n \xrightarrow{P} 0$ per $n \rightarrow \infty$.

♠ **Soluzione.** Si ha $E[X_n] = 0$ e $\text{Var}[X_n] = 2n^2 e^{-n}$. Dal momento che

$$\lim_n \text{Var}[X_n] = \lim_n 2n^2 e^{-n} = 0,$$

si ottiene la convergenza in probabilità richiesta.

♣

• **Esercizio 5.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{t \in [0, \infty[}$, assumendo che $s \leq t$, si calcoli $\text{Cov}[B_s^2, B_t]$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$\begin{aligned} \text{Cov}[B_s^2, B_t] &= E[B_s^2 B_t] - E[B_s^2] E[B_t] = E[B_s^2 (B_t - B_s + B_s)] - E[B_s^2] E[B_t] \\ &= E[B_s^2 (B_t - B_s)] + E[B_s^3] - E[B_s^2] E[B_t] \end{aligned}$$

Per le proprietà del moto Browniano, risulta

$$\text{Cov}[B_s^2, B_t] = E[B_s^2] E[B_t - B_s] + E[B_s^3] - E[B_s^2] E[B_t] = 0,$$

dal momento che $E[B_s^3] = 0$, $E[B_t] = 0$ e $E[B_t - B_s] = 0$.

♣

• **Esercizio 6.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{[0,1]}$, si determini la legge dell'integrale stocastico $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dB_t$.

♠ **Soluzione.** Si noti che I è un integrale di Wiener e che $\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} dt = \frac{1}{2} < \infty$. Dunque, I è una v.a. con legge Normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$. ♣

Esame del 7 Febbraio 2022

• **Esercizio 1.** In una certa sessione, uno studente sostiene due esami. La probabilità di sostenere con successo almeno un esame è data da $\frac{9}{10}$, mentre la probabilità di sostenere con successo entrambi gli esami è data da $\frac{1}{2}$. Si determini la probabilità di sostenere con successo esattamente un esame.

♠ **Soluzione.** Si indichino rispettivamente con E_1 e E_2 gli eventi relativi al successo nel sostenere il primo ed il secondo esame. La probabilità richiesta è data da

$$P(E_1 \cup E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{9}{10} - \frac{1}{2} = \frac{2}{5}. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|},$$

si determini la d.p. della v.a. trasformata $Y = \sqrt{|X|}$.

♠ **Soluzione.** Dal momento che la funzione $y : x \mapsto \sqrt{|x|}$ è decrescente in $B_1 =]-\infty, 0]$ e crescente in $B_2 =]0, \infty[$, allora

$$f_Y(y) = (f_X(y^2) + f_X(-y^2)) 2y \mathbf{1}_{[0, \infty[}(y) = 2y e^{-y^2} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(y). \quad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** La legge relativa alla v.a. X è detta legge di Laplace, mentre la legge relativa alla v.a. Y è detta legge di Rayleigh ed è connessa alla lunghezza aleatoria di un v.v.a. con legge Normale multivariata. ♦

• **Esercizio 3.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \frac{15}{4} x^{\frac{1}{2}} (1-x) \mathbf{1}_{]0,1[}(x),$$

si determini le probabilità $P(-1 < X < \frac{1}{4})$ e $P(X > \frac{1}{4})$.

♠ **Soluzione.** Dal momento che

$$F_X(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} (5-3x) \mathbf{1}_{]0,1[}(x) + \mathbf{1}_{[1, \infty[}(x),$$

le probabilità richieste sono date da

$$P\left(-1 < X < \frac{1}{4}\right) = F_X\left(\frac{1}{4}\right) - F_X(-1) = \frac{17}{64}, \quad P\left(X > \frac{1}{4}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{47}{64}. \quad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che la v.a. X è distribuita con legge Beta ridotta $\mathcal{BE}(0, 1, \frac{3}{2}, 2)$. ♦

• **Esercizio 4.** Data la v.a. discreta X con f.g.

$$G_X(t) = \frac{1}{4-3t},$$

se il v.v.a. $(X_1, \dots, X_n)$ possiede componenti indipendenti ed equivalenti in distribuzione alla v.a. X , si determini la legge della v.a. somma $Y = \sum_{i=1}^n X_i$.

♠ **Soluzione.** Dal momento che

$$G_X(t) = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{4}t},$$

la v.a. X è distribuita con legge di Binomiale Negativa $\mathcal{BN}(1, \frac{1}{4})$. Dunque, per le proprietà della f.g. la v.a. Y è distribuita con legge Binomiale Negativa $\mathcal{BN}(n, \frac{1}{4})$. ♣

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. indipendenti $(X_n)_{n \geq 1}$ tale che la f.p di X_n è data da

$$p_{X_n}(x) = \frac{n-1}{n} \mathbf{1}_{\{0\}}(x) + \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\{n\}}(x).$$

Si verifichi che la successione di v.a. converge in probabilità ad una v.a. degenerata concentrata su 0, ma non converge in media quadratica.

♠ **Soluzione.** Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\lim_n P(|X_n| > \varepsilon) = \lim_n \frac{1}{n} = 0,$$

ovvero $X_n \xrightarrow{P} 0$ per $n \rightarrow \infty$. Dal momento che $E[|X_n|^2] = n$, si ha

$$\lim_n E[|X_n|^2] = \lim_n n = \infty,$$

ovvero la successione di v.a. non converge in media quadratica. ♣

• **Esercizio 6.** Sia dato il moto Browniano $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ ed il p.a. $M = (M_t)_{t \in [0, T]}$ tale che $M_t = e^{B_t + \frac{1}{2}t}$. Calcolando il differenziale stocastico di M , si verifichi se M è una martingala.

♠ **Soluzione.** Dalla Formula ridotta di Itô con $dX_t = dB_t$ e $g(x, y) = e^{x + \frac{1}{2}y}$, si ha

$$dM_t = dg(B_t, t) = e^{B_t + \frac{1}{2}t} dB_t + e^{B_t + \frac{1}{2}t} dt.$$

Dunque, M è un processo di Itô con $\alpha = (\alpha_t)_{t \in [0, T]}$ e $\beta = (\beta_t)_{t \in [0, T]}$ dove $\alpha_t = \beta_t = e^{B_t + \frac{1}{2}t}$, ovvero non è una martingala dal momento che il p.a. α non è identicamente nullo. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Il p.a. M è un moto Browniano geometrico con $\mu = 1$ e $\sigma = 1$. Affinchè un moto Browniano geometrico sia una martingala deve sussistere la relazione $\mu = 0$. ♦

Esame del 14 Marzo 2022

• **Esercizio 1.** Dato lo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, si consideri i due eventi $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$ tali che $P(E_1) = \frac{3}{4}$ e $P(E_2) = \frac{1}{3}$. Tenendo presenti le proprietà della probabilità, si verifichi che

$$\frac{1}{12} \leq P(E_1 \cap E_2) \leq \frac{1}{3}.$$

♠ **Soluzione.** Da due classiche disuguaglianze per la probabilità, nel caso di due eventi si ha $P(E_1 \cap E_2) \leq \min(P(E_1), P(E_2))$ e $P(E_1 \cap E_2) \geq P(E_1) + P(E_2) - 1$. Sostituendo i valori di $P(E_1)$ e $P(E_2)$, si ottiene la relazione richiesta. ♣

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = cx^{\frac{3}{2}}(1-x)\mathbf{1}_{]0,1[}(x),$$

si determini il valore della costante $c > 0$.

♠ **Soluzione.** Considerata la struttura di f_X , si evince che la v.a. X è distribuita con legge Beta ridotta $\mathcal{BE}(0, 1, \frac{5}{2}, 2)$. Dunque, deve risultare

$$c = \frac{\Gamma(\frac{9}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(2)} = \frac{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(2)} = \frac{35}{4} . \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2) = e^{-t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2 - t_1 t_2} ,$$

se ne determini la legge e la varianza generalizzata.

♠ **Soluzione.** Posto $t = (t_1, t_2)^T$ e tenendo presente la forma quadratica all'esponente, φ_X può essere espresso come

$$\varphi_X(t_1, t_2) = e^{-\frac{1}{2}t^T \Sigma t} ,$$

dove

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dunque, il v.v.a. X è distribuito con legge Normale Multivariata $\mathcal{N}_2(0, \Sigma)$, mentre la varianza generalizzata è data da $\det(\Sigma) = 1$. ♣

• **Esercizio 4.** Si consideri la v.a. X tale che $X = \sum_{k=1}^Y Z_k$, dove la legge della v.a. Y è Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, mentre le Z_k sono v.a. indipendenti e identicamente distribuite come la v.a. Z con legge di Bernoulli $\mathcal{B}(1, \pi)$. Tenendo presente i risultati per le leggi composte, si determini la legge della v.a. X .

♠ **Soluzione.** Le f.g. delle v.a. Y e Z sono $G_Y(t) = (1 - p + pt)^n$ e $G_Z(t) = 1 - \pi + \pi t$, da cui

$$G_X(t) = G_Y(G_Z(t)) = (1 - p\pi + p\pi t)^n .$$

Si deve concludere che la v.a. X si distribuisce con legge Binomiale $\mathcal{B}(n, p\pi)$. ♣

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ tale che la v.a. X_n possiede f.r. data da

$$F_{X_n}(x) = x^{3n} \mathbf{1}_{]0, 1[}(x) + \mathbf{1}_{[1, \infty[}(x) .$$

Si determini la legge della v.a. X per cui $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

♠ **Soluzione.** Banalmente, per ogni $x \in]-\infty, 0]$ si ha $\lim_n F_{X_n}(x) = 0$ e per ogni $x \in [1, \infty[$ si ha $\lim_n F_{X_n}(x) = 1$. Inoltre, per ogni $x \in]0, 1[$ si ha

$$\lim_n F_{X_n}(x) = \lim_n x^{3n} = 0 .$$

Dunque, $F_{X_n}(x)$ converge a $F_X(x) = \mathbf{1}_{[1, \infty[}(x)$ per ogni punto di continuità di F_X e quindi $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Dal momento che la convergenza in distribuzione verso una v.a. degenere implica la convergenza in probabilità, si ha anche $X_n \xrightarrow{P} 1$. ♦

• **Esercizio 6.** Se $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ è un moto Browniano, si consideri il p.a. $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ con $X_t = \int_0^t s dB_s$. Tenendo presente che X_t è un integrale di Wiener e se $I(X)$ è l'integrale stocastico di Itô, si calcoli $E[I(X)]$ e $\text{Var}[I(X)]$.

♠ **Soluzione.** Dal momento che X_t è un integrale di Wiener si ha $E[X_t] = 0$ e

$$E[X_t^2] = \text{Var}[X_t] = \int_0^t s^2 ds = \frac{t^3}{3}.$$

Per le proprietà dell'integrale di Itô si ha dunque $E[I(X)] = 0$, mentre

$$\text{Var}[I(X)] = \int_0^T E[X_t^2] dt = \frac{T^4}{12}. \quad \clubsuit$$

Prova intermedia del 26 Aprile 2022

• **Esercizio 1.** In una famiglia vi sono due adolescenti ed è noto che almeno uno dei due è una femmina. Assumendo che il genere sia equiprobabile, si determini la probabilità che entrambi gli adolescenti siano femmine.

♠ **Soluzione.** Codificando i due eventi elementari relativi al genere con i simboli f e m , lo spazio fondamentale relativo ad un singolo adolescente è dato da $\Omega = \{f, m\}$ e quindi lo spazio fondamentale prodotto relativo ai due adolescenti risulta

$$\Omega^2 = \{(f, f), (f, m), (m, f), (m, m)\}.$$

Per le assunzioni fatte, ogni evento elementare in Ω^2 ha probabilità $\frac{1}{4}$. Inoltre, $E_1 = \{(f, f)\}$ è l'evento che entrambi gli adolescenti siano femmine, mentre $E_2 = \{(f, f), (f, m), (m, f)\}$ è l'evento che almeno un adolescente sia femmina. Dunque, la probabilità richiesta è data da

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{1}{3}. \quad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che il probabilista ingenuo è portato a pensare che la probabilità richiesta sia data da $\frac{1}{2}$. ♦

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \mathbf{1}_{]0,1[}(x),$$

si consideri la v.a. trasformata $Y = \cos(2\pi X)$ e si calcoli $E[Y]$ e $\text{Var}[Y]$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$E[Y] = \int_0^1 \cos(2\pi x) dx = 0, \quad E[Y^2] = \int_0^1 \cos^2(2\pi x) dx = \frac{1}{2},$$

da cui $\text{Var}[Y] = \frac{1}{2}$. ♣

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ con d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = x_1 e^{-x_1 - x_2} \mathbf{1}_{]0, \infty[\times]0, \infty[}(x_1, x_2)$$

si determini la d.p. della v.a. somma $Y = X_1 + X_2$.

♠ **Soluzione.** La d.p. della v.a. Y è data da

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x, y-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-y} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x) \mathbf{1}_{]0, \infty[}(y-x) dx \\ &= e^{-y} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(y) \int_0^y x dx = \frac{1}{2} y^2 e^{-y} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(y). \end{aligned} \quad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che si ha

$$f_X(x_1, x_2) = x_1 e^{-x_1} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_1) e^{-x_2} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_2),$$

per cui il v.v.a. X possiede componenti marginali indipendenti, rispettivamente distribuite con legge Gamma $\mathcal{G}(0, 1, 2)$ e legge Gamma $\mathcal{G}(0, 1, 1)$. Dunque, dal momento che la legge Gamma è additiva rispetto al parametro di forma, la v.a. Y è distribuita con legge Gamma $\mathcal{G}(0, 1, 3)$, come risulta immediato verificare dall'espressione di f_Y . ♦

Esame del 13 Giugno 2022

• **Esercizio 1.** Una lotteria è basata su un'estrazione da un'urna che contiene palline numerate con i primi cento numeri naturali. Una pallina viene estratta dall'urna in modo equiprobabile e i partecipanti alla lotteria vincono se il numero della pallina è divisibile per due o per cinque. Si determini la probabilità di vittoria.

♠ **Soluzione.** Codificando gli eventi elementari mediante i primi cento numeri naturali, lo spazio fondamentale relativo all'esperimento aleatorio è dato da $\Omega = \{1, 2, \dots, 100\}$. Se E_1 è l'evento che sia stato estratto un numero divisibile per due e E_2 è l'evento che sia stato estratto un numero divisibile per cinque, allora si ha $E_1 \cap E_2 = \{10, 20, \dots, 100\}$. Sulla base di quanto specificato riguardo all'esperimento si assume l'assegnazione di Laplace e risulta

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{10}. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 2.** Si consideri la v.a. X che ammette d.p. data da

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{]-1, 1[}(x)$$

e si determini la d.p. della v.a. $Y = -\log(|X|)$.

♠ **Soluzione.** La trasformata $g(x) = -\log(|x|)$ non è biunivoca per $x \in]-1, 1[$, ma si può esprimere come somma di funzioni biunivoche su una partizione, ovvero

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x),$$

dove $g_1(x) = -\log(-x) \mathbf{1}_{]-1, 0[}(x)$ e $g_2(x) = -\log(x) \mathbf{1}_{]0, 1[}(x)$. Dunque, si ottiene

$$f_Y(y) = f_X(g_1^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_1^{-1}(y) \right| + f_X(g_2^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_2^{-1}(y) \right|,$$

ovvero, essendo $g_1^{-1}(y) = -e^{-y}$ e $g_2^{-1}(y) = e^{-y}$, si ha

$$f_Y(y) = e^{-y} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(y). \quad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** In modo alternativo, si può considerare inizialmente la trasformata $Z = |X|$ con relativa d.p.

$$f_Z(z) = 2f_X(z) \mathbf{1}_{]0, \infty[}(z) = \mathbf{1}_{]0, 1[}(z)$$

e successivamente la trasformata monotona $Y = -\log(Z)$ con relativa d.p.

$$f_Y(y) = f_Z(e^{-y}) e^{-y} = e^{-y} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(y). \quad \blacklozenge$$

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = 6x_2 \mathbf{1}_{]0, 1[}(x_1) \mathbf{1}_{]0, 1[}(x_2) \mathbf{1}_{]0, 1[}(x_1 + x_2),$$

si determini il valore atteso condizionato $E[X_2 | X_1 = x_1]$.

♠ **Soluzione.** La d.p. della v.a. X_1 è data da

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^{1-x_1} 6x_2 \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) dx_2 = 3(1-x_1)^2 \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1).$$

Dalla definizione di valore atteso della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$, per $x_1 \in]0, 1[$ si ha

$$E[X_2 | X_1 = x_1] = \int_0^{1-x_1} x_2 \frac{6x_2}{3(1-x_1)^2} dx_2 = \frac{2}{3}(1-x_1). \quad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Il v.v.a. $(X_1, X_2, 1 - X_1 - X_2)^T$ è distribuito con legge di Dirichlet $\mathcal{D}(\alpha)$ dove $\alpha = (1, 2, 1)^T$. ♦

• **Esercizio 4.** Si consideri la v.a. X_1 con f.g.

$$G_{X_1}(t) = \left(\frac{2}{3-t} \right)^2$$

e la v.a. X_2 con f.g.

$$G_{X_2}(t) = \left(\frac{2}{3-t} \right)^5.$$

Si determini la legge della v.a. $Y = X_1 + X_2$.

♠ **Soluzione.** La v.a. X_1 è distribuita con legge Binomiale Negativa $\mathcal{BN}(2, \frac{2}{3})$, mentre la v.a. X_2 è distribuita con legge Binomiale Negativa $\mathcal{BN}(5, \frac{2}{3})$. Dal momento che la legge Binomiale Negativa è additiva rispetto al primo parametro, risulta immediato verificare che la v.a. Y è distribuita con legge Binomiale Negativa $\mathcal{BN}(7, \frac{2}{3})$. ♣

• **Esercizio 5.** Si considerino due successioni di v.a. a valori positivi $(X_n)_{n \geq 1}$ e $(Y_n)_{n \geq 1}$ tali che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 4$ e $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$ per $n \rightarrow \infty$. Si determini la legge della v.a. X tale che $\frac{\sqrt{X_n}}{Y_n} \xrightarrow{P} X$ per $n \rightarrow \infty$.

♠ **Soluzione.** Dal momento che la convergenza in distribuzione verso una v.a. degenera implica la convergenza in probabilità, si ha anche $X_n \xrightarrow{P} 4$ e $Y_n \xrightarrow{P} 1$. Inoltre, per il Teorema della Trasformata continua si ha $\sqrt{X_n} \xrightarrow{P} 2$ e quindi dal Teorema di Cramér-Slutsky risulta $\frac{\sqrt{X_n}}{Y_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} 2$. Dunque, si ha infine che $\frac{\sqrt{X_n}}{Y_n} \xrightarrow{P} 2$, ovvero la v.a. X è degenera con $P(X = 2) = 1$. ♣

• **Esercizio 6.** Sia $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ un moto Browniano. Se $I(B) = \int_0^T B_t dB_t$, si calcoli $E[I(B)]$ e $\text{Var}[I(B)]$.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà del moto Browniano, si ha $E[B_t] = 0$ e $E[B_t^2] = \text{Var}[B_t] = t$. Inoltre, per le proprietà dell'integrale di Itô si ha $E[I(B)] = 0$, mentre

$$\text{Var}[I(B)] = \int_0^T E[B_t^2] dt = \frac{T^2}{2}. \quad \clubsuit$$

Esame del 11 Luglio 2022

• **Esercizio 1.** In un circolo sportivo in cui vi sono N iscritti, due responsabili vengono scelti annualmente mediante un'estrazione effettuata in modo equiprobabile. Si determini la probabilità che un iscritto ricopra una delle due cariche in un certo anno. Se l'estrazione viene ripetuta con le

medesime modalità, si determini inoltre la probabilità che l'iscritto ricopra una delle due cariche in due anni consecutivi.

♠ **Soluzione.** Dal momento che vi sono $\binom{N}{2}$ modi di selezionare due responsabili fra gli N iscritti, la prima probabilità richiesta è data da $\binom{N}{2}^{-1}$. Dal momento che le estrazioni sono indipendenti, la seconda probabilità richiesta è data da $\binom{N}{2}^{-2}$. ♣

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = c(1 - x^2)^{\frac{5}{2}} \mathbf{1}_{]0,1[}(x),$$

si determini il valore della costante $c > 0$, eventualmente considerando la legge della v.a. trasformata $Y = X^2$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = c \int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{5}{2}} dx = \frac{c}{2} \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} (1 - x)^{\frac{5}{2}} dx.$$

Dal momento che

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} (1 - x)^{\frac{5}{2}} dx = B\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(4)} = \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})^2}{\Gamma(4)} = \frac{5\pi}{16},$$

deve essere $c = \frac{32}{5\pi}$. In effetti, la v.a. Y è distribuita con legge Beta ridotta $\mathcal{BE}(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{7}{2})$. ♣

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = 2(1 - x_1 - x_2 + 2x_1x_2) \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) \mathbf{1}_{]0,1[}(x_2),$$

si determini il valore atteso condizionato $E[X_2 | X_1 = x_1]$.

♠ **Soluzione.** La d.p. della v.a. X_1 è data da

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^1 2(1 - x_1 - x_2 + 2x_1x_2) \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) dx_2 = \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1).$$

Dalla definizione di valore atteso della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$, per $x_1 \in]0, 1[$ si ha

$$E[X_2 | X_1 = x_1] = \int_0^1 x_2 \cdot 2(1 - x_1 - x_2 + 2x_1x_2) dx_2 = \frac{1}{3} (1 + x_1). \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2) = e^{it_1 + t_1t_2 - t_1^2 - t_2^2},$$

si determini le leggi delle due componenti marginali e si verifichi se sono indipendenti.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.c.m. si ha

$$\varphi_{X_1}(t_1) = \varphi_X(t_1, 0) = e^{it_1 - t_1^2}, \quad \varphi_{X_2}(t_2) = \varphi_X(0, t_2) = e^{-t_2^2}.$$

Dunque, la v.a. X_1 è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(1, 2)$, mentre la v.a. X_2 è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(0, 2)$. Le due componenti non sono indipendenti in quanto $\varphi_X(t_1, t_2) \neq \varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2)$. ♣

• **Esercizio 5.** Dato il moto Browniano $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ ed il p.a. $M = (M_t)_{t \in [0, T]}$ tale che $M_t = B_t + B_t^2 - t$, si verifichi che M è una martingala, tenendo presente l'espressione mediante l'integrale di Itô delle v.a. B_t e B_t^2 .

♠ **Soluzione.** Dal momento che

$$B_t^2 = t + 2 \int_0^t B_s dB_s ,$$

allora risulta

$$M_t = \int_0^t dB_s + 2 \int_0^t B_s dB_s = \int_0^t (1 + 2B_s) dB_s .$$

Quindi, M è un processo di Itô con $\alpha = (\alpha_t)_{t \in [0, T]}$ e $\beta = (\beta_t)_{t \in [0, T]}$ dove $\alpha_t = 0$ e $\beta_t = 1 + 2B_t$, ovvero è una martingala dal momento che il p.a. α è identicamente nullo, mentre $\beta \in \mathcal{M}_T^2$ essendo $(1 + 2B_t)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{M}_T^2$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Risulta immediato verificare che M è una martingala, dal momento che i p.a. $(B_t)_{t \in [0, T]}$ e $(B_t^2 - t)_{t \in [0, T]}$ sono martingale e che la somma di martingale è una martingala. ♦

• **Esercizio 6.** Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = t^2 dt + dB_t$$

con condizione iniziale $X_0 = 0$ q.c. e se ne determini la soluzione. Si calcoli inoltre $E[X_t]$ e $\text{Var}[X_t]$.

♠ **Soluzione.** Dalla definizione di processo di Itô si ha

$$X_t = \int_0^t s^2 ds + \int_0^t dB_s = \frac{t^3}{3} + B_t .$$

Inoltre, per le proprietà del moto Browniano si ha

$$E[X_t] = \frac{t^3}{3} + E[B_t] = \frac{t^3}{3} , \text{Var}[X_t] = \text{Var}[B_t] = t .$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Per le proprietà del moto Browniano, la v.a. X_t è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(\frac{t^3}{3}, t)$. ♦

Esame del 5 Settembre 2022

• **Esercizio 1.** In una popolazione viene considerata un'indagine relativa ai comportamenti rispetto al fumo e al genere. La probabilità di selezionare un fumatore nella popolazione è pari a $\frac{1}{4}$. Inoltre, la probabilità di selezionare un uomo dato che il soggetto è fumatore è pari a $\frac{7}{10}$, mentre la probabilità di selezionare un uomo è pari a $\frac{1}{2}$. Si determini la probabilità di essere fumatore dato che si è selezionato un uomo.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento di essere fumatori, mentre sia E l'evento di essere uomo. Si ha $P(E_1) = \frac{1}{4}$, mentre $P(E | E_1) = \frac{7}{10}$ e $P(E) = \frac{1}{2}$. Considerando la Formula di Bayes, la probabilità di essere fumatore dato che si è selezionato un uomo risulta

$$P(E_1 | E) = \frac{P(E | E_1)P(E_1)}{P(E)} = \frac{7}{20} .$$

• **Esercizio 2.** Si considerino le v.a. indipendenti X_1 e X_2 distribuite rispettivamente con legge di Bernoulli di parametro $\frac{1}{2}$. Si determini la legge condizionata della v.a. X_1 all'evento $\{X_1 + X_2 = 1\}$.

♠ **Soluzione.** Tenendo presente la Formula di Bayes, la f.p. condizionata della v.a. X_1 all'evento $\{X_1 + X_2 = 1\}$ è data da

$$p_{X_1|X_1+X_2=1}(x_1) = P(X_1 = x_1 | X_1 + X_2 = 1) = \frac{P(X_1 + X_2 = 1 | X_1 = x_1)P(X_1 = x_1)}{P(X_1 + X_2 = 1)}$$

$$= \frac{P(X_2 = 1 - x_1)P(X_1 = x_1)}{P(X_1 + X_2 = 1)} \mathbf{1}_{\{0,1\}}(x_1) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{0,1\}}(x_1),$$

dal momento che $P(X_2 = 1 - x_1) = P(X_1 = x_1) = \frac{1}{2}$ per $x_1 \in \{0, 1\}$, mentre la v.a. $(X_1 + X_2)$ è distribuita con legge Binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$ e quindi $P(X_1 + X_2 = 1) = \frac{1}{2}$. ♣

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = 2 \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) \mathbf{1}_{]0,1[}(x_2) \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1 + x_2),$$

si determini $E[Y_1 Y_2]$ dove $Y = (Y_1, Y_2)^T = (X_1, X_1 X_2)^T$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$E[Y_1 Y_2] = E[X_1^2 X_2] = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} x_1^2 x_2 \cdot 2 dx_1 dx_2 = \int_0^1 x_1^2 (1 - x_1)^2 dx_1 = \frac{\Gamma(3)^2}{\Gamma(6)} = \frac{1}{30}. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 4.** Date le v.a. indipendenti X_1, X_2 e X_3 , rispettivamente con legge di Poisson $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2)$ e $\mathcal{P}(3)$, si determini la legge della v.a. $Y = X_1 + X_2 + X_3$.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.g. si ha

$$G_Y(t) = \prod_{i=1}^3 G_{X_i}(t) = e^{6(t-1)}.$$

Dunque, la v.a. Y è distribuita con legge di Poisson $\mathcal{P}(6)$. ♣

• **Esercizio 5.** Data la v.a. assolutamente continua Z che ammette f.r.

$$F_Z(z) = (1 - e^{-z^2}) \mathbf{1}_{[0,\infty[}(z),$$

si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ tale che $X_n = n^{-1}Z$. Si verifichi che la successione di v.a. converge in probabilità ad una v.a. degenere concentrata su 0.

♠ **Soluzione.** La f.r. della v.a. X_n è data da

$$F_{X_n}(x) = (1 - e^{-n^2 x^2}) \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x),$$

da cui

$$\lim_n F_{X_n}(x) = \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x),$$

ovvero $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$ per $n \rightarrow \infty$. Dal momento che la convergenza in distribuzione verso una v.a. degenere implica la convergenza in probabilità, si ha anche $X_n \xrightarrow{P} 0$. ♣

• **Esercizio 6.** Sia $X = (B_t^2)_{t \in [0,T]}$ dove $B = (B_t)_{t \in [0,T]}$ è un moto Browniano. Se $I(X)$ è l'integrale di Itô, si calcoli $E[I(X)]$ e $\text{Var}[I(X)]$.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà del moto Browniano, si ha

$$E[X_t^2] = E[B_t^4] = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}x^2} dx = t^2 \int_{-\infty}^{\infty} z^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 3t^2.$$

Inoltre, per le proprietà dell'integrale di Itô si ha $E[I(X)] = 0$, mentre

$$\text{Var}[I(X)] = \int_0^T \mathbb{E}[X_t^2] dt = T^3.$$

♣

Esame del 20 Settembre 2022

• **Esercizio 1.** Tre monete equilibrate vengono lanciate contemporaneamente in modo indipendente. Se almeno due monete mostrano la faccia contrassegnata dalla testa, si verifichi che la probabilità di avere testa anche per la terza moneta è pari ad $\frac{1}{4}$. Al fine di risolvere l'esercizio, è conveniente descrivere opportunamente lo spazio degli eventi, prima di considerare la probabilità condizionata richiesta.

♠ **Soluzione.** L'esperimento aleatorio considerato è equivalente a tre lanci ripetuti di una singola moneta. Codificando i due eventi elementari relativi ad un singolo lancio con i simboli t e c , lo spazio fondamentale è dato da $\Omega = \{t, c\}$ e quindi lo spazio fondamentale prodotto relativo all'esperimento aleatorio considerato risulta

$$\Omega^3 = \{(t, t, t), (t, t, c), (t, c, t), (c, t, t), (t, c, c), (c, t, c), (c, c, t), (c, c, c)\}.$$

Per le assunzioni fatte, ogni evento elementare in Ω^3 ha probabilità $\frac{1}{8}$. Dunque, se $E_1 = \{(t, t, t)\}$ e $E_2 = \{(t, t, t), (t, t, c), (t, c, t), (c, t, t)\}$, la probabilità richiesta è data da

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{1}{4}.$$

♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Il problema considerato è anche detto paradosso di Galton (Francis Galton, 1822-1911, uno dei padri fondatori della statistica), in quanto il probabilista ingenuo è portato ad affermare che la probabilità richiesta sia pari a $\frac{1}{2}$.

♦

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \frac{3}{4} (1 - x^2) \mathbf{1}_{]-1, 1[}(x),$$

si determini la d.p. della v.a. trasformata $Y = |X|$.

♠ **Soluzione.** La trasformata $g(x) = |x|$ non è biunivoca per $x \in]-1, 1[$, anche se si può esprimere come somma di funzioni biunivoche su una partizione, ovvero $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ con $g_1(x) = -x \mathbf{1}_{]-1, 0[}(x)$ e $g_2(x) = x \mathbf{1}_{[0, 1[}(x)$. Tenendo presente che

$$f_Y(y) = f_X(g_1^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_1^{-1}(y) \right| + f_X(g_2^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_2^{-1}(y) \right|$$

ed essendo $g_1^{-1}(y) = -y$ e $g_2^{-1}(y) = y$, si ha

$$f_Y(y) = \frac{3}{2} (1 - y^2) \mathbf{1}_{[0, 1[}(y).$$

♣

• **Esercizio 3.** Si consideri la v.a. assolutamente continua X_1 con d.p.

$$f_{X_1}(x_1) = \mathbf{1}_{[0, 1[}(x_1).$$

Data la v.a. trasformata $Y = \sqrt{X}$, si determini $\text{Var}[Y]$.

♠ **Soluzione.** Per $r = 0, 1, \dots$ si ha

$$E[Y^r] = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}r} dx = \frac{2}{r+2},$$

da cui

$$\text{Var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{1}{18}.$$

♣

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. discreto $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ con f.g.p.

$$G_X(t_1, t_2, t_3) = \left(\frac{1}{6} t_1 + \frac{1}{3} t_2 + \frac{1}{2} t_3 \right)^4,$$

si determini $\text{Cov}[X_1, X_3]$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$E[X_1] = \frac{\partial G_X(t_1, t_2, t_3)}{\partial t_1} \Big|_{t_1, t_2, t_3=1} = \frac{2}{3}, E[X_3] = \frac{\partial G_X(t_1, t_2, t_3)}{\partial t_3} \Big|_{t_1, t_2, t_3=1} = 2,$$

e

$$E[X_1 X_3] = \frac{\partial^2 G_X(t_1, t_2, t_3)}{\partial t_1 \partial t_3} \Big|_{t_1, t_2, t_3=1} = 1.$$

Dunque, risulta $\text{Cov}[X_1, X_3] = -\frac{1}{3}$.

♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Il v.v.a. X è distribuito con legge Multinomiale di parametri $n = 4$ e $p = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})^T$. Quindi, si ottiene immediatamente che $\text{Cov}[X_1, X_3] = -np_1 p_3 = -\frac{1}{3}$.

♦

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. indipendenti $(X_n)_{n \geq 1}$ tale che X_n è una v.a. con f.p. data da

$$p_{X_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbf{1}_{\{1\}}(x) + \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\{n+1\}}(x).$$

Mediante l'uso della f.g. si verifichi che $X_n \xrightarrow{P} 1$ per $n \rightarrow \infty$. Si verifichi inoltre che la successione non converge in media quadratica ad 1.

♠ **Soluzione.** Si osservi che

$$G_{X_n}(t) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)t + \frac{1}{n} t^{n+1}$$

e, dal momento che $t \in [0, 1]$, si ha

$$\lim_n G_{X_n}(t) = t.$$

Tenendo presente che $G_X(t) = t$ implica che $P(X = 1) = 1$, si ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$ per $n \rightarrow \infty$ e quindi $X_n \xrightarrow{P} 1$ per $n \rightarrow \infty$. Inoltre, risulta

$$\lim_n E[(X_n - 1)^2] = \lim_n n = \infty$$

e quindi la successione non converge in media quadratica.

♣

• **Esercizio 6.** Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = -2X_t dt + 3dB_t,$$

con condizione iniziale $X_0 = 0$, e se ne determini la soluzione.

♠ **Soluzione.** Risulta semplice verificare che il processo $X = (X_t)_{t \in [0, \infty[}$ è un processo di Itô. Si consideri l'ulteriore processo di Itô $Y = (Y_t)_{t \in [0, \infty[}$, dove $Y_t = e^{2t}$ è un processo deterministico. Dalla formula di integrazione per parti, si ha

$$d(X_t Y_t) = e^{2t} dX_t + 2e^{2t} X_t dt = e^{2t} (-2X_t dt + 3dB_t) + 2e^{2t} X_t dt = 3e^{2t} dB_t,$$

ovvero

$$e^{2t} X_t = \int_0^t 3e^{2s} dB_s.$$

Dunque, la soluzione $X = (X_t)_{t \in [0, 1]}$ dell'equazione differenziale stocastica è tale che

$$X_t = 3e^{-2t} \int_0^t e^{2s} dB_s.$$

La soluzione poteva essere ottenuta immediatamente riconoscendo che l'equazione differenziale stocastica è quella relativa ad un processo di Ornstein e Uhlenbeck con $\mu = 2$ e $\sigma = 3$. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che $\int_0^t e^{2s} dB_s$ è un integrale di Wiener e quindi, essendo $\int_0^t e^{4s} ds = \frac{1}{4}(e^{4t} - 1)$, è una v.a. con legge Normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{4}(e^{4t} - 1))$. Quindi, la v.a. X_t è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(0, \frac{9}{4}(1 - e^{-4t}))$. ♦

Esame del 3 Ottobre 2022

● **Esercizio 1.** Un'urna contiene 20 palline rosse, 40 palline nere e 40 palline verdi. Una prima pallina viene estratta dall'urna e viene accantonata senza osservarne il colore. Se una seconda pallina viene estratta dall'urna, si determini la probabilità che sia rossa.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento relativo alla prima estrazione di una pallina rossa dall'urna, mentre sia E l'evento relativo alla seconda estrazione di una pallina rossa. Si ha $P(E_1) = \frac{1}{5}$ e $P(E_1^c) = \frac{4}{5}$. Inoltre, $P(E | E_1) = \frac{19}{99}$ e $P(E | E_1^c) = \frac{20}{99}$. Dal momento che gli eventi E_1 e E_1^c costituiscono una partizione dello spazio fondamentale, applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E | E_1)P(E_1) + P(E | E_1^c)P(E_1^c) = \frac{1}{5}. \quad \clubsuit$$

● **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|},$$

si determini la d.p. della v.a. trasformata $Y = X^2$.

♠ **Soluzione.** Data la funzione $g(x) = x^2$, l'immagine di $\mathbb{R}$ è data da $\mathbb{R}^+$, ovvero $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$. Inoltre, l'immagine inversa dell'intervallo $[0, y]$ è l'intervallo $[-\sqrt{y}, \sqrt{y}]$, ovvero $g^{-1}([0, y]) = [-\sqrt{y}, \sqrt{y}]$. In questo caso, dal momento che la v.a. X è assolutamente continua, si ha

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \in [-\sqrt{y}, \sqrt{y}]) \mathbf{1}_{[0, \infty[}(y) = (F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})) \mathbf{1}_{[0, \infty[}(y),$$

ovvero la v.a. Y ammette d.p. data da

$$f_Y(y) = (f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})) \frac{1}{2\sqrt{y}} \mathbf{1}_{[0,\infty[}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(y) . \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = 60x_1^2 x_2 \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) \mathbf{1}_{]0,1[}(x_2) \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1 + x_2) ,$$

si determini il valore atteso condizionato $E[X_2 | X_1 = x_1]$.

♠ **Soluzione.** La d.p. della v.a. X_1 è data da

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^{1-x_1} 60x_1^2 x_2 \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) dx_2 = 30x_1^2 (1-x_1)^2 \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) .$$

Dalla definizione di valore atteso della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$, per $x_1 \in]0, 1[$ si ha

$$E[X_2 | X_1 = x_1] = \int_0^{1-x_1} x_2 \frac{2x_2}{(1-x_1)^2} dx_2 = \frac{2}{3} (1-x_1) . \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 4.** Si consideri la v.a. X tale che $X = \sum_{k=1}^Y Z_k$, dove Y è una v.a. distribuita con legge di Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, mentre le Z_k sono v.a. indipendenti e identicamente distribuite come la v.a. Z con legge di Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$. Tenendo presente i risultati per le leggi composte, si determini la legge della v.a. X .

♠ **Soluzione.** Le f.g. delle v.a. Y e Z sono $G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}$ e $G_Z(t) = 1 - p + pt$, da cui

$$G_X(t) = G_Y(G_Z(t)) = e^{p\lambda(t-1)} .$$

Si deve concludere che la v.a. X si distribuisce con legge di Poisson $\mathcal{P}(p\lambda)$. ♣

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. indipendenti $(X_n)_{n \geq 1}$ tale che X_n è una v.a. con f.p. data da

$$p_{X_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbf{1}_{\{1\}}(x) + \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\{n\}}(x) .$$

Mediante l'uso della f.g. si determini la legge della v.a. X tale che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n \rightarrow \infty$.

♠ **Soluzione.** Si osservi che

$$G_{X_n}(t) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)t + \frac{1}{n} t^n$$

e, tenendo presente che $t \in [0, 1]$, si ha

$$\lim_n G_{X_n}(t) = t .$$

La precedente espressione fornisce la f.g. di una v.a. X degenerare nel valore 1, ovvero $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$. ♣

• **Esercizio 6.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{[0,1]}$, si determini la legge dell'integrale stocastico $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dB_t$.

♠ **Soluzione.** Si noti che I è un integrale di Wiener e che

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dt = \log 2 < \infty.$$

Dunque, I è una v.a. con legge Normale $\mathcal{N}(0, \log 2)$. ♣

Prova intermedia del 22 Aprile 2024

• **Esercizio 1.** Una urna contiene 5 palline bianche e 3 palline rosse. Le 8 palline hanno la stessa probabilità di essere estratte. L'esperimento aleatorio consiste nell'estrarre una pallina, che viene reinserita nell'urna insieme a due palline del colore che non è stato estratto. Successivamente, viene estratta una seconda pallina dall'urna con 10 palline che hanno la stessa probabilità di essere estratte. Se la seconda pallina estratta è rossa, determinare la probabilità che la prima pallina sia rossa e la probabilità che la prima pallina sia bianca.

♠ **Soluzione.** Si denoti con E_1 l'evento che la prima pallina estratta sia rossa e con E_2 l'evento che la seconda pallina sia rossa. Dunque, risulta $P(E_1) = \frac{3}{8}$ e $P(E_2 | E_1) = \frac{3}{10}$, mentre $P(E_1^c) = \frac{5}{8}$ e $P(E_2 | E_1^c) = \frac{5}{10}$, da cui per la Legge delle Probabilità Totali si ha

$$P(E_2) = P(E_2 | E_1)P(E_1) + P(E_2 | E_1^c)P(E_1^c) = \frac{34}{80}.$$

Per il Teorema di Bayes risulta dunque

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_2 | E_1)P(E_1)}{P(E_2)} = \frac{9}{34}, \quad P(E_1^c | E_2) = \frac{P(E_2 | E_1^c)P(E_1^c)}{P(E_2)} = \frac{25}{34}. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = e^{-x} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x),$$

si consideri la v.a. trasformata $Y = \cos(X)$ e si calcoli $E[Y]$ e $\text{Var}[Y]$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$E[Y] = \int_0^1 \cos(x) e^{-x} dx = \frac{1}{2}, \quad E[Y^2] = \int_0^1 \cos^2(x) e^{-x} dx = \frac{3}{5},$$

da cui $\text{Var}[Y] = \frac{7}{20}$. ♣

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ con d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}$$

si determini la d.p.c. del v.v.a. $Y = (Y_1, Y_2)^T$ con $Y_1 = (X_1 + X_2)/\sqrt{2}$ e $Y_2 = (X_1 - X_2)/\sqrt{2}$ e si verifichi che le corrispondenti componenti sono indipendenti.

♠ **Soluzione.** Si ha la trasformata $Y = g(X)$ dove $g^{-1}(y) = ((y_1 + y_2)/\sqrt{2}, (y_1 - y_2)/\sqrt{2})^T$. Dal momento che $|J(g^{-1}(y))| = 1$, la d.p.c. è data da

$$f_Y(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_2^2} = f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2}(y_2).$$

Dunque, Y_1 e Y_2 sono indipendenti. ♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che il v.v.a. Y è distribuito con la stessa legge del v.v.a. X . In particolare X_1 e X_2 sono v.a. indipendenti ciascuna distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(0, 1)$. ♦

Esame del 10 Giugno 2024

● **Esercizio 1.** Si consideri sei lanci indipendenti di un dado equilibrato e si determini la probabilità di ottenere più di una volta la faccia contrassegnata da due punti.

♠ **Soluzione.** Se la v.a. X rappresenta il numero di volte in cui si è ottenuta la faccia contrassegnata da due punti nell'esperimento aleatorio, allora la v.a. X è distribuita con legge Binomiale $\mathcal{B}(6, \frac{1}{6})$. Dunque, la probabilità richiesta è data da

$$P(X > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{12281}{46656} \simeq 0.2632. \quad \clubsuit$$

● **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x),$$

si determini la d.p. della v.a. trasformata $Y = 4X(1 - X)$.

♠ **Soluzione.** Considerata la funzione $g(x) = 4x(1 - x)$, l'immagine dell'intervallo $[0, 1]$ è l'intervallo $[0, 1]$, ovvero $g([0, 1]) = [0, 1]$. Inoltre, l'immagine inversa dell'intervallo $[0, y]$ è data dall'unione degli intervalli $[0, y_1] \cup [y_2, 1]$, dove $y_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - y})$ e $y_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - y})$. Dal momento che la v.a. X è assolutamente continua, si ottiene

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = (1 - P(X \in]y_1, y_2[)) \mathbf{1}_{]-\infty, 1]}(y),$$

ovvero

$$F_Y(y) = (1 - F_X(y_2) + F_X(y_1)) \mathbf{1}_{]-\infty, 1]}(y) = (1 - \sqrt{1 - y}) \mathbf{1}_{[0, 1]}(y) + \mathbf{1}_{[1, \infty]}(y),$$

per cui la v.a. Y ammette d.p. data da

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{1 - y}} \mathbf{1}_{[0, 1]}(y). \quad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che g è una funzione biunivoca sui due elementi $B_1 =]-\infty, \frac{1}{2}]$ e $B_2 =]\frac{1}{2}, \infty[$ della partizione di $\mathbb{R}$. Essendo $g_1^{-1}(y) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - y})$ e $g_2^{-1}(y) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - y})$, si ha dunque equivalentemente

$$f_Y(y) = f_X(g_1^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_1^{-1}(y) \right| + f_X(g_2^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_2^{-1}(y) \right| = \frac{1}{2\sqrt{1 - y}} \mathbf{1}_{[0, 1]}(y). \quad \blacklozenge$$

● **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{3}{2} \mathbf{1}_{[0, 1]}(x_1) \mathbf{1}_{[x_1^2, 1]}(x_2),$$

si determini il valore atteso condizionato $E[X_2 \mid X_1 = x_1]$.

♠ **Soluzione.** La d.p. della v.a. X_1 è data da

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{x_1^2}^1 \frac{3}{2} \mathbf{1}_{[0, 1]}(x_1) dx_2 = \frac{3}{2} (1 - x_1^2) \mathbf{1}_{[0, 1]}(x_1).$$

Dalla definizione di valore atteso della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$, per $x_1 \in [0, 1]$ si ha

$$E[X_2 | X_1 = x_1] = \int_{x_1^2}^1 x_2 \frac{1}{(1 - x_1^2)} dx_2 = \frac{1}{2} (1 + x_1^2) . \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2) = e^{it_1 - 2t_1^2 - t_2^2 - t_1 t_2} ,$$

se ne determini la legge.

♠ **Soluzione.** Posto $t = (t_1, t_2)^T$ la f.c.m. φ_X è data da

$$\varphi_X(t_1, t_2) = e^{i\mu^T t - \frac{1}{2} t^T \Sigma t} ,$$

dove $\mu = (1, 0)^T$ e

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Dunque, il v.v.a. X è distribuito con legge Normale Multivariata $\mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$. ♣

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. indipendenti $(X_n)_{n \geq 1}$ tale che X_n è una v.a. discreta con f.p. data da

$$p_{X_n}(x) = \frac{n-1}{n} \mathbf{1}_{\{0\}}(x) + \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\{n^2\}}(x) .$$

Si verifichi che $X_n \xrightarrow{P} 0$ per $n \rightarrow \infty$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$\lim_n P(|X_n| > \varepsilon) = \lim_n \frac{1}{n} = 0 ,$$

ovvero $X_n \xrightarrow{P} 0$ per $n \rightarrow \infty$. ♣

• **Esercizio 6.** Se $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ è un moto Browniano, si consideri il p.a. $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ dove

$$X_t = \int_0^t e^{B_s} dB_s .$$

Tenendo presente la formula per l'integrazione stocastica per parti, si determini un'espressione alternativa per il precedente integrale stocastico.

♠ **Soluzione.** Dall'espressione della formula per l'integrazione stocastica per parti con $h(t) = 1$ e $g(x) = e^x$ si ha

$$\int_0^t e^{B_s} dB_s = e^{B_s} \Big|_0^t - \frac{1}{2} \int_0^t e^{B_s} ds = e^{B_t} - 1 - \frac{1}{2} \int_0^t e^{B_s} ds . \quad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Si noti che X è una martingala, essendo un processo integrale di Itô. Dunque, risulta $E[X_t] = 0$, da cui

$$E[e^{B_t}] - 1 - \frac{1}{2} \int_0^t E[e^{B_s}] ds = 0 .$$

Si ponga $f(t) = E[e^{B_t}]$. Al fine di determinare questo valore atteso è sufficiente risolvere l'equazione differenziale $f' = \frac{1}{2}f$ con condizione iniziale $f(0) = 1$, che fornisce la soluzione $f(t) = e^{\frac{1}{2}t}$. Dunque,

risulta $E[e^{B_t}] = e^{\frac{1}{2}t}$, un risultato coerente con il fatto che la v.a. e^{B_t} è distribuita con legge Log-Normale con parametri dati da 0 e $\sqrt{t}$. In generale, questa tecnica viene molto spesso adoperata per ottenere media e varianza dello stato X_t di un p.a. $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ tale che

$$dX_t = a(X_t, t) dt + b(X_t, t) dB_t$$

con $a, b \in \mathcal{M}_T$. In effetti, si ottiene

$$E[X_t] = E[C] + \int_0^t E[a(X_s, s)] ds$$

e posto $f(t) = E[X_t]$, si ha l'equazione differenziale $f'(t) = E[a(X_t, t)]$. Questa equazione fornisce banalmente soluzioni esatte nel caso in cui $a(X_t, t) = c(t)$, ovvero $E[X_t] = E[C] + \int_0^t c(s) ds$. Nel caso in cui $a(X_t, t) = c_1(t)X_t + c_2(t)$, l'equazione differenziale si riduce a $f'(t) = c_1(t)f(t) + c_2(t)$ con soluzione

$$E[X_t] = e^{A(t)} (E[C] + \int_0^t e^{-A(s)} c_2(s) ds)$$

dove $A(t) = \int_0^t c_1(s) ds$. ♦

Esame del 3 Luglio 2024

• **Esercizio 1.** Uno studente può accedere a due differenti corsi di laurea magistrale mediante esame di ammissione. La probabilità di sostenere positivamente l'esame del primo corso è pari a 0.6, la probabilità di essere respinti all'esame del secondo corso è pari a 0.2, mentre la probabilità di essere respinti ad almeno uno dei due esami è pari a 0.3. Determinare la probabilità che lo studente sia accettato ad almeno un corso di laurea.

♠ **Soluzione.** Si denoti con E_1 l'evento che lo studente sia accettato al primo corso e con E_2 l'evento che lo studente sia accettato al secondo corso. Si ha $P(E_1) = 0.6$ e $P(E_2) = 1 - P(E_2^c) = 0.8$, mentre $P(E_1^c \cup E_2^c) = 0.3$. Per la relazione di De Morgan si ha $E_1^c \cup E_2^c = (E_1 \cap E_2)^c$ e risulta

$$P(E_1 \cap E_2) = 1 - P(E_1^c \cup E_2^c) = 0.7.$$

Dunque, la probabilità richiesta è data da

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0.7. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x),$$

si consideri la v.a. trasformata $Y = -\log(X)$ e se ne determini la d.p.

♠ **Soluzione.** Dal momento che la trasformata $g(x) = -\log(x)$ è una funzione misurabile biunivoca con $g^{-1}(y) = e^{-y}$ e che $g([0, 1]) = [0, \infty[$, si ha

$$f_Y(y) = e^{-y} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(y). \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ con d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}$$

si determini la media della v.a. $Z = (X_1^2 + X_2^2)^{\frac{1}{2}}$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} dx_1 dx_2.$$

Tenendo presente la trasformata in coordinate polari $(x_1, x_2)^T = (y_1 \cos(y_2), y_1 \sin(y_2))^T$, dal momento che $|J(g^{-1}(y))| = y_1$, si ha

$$E[Z] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} y_1^2 e^{-\frac{1}{2}y_1^2} dy_1 dy_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y_1^2 e^{-\frac{1}{2}y_1^2} dy_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Considerando la trasformata in coordinate polari $Y = (Y_1, Y_2)^T$, si ha

$$f_Y(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} y_1 e^{-\frac{1}{2}y_1^2} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(y_1) \mathbf{1}_{[0, 2\pi[}(y_2)$$

e, dal momento che $Z = Y_1$, la d.p. di Z è data da

$$f_Z(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} z e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(z) dy_2 = z e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(z).$$

Dunque, la v.a. Z è distribuita con la cosiddetta legge di Rayleigh e di nuovo si ha

$$E[Z] = \int_0^{\infty} z^2 e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad \blacklozenge$$

● **Esercizio 4.** Si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ tale che la v.a. X_n si distribuisce con legge Esponenziale $\mathcal{G}(0, (n+1)/n, 1)$. Si verifichi che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n \rightarrow \infty$, dove X è una v.a. che si distribuisce con legge Esponenziale $\mathcal{G}(0, 1, 1)$.

♠ **Soluzione.** La f.r. della v.a. X_n è data da

$$F_{X_n}(x) = (1 - e^{-\frac{nx}{n+1}}) \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x),$$

da cui

$$\lim_n F_{X_n}(x) = (1 - e^{-x}) \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x),$$

ovvero $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n \rightarrow \infty$. ♣

● **Esercizio 5.** Dato il moto Browniano $B = (B_t)_{t \in [0, \infty[}$ ed il p.a. $M = (M_t)_{t \in [0, \infty[}$ tale che $M_t = B_t - at$ dove $a \in \mathbb{R}$, si determini la costante a in modo che M sia una martingala.

♠ **Soluzione.** Per ogni t si ha

$$E[|M_t|] = E[|B_t - at|] \leq E[|B_t| + |at|] = E[|B_t|] + |at| = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} + |a|t.$$

Dunque, deve essere $a < \infty$. Inoltre, dalla definizione di martingala si ha

$$\begin{aligned} E[M_t | \mathcal{F}_s] &= E[B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s] - at = E[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] + E[B_s | \mathcal{F}_s] - at \\ &= E[B_t - B_s] + B_s - as - a(t - s) = M_s + a(t - s). \end{aligned}$$

Quindi, affinché M sia una martingala deve risultare $a = 0$. ♣

• **Esercizio 6.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{[0,1]}$, si determini la legge dell'integrale stocastico $I = \int_0^1 t^3 dB_t$.

♠ **Soluzione.** Si noti che I è un integrale di Wiener e che $\int_0^1 t^6 dt = \frac{1}{7} < \infty$. Dunque, I è una v.a. con legge Normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{7})$. ♣

Esame del 20 Marzo 2025

• **Esercizio 1.** Un atleta di una disciplina sportiva viene selezionato per il controllo antidoping. La probabilità che un atleta di questa disciplina faccia uso di doping è pari a 0.07, mentre il test per il controllo del doping fornisce un risultato positivo con una probabilità pari a 0.96 se un atleta è effettivamente dopato e con una probabilità pari a 0.05 se un atleta non è dopato. Se il controllo antidoping per l'atleta selezionato fornisce un risultato negativo, si determini che l'atleta abbia comunque fatto uso di doping.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento che un atleta della disciplina faccia uso di doping, mentre sia E l'evento che il test abbia fornito un risultato negativo. Si ha $P(E_1) = 0.07$ e $P(E_1^c) = 0.93$. Inoltre, risulta $P(E | E_1) = 1 - P(E^c | E_1) = 0.04$ e $P(E | E_1^c) = 1 - P(E^c | E_1^c) = 0.95$. Dal momento che gli eventi E_1 e E_1^c costituiscono una partizione dello spazio fondamentale, applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E | E_1)P(E_1) + P(E | E_1^c)P(E_1^c) = 0.8863.$$

La probabilità richiesta è quindi data da

$$P(E_1 | E) = \frac{P(E | E_1)P(E_1)}{P(E)} \simeq 0.0032.$$

♣

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con d.p.

$$f_X(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x),$$

si determini la d.p. della v.a. trasformata $Y = \min(X, 1 - X)$.

♠ **Soluzione.** Considerata la funzione $g(x) = \min(x, 1 - x)$, l'immagine dell'intervallo $[0, 1]$ è data dall'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$, ovvero $g([0, 1]) = [0, \frac{1}{2}]$. Inoltre, l'immagine inversa dell'intervallo $[0, y]$ è l'unione di due intervalli $[0, y] \cup [1 - y, 1]$, ovvero $g^{-1}([0, y]) = [0, 1] \setminus]y, 1 - y[$. In questo caso, dal momento che la v.a. X è assolutamente continua, si ha

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = (1 - P(X \in]y, 1 - y[)) \mathbf{1}_{]-\infty, \frac{1}{2}]}(y) = (1 - F_X(1 - y) + F_X(y)) \mathbf{1}_{]-\infty, \frac{1}{2}]}(y),$$

ovvero la v.a. Y ammette d.p. data da

$$f_Y(y) = (f_X(1 - y) + f_X(y)) \mathbf{1}_{]-\infty, \frac{1}{2}]}(y) = 2 \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}]}(y).$$

Dunque, la v.a. Y è distribuita con legge Uniforme su $[0, \frac{1}{2}]$. ♣

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = 4x_1x_2 \mathbf{1}_{[0,1]}(x_1) \mathbf{1}_{[0,1]}(x_2),$$

si determini $P(X_2 < X_1)$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$P(X_2 < X_1) = \int_0^1 \int_0^{x_1} 4x_1x_2 dx_1 dx_2 = 2 \int_0^1 x_1^3 dx_1 = \frac{1}{2}.$$

♣

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che

$$P(X_2 \geq X_1) = \int_0^1 \int_0^{x_2} 4x_1 x_2 dx_2 dx_1 = P(X_2 < X_1)$$

e dal momento che gli eventi $\{X_2 < X_1\}$ e $\{X_2 \geq X_1\}$ formano una partizione di $\mathbb{R}^2$, deve risultare necessariamente $P(X_2 \geq X_1) = P(X_2 < X_1) = \frac{1}{2}$. ♦

● **Esercizio 4.** Si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n \geq 4}$ tale che X_n è una v.a. con f.p. data da

$$p_{X_n}(x) = \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{0\}}(x) + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{1\}}(x) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n}\right) \mathbf{1}_{\{2\}}(x) + \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\{n\}}(x).$$

Mediante l'uso della f.g. si determini la legge della v.a. X tale che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n \rightarrow \infty$.

♠ **Soluzione.** Si osservi che

$$G_{X_n}(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n}\right)t^2 + \frac{1}{n}t^n$$

e, tenendo presente che $t \in [0, 1]$, si ha

$$\lim_n G_{X_n}(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2.$$

La precedente espressione fornisce la f.g. di una v.a. X distribuita con legge Binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$. ♣

● **Esercizio 5.** Sia dato il moto Browniano $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ ed il p.a. $M = (M_t)_{t \in [0, T]}$ tale che $M_t = e^{B_t}$. Mediante la formula di Itô, si verifichi se M è una martingala.

♠ **Soluzione.** Dalla Formula di Itô con $g(x) = e^x$, si ha

$$dM_t = de^{B_t} = e^{B_t} dB_t + \frac{1}{2} e^{B_t} dt.$$

Dunque, M è un processo di Itô con $\alpha_t = e^{B_t}$ e $\beta_t = \frac{1}{2} e^{B_t}$, ovvero non è una martingala dal momento che il p.a. $\alpha = (\alpha_t)_{t \in [0, T]}$ non è identicamente nullo. ♣

● **Esercizio 6.** Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = \cos(t)dt + 2dB_t$$

con condizione iniziale $X_0 = 0$ q.c. e se ne determini la soluzione. Si calcoli inoltre $E[X_t]$ e $\text{Var}[X_t]$.

♠ **Soluzione.** Dalla definizione di processo di Itô si ha

$$X_t = \int_0^t \cos(s) ds + 2 \int_0^t dB_s = \sin(t) + 2B_t.$$

Inoltre, per le proprietà del moto Browniano si ha

$$E[X_t] = \sin(t) + 2E[B_t] = \sin(t), \quad \text{Var}[X_t] = 4\text{Var}[B_t] = 4t.$$

♣

Prova intermedia del 28 Aprile 2025

● **Esercizio 1.** Dato lo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, si consideri gli eventi indipendenti $E_1, E_2, E_3 \in \mathcal{F}$ tali che $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$. Si determini $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 1 - P((E_1 \cup E_2 \cup E_3)^c).$$

Dalla relazione di De Morgan e dall'assunzione di indipendenza risulta inoltre

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 1 - P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c) = 1 - P(E_1^c)P(E_2^c)P(E_3^c) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27}. \quad \clubsuit$$

● **Esercizio 2.** Un algoritmo di “antispam” classifica come “sospetti” i messaggi di posta elettronica che contengono certe parole chiave. Al fine di allenare l'algoritmo, si genera messaggi che sono “spam” con probabilità pari a $\frac{3}{5}$. Inoltre, la probabilità che un messaggio spam sia sospetto è pari a $\frac{9}{10}$, mentre la probabilità che un messaggio non spam sia sospetto è pari a $\frac{1}{100}$. Si determini la probabilità che un messaggio sospetto sia effettivamente spam.

♠ **Soluzione.** Si denoti con E_1 l'evento che un messaggio sia spam e con E_2 l'evento che un messaggio sia sospetto. Dunque, si ha $P(E_1) = \frac{3}{5}$ e $P(E_1^c) = \frac{2}{5}$, mentre risulta $P(E_2 | E_1) = \frac{9}{10}$ e $P(E_2 | E_1^c) = \frac{1}{100}$. Per la Legge delle Probabilità Totali si ha

$$P(E_2) = P(E_2 | E_1)P(E_1) + P(E_2 | E_1^c)P(E_1^c) = \frac{68}{125} = 0.544.$$

Per il Teorema di Bayes si ha dunque

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_2 | E_1)P(E_1)}{P(E_2)} = \frac{135}{136} \simeq 0.9926. \quad \clubsuit$$

● **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = e^{-x_1 - x_2} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x_1) \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x_2)$$

e considerata la v.a. trasformata $Y = (X_1 + X_2)(X_1 - X_2)$, si determini $E[Y]$.

♠ **Soluzione.** Si osservi che

$$f_X(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2),$$

dove $f_{X_1}(x_1) = e^{-x_1} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x_1)$ e $f_{X_2} = f_{X_1}$. Le v.a. X_1 e X_2 sono dunque indipendenti con legge Esponenziale $\mathcal{G}(0, 1, 1)$. Dal momento che

$$E[X_1^2] = \int_0^\infty x_1^2 e^{-x_1} dx_1 = \Gamma(3) = 2,$$

si ha

$$E[Y] = E[X_1^2 - X_2^2] = E[X_1^2] - E[X_2^2] = 0. \quad \clubsuit$$

♥ **Ulteriori rilievi.** Si osservi che il risultato poteva essere immediatamente ottenuto dal momento che $X_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_2$ e quindi $X_1^2 \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_2^2$, da cui $E[X_1^2] = E[X_2^2]$. ♦

Esame del 16 Giugno 2025

● **Esercizio 1.** In una famiglia vi sono due bambini. Assumendo che i generi siano ugualmente probabili, si determini la probabilità che entrambi i bambini siano maschi. Inoltre, se un bambino è maschio, si determini la probabilità che anche l'altro bambino sia maschio.

♠ **Soluzione.** Indicando con M e F rispettivamente l'evento elementare che un bambino sia maschio o femmina, si ha lo spazio fondamentale $\Omega = \{M, F\}$, da cui si ottiene lo spazio fondamentale prodotto

$$\Omega^2 = \{(M, M), (M, F), (F, M), (F, F)\}.$$

Si assuma l'assegnazione di probabilità di Laplace su Ω^2 . Indicando con E_1 l'evento che uno dei bambini sia maschio e con E_2 l'evento che anche l'altro bambino sia maschio, si ha

$$P(E_1 \cap E_2) = P(\{(M, M)\}) = \frac{1}{4}.$$

Inoltre, si ha

$$P(E_2 | E_1) = \frac{P(\{(M, M)\})}{P(\{(M, M)\} \cup \{(M, F)\} \cup \{(F, M)\})} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 2.** Un'urna contiene palline di quattro colori, ovvero bianco, nero, rosso e giallo. Se le palline dei vari colori sono in uguale proporzione nell'urna ed estraendo con reinserimento cinque palline, si calcoli la probabilità che due palline siano bianche e una pallina nera.

♠ **Soluzione.** Se la v.a. X_1 rappresenta il numero di palline bianche estratte, la v.a. X_2 il numero di palline nere estratte e la v.a. X_3 il numero di palline estratte dei restanti colori, si consideri il v.v.a. $X = (X_1, X_2, X_3)^T$. Quindi, X è distribuito con legge Multinomiale di parametri 5 e $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})^T$. Se p_X è la f.p.c. del v.v.a. X , la probabilità richiesta è data da

$$p_X(2, 1, 2) = \binom{5}{2 \ 1 \ 2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{128}. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2} \mathbf{1}_{]0, x_2[}(x_1) \mathbf{1}_{]0, 1[}(x_2),$$

si determini il valore atteso condizionato $E[X_2 | X_1 = x_1]$.

♠ **Soluzione.** La d.p. della v.a. X_1 è data da

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{x_1}^1 \frac{1}{x_2} \mathbf{1}_{]0, 1[}(x_1) dx_2 = -\log(x_1) \mathbf{1}_{]0, 1[}(x_1).$$

Dalla definizione di valore atteso condizionato della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$, per $x_1 \in]0, 1[$ si ottiene

$$E[X_2 | X_1 = x_1] = \int_{x_1}^1 x_2 \frac{1}{x_2 (-\log(x_1))} dx_2 = -\frac{1 - x_1}{\log(x_1)}. \quad \clubsuit$$

Esercizio 4. Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2, t_3) = e^{-\frac{1}{2}t^T \Sigma_X t},$$

dove $t = (t_1, t_2, t_3)^T$ e

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

si determini le leggi dei v.v.a. $Y = (X_1, X_2)^T$ e $Z = (X_2, X_3)^T$.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.c.m. si ha

$$\varphi_Y(s_1, s_2) = \varphi_X(s_1, s_2, 0) = e^{-\frac{1}{2}s^T \Sigma_Y s}$$

e

$$\varphi_Z(s_1, s_2) = \varphi_X(0, s_1, s_2) = e^{-\frac{1}{2}s^T \Sigma_Z s},$$

dove $s = (s_1, s_2)^T$ e

$$\Sigma_Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Sigma_Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, il v.v.a. Y è distribuito con legge Normale $\mathcal{N}_2(0, \Sigma_Y)$, mentre il v.v.a. Z è distribuito con legge Normale $\mathcal{N}_2(0, \Sigma_Z)$. ♣

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ tale che X_n è una v.a. con f.p. data da

$$p_{X_n}(x) = (1 - e^{-n}) \mathbf{1}_{\{0\}}(x) + e^{-n} \mathbf{1}_{\{n\}}(x)$$

e si verifichi che $X_n \xrightarrow{L^2} 0$ per $n \rightarrow \infty$.

♠ **Soluzione.** Si ha $E[X_n] = ne^{-n}$ e $E[X_n^2] = n^2e^{-n}$, da cui

$$\lim_n E[X_n] = \lim_n E[X_n^2] = 0,$$

ovvero si ottiene la convergenza in media quadratica. ♣

Esercizio 6. Si consideri il processo di Itô X tale che $dX_t = 2dt + dB_t$. Inoltre, si consideri la funzione $g(x) = x^3$. Si determini l'espressione di $dg(X_t)$.

♠ **Soluzione.** Si osservi che

$$X_t = \int_0^t 2 ds + \int_0^t dB_s = 2t + B_t.$$

Dalla formula di Itô si ha dunque

$$dX_t^3 = 3X_t^2 dX_t + 3X_t dt = 3(1 + 4t + 2B_t)dt + 3(2t + B_t)^2 dB_t. \quad \clubsuit$$

Esame del 9 Luglio 2025

• **Esercizio 1.** Si consideri un mazzo ordinario di carte da gioco composto da 52 carte, da cui vengono estratte carte ad una ad una, senza reinserimento e in modo casuale. Si determini la probabilità di estrarre 3 o più carte dal mazzo prima di ottenere un asso.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento che la prima carta estratta non sia un asso e con E_2 l'evento che la seconda carta estratta non sia un asso. Si ha $P(E_1) = \frac{48}{52}$ e $P(E_2 | E_1) = \frac{47}{51}$. La probabilità richiesta è dunque

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2 | E_1)P(E_1) = \frac{188}{221} \simeq 0.8507. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con f.r.

$$F_X(x) = (1 - e^{-x^3}) \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x),$$

si verifichi che effettivamente F_X è una f.r. e si calcoli $E[X]$.

♠ **Soluzione.** La f.r. F_X è assolutamente continua dal momento che $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$, dove la versione della d.p. può essere scelta come

$$f_X(x) = 3x^3 e^{-x^3} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x) .$$

In effetti, F_X è una f.r. dal momento che $0 \leq F_X(x) \leq 1$ e $\frac{d}{dx} F_X(x) \geq 0$. Inoltre, risulta

$$E[X] = 3 \int_0^\infty x^3 e^{-x^3} dx = \int_0^\infty x^{\frac{1}{3}} e^{-x} dx = \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) . \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \mathbf{1}_{[0,1] \times [0,1]}(x_1, x_2) ,$$

si determini media e varianza della v.a. $Y = \log(X_1 X_2)$.

♠ **Soluzione.** Dal momento che

$$f_X(x_1, x_2) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x_1) \mathbf{1}_{[0,1]}(x_2) ,$$

allora X_1 e X_2 sono v.a. indipendenti e ugualmente distribuite con legge Uniforme su $[0, 1]$. Inoltre, si ha $Y = \log(X_1) + \log(X_2)$. Dunque, dal momento che

$$E[\log(X_1)] = E[\log(X_2)] = \int_0^1 \log(x) dx = -1 ,$$

si ha $E[Y] = -2$. Inoltre, si ha

$$E[\log(X_1)^2] = E[\log(X_2)^2] = \int_0^1 \log(x)^2 dx = 2$$

e $\text{Var}[\log(X_1)^2] = \text{Var}[\log(X_2)^2] = 1$, da cui $\text{Var}[Y] = 2$. ♣

• **Esercizio 4.** Si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ tale che la v.a. X_n possiede f.r. data da

$$F_{X_n}(x) = (1 - (1 - x/n)^n) \mathbf{1}_{]0, n[}(x) + \mathbf{1}_{[n, \infty[}(x) .$$

Si determini la legge della v.a. X tale che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

♠ **Soluzione.** Per ogni $x \in]-\infty, 0]$ si ha banalmente $\lim_n F_{X_n}(x) = 0$. Inoltre, per ogni $x \in]0, \infty[$ si ottiene

$$\lim_n F_{X_n}(x) = \lim_n (1 - (1 - x/n)^n) = (1 - e^{-x}) \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x) .$$

Dunque, $F_{X_n}(x)$ converge alla f.r. $F_X(x) = (1 - e^{-x}) \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x)$. Quindi, la legge della v.a. X è Esponenziale ridotta. ♣

• **Esercizio 5.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{t \in [0, \infty[}$, assumendo che $s \leq t$, si calcoli $E[B_s(B_t - B_s)]$.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà del moto Browniano, risulta

$$E[B_s(B_t - B_s)] = E[B_s] E[B_t - B_s] = 0 ,$$

dal momento che $E[B_s] = E[B_t - B_s] = 0$. ♣

• **Esercizio 6.** Tenendo presente la generalizzazione del moto Browniano integrato, se $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ è un moto Browniano, si consideri il p.a. $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ con

$$X_t = \int_0^t 2s B_s ds .$$

Si determini la legge relativa alla v.a. X_t .

♠ **Soluzione.** Dalla definizione di generalizzazione del moto Browniano integrato con $f(s) = 2s$, si ha

$$h(t) = \int_0^t 2s ds = t^2 ,$$

da cui

$$\int_0^t (h(t) - h(s))^2 ds = \int_0^t (t^2 - s^2)^2 ds = \frac{8}{15} t^5 .$$

La v.a. X_t è dunque distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(0, \frac{8t^5}{15})$. ♣

Esame dell'8 Settembre 2025

• **Esercizio 1.** Si considerino due urne, tali che la prima urna contiene tre palline nere e una rossa, mentre la seconda urna contiene una pallina nera e una rossa. Si determini la probabilità di ottenere una pallina nera, selezionando casualmente un'urna e successivamente estraendo una pallina. Se la pallina ottenuta è nera, si determini la probabilità che provenga dalla prima urna.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento relativo alla selezione della prima urna, mentre sia E l'evento relativo all'estrazione di una pallina nera. Si ha $P(E_1) = P(E_1^c) = \frac{1}{2}$. Inoltre, $P(E | E_1) = \frac{3}{4}$ e $P(E | E_1^c) = \frac{1}{2}$. Dal momento che gli eventi E_1 e E_1^c costituiscono una partizione dello spazio fondamentale, applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E | E_1)P(E_1) + P(E | E_1^c)P(E_1^c) = \frac{5}{8} .$$

Inoltre, dal Teorema di Bayes si ha

$$P(E_1 | E) = \frac{P(E | E_1)P(E_1)}{P(E)} = \frac{3}{5} .$$
 ♣

• **Esercizio 2.** Data la v.a. discreta X che ammette la seguente f.p.

$$p_X(x) = \frac{1}{7} \binom{2}{|x|} \mathbf{1}_{\{-2, -1, 0, 1, 2\}}(x) ,$$

si determini $\text{Var}[X]$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$E[X] = \sum_{x=-2}^2 \frac{x}{7} \binom{2}{|x|} = 0 ,$$

per cui

$$\text{Var}[X] = E[X^2] = \sum_{x=-2}^2 \frac{x^2}{7} \binom{2}{|x|} = \frac{12}{7} .$$

♣

• **Esercizio 3.** Si consideri il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$. La v.a. X_1 è distribuita con legge Esponenziale ridotta, mentre la d.p. condizionata della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$ è data da

$$f_{X_2|X_1=x_1}(x_2) = x_1 e^{-x_1 x_2} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_2) .$$

Si determini la d.p. della v.a. X_2 .

♠ **Soluzione.** La d.p. della v.a. X_1 è data da

$$f_{X_1}(x_1) = e^{-x_1} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_1)$$

e quindi la d.p.c. del v.v.a. X è data da

$$f_X(x_1, x_2) = x_1 e^{-x_1 x_2 - x_1} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_1) \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_2) .$$

Dunque, la d.p. della v.a. X_2 è data da

$$f_{X_2}(x_2) = \int_0^\infty x_1 e^{-x_1 x_2 - x_1} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_2) dx_1 = \frac{1}{(x_1 + 1)^2} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_2) .$$

♣

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2, t_3) = e^{-\frac{1}{3}(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) - 2t_1 t_2 + 3it_3} ,$$

si determini la legge della v.a. trasformata somma $Y = X_1 + X_2 + X_3$.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.c.m. si ha

$$\varphi_Y(t) = \varphi_X(t, t, t) = e^{3it - 3t^2} .$$

Dunque, la v.a. trasformata somma Y è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(3, 6)$.

♣

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ tale che la f.p di X_n è data da

$$p_{X_n}(x) = \frac{n-1}{n} \mathbf{1}_{\{0\}}(x) + \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\{\sqrt{n}\}}(x) .$$

Considerata l'ulteriore successione di v.a. $(Y_n)_{n \geq 1}$ tale che $Y_n = X_n / \sqrt{n}$, si verifichi che $Y_n \xrightarrow{P} 0$.

♠ **Soluzione.** La f.c. della v.a. X_n è data da

$$\varphi_{X_n}(t) = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} e^{it\sqrt{n}} ,$$

da cui per le proprietà della f.c. si ottiene

$$\varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{X_n}(t/\sqrt{n}) = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} e^{it} .$$

Dunque, risulta

$$\lim_n \varphi_{Y_n}(t) = 1 ,$$

ovvero, dal momento che la precedente espressione fornisce la f.c. di una v.a. degenere concentrata sul valore 0, si ha $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$ per $n \rightarrow \infty$. Dal momento che la convergenza in distribuzione verso una v.a. degenere implica la convergenza in probabilità, si ha anche $Y_n \xrightarrow{P} 0$. ♣

• **Esercizio 6.** Sia dato il moto Browniano $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ ed il p.a. $M = (M_t)_{t \in [0, T]}$ tale che $M_t = \frac{1}{3} B_t^3 - t B_t$. Calcolando il differenziale stocastico di M , si verifichi che questo p.a. è una martingala.

♠ **Soluzione.** Dalla Formula ridotta di Itô con $dX_t = dB_t$ e $g(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - xy$, si ha

$$dM_t = dg(B_t, t) = (B_t^2 - t) dB_t.$$

Dunque, M è un processo di Itô con $\alpha = (\alpha_t)_{t \in [0, T]}$ e $\beta = (\beta_t)_{t \in [0, T]}$ dove $\alpha_t = 0$ e $\beta_t = B_t^2 - t$, ovvero è una martingala dal momento che il p.a. α è identicamente nullo, mentre $\beta \in \mathcal{M}_T^2$ essendo

$$\mathbb{E}[\int_0^T (B_t^2 - t)^2 dt] = \int_0^T \mathbb{E}[(B_t^2 - t)^2] dt = \int_0^T 2t^2 dt = \frac{2T^3}{3} < \infty. \quad \clubsuit$$

Esame del 22 Settembre 2025

• **Esercizio 1.** Si consideri l'esperimento aleatorio che consiste nel lanciare un dado equilibrato 8 volte in modo indipendente. Si determini la probabilità di ottenere almeno una volta la faccia contrassegnata da 6 punti.

♠ **Soluzione.** Se la v.a. X rappresenta il numero di volte in cui si è ottenuta la faccia contrassegnata da 6 punti, allora X è distribuita con legge Binomiale $\mathcal{B}(8, \frac{1}{6})$. La probabilità richiesta è data da

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 \simeq 0.7674. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 2.** Data la v.a. mista X con f.r.

$$F_X(x) = \frac{x}{3} \mathbf{1}_{[0, 1[}(x) + \mathbf{1}_{[1, \infty[}(x),$$

si determini $\mathbb{E}[X]$.

♠ **Soluzione.** La f.r. F_X può essere scritta come

$$F_X(x) = \frac{2}{3} F_d(x) + \frac{1}{3} F_{ac}(x),$$

dove

$$F_d(x) = \mathbf{1}_{[1, \infty[}(x), F_{ac}(x) = x \mathbf{1}_{[0, 1[}(x) + \mathbf{1}_{[1, \infty[}(x).$$

Dunque, si ha

$$\mathbb{E}[X] = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \int_0^1 x dx = \frac{5}{6}. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = 4x_2 \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x_1) \mathbf{1}_{[0, e^{-x_1}]}(x_2),$$

si verifichi che f_X è effettivamente una d.p.c.

♠ **Soluzione.** Si ha $f_X(x_1, x_2) \geq 0$ per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^{\infty} \int_0^{e^{-x_1}} 4x_2 dx_1 dx_2 = \int_0^{\infty} 2e^{-2x_1} dx_1 = 1.$$

Quindi, f_X è una d.p.c. ♣

• **Esercizio 4.** Dato il v.v.a. discreto $X = (X_1, X_2)^T$ con f.g.p.

$$G_X(t_1, t_2, t_3) = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5} t_1 + \frac{2}{5} t_2 \right)^{10},$$

si determini la legge della v.a. trasformata $Y = X_1 + X_2$.

♠ **Soluzione.** Dal momento che

$$G_Y(t) = G_X(t, t) = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} t \right)^{10},$$

la v.a. Y è distribuito con legge Binomiale di parametri $n = 10$ e $p = \frac{3}{5}$. ♣

• **Esercizio 5.** Si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n \geq 2}$ definite sullo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tale che la v.a. X_n ammette f.d. data da

$$f_{X_n}(x) = \frac{n}{2} \mathbf{1}_{]1-1/n, 1+1/n[}(x).$$

Si verifichi che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$E[(X_n - 1)^2] = \int_{1-1/n}^{1+1/n} (x - 1)^2 \frac{n}{2} dx = \frac{1}{3n^2}.$$

Dal momento che

$$\lim_n E[(X_n - 1)^2] = \lim_n \frac{1}{3n^2} = 0,$$

si ha la condizione sufficiente per la convergenza in probabilità ad una v.a. degenere, ovvero $X_n \xrightarrow{P} 1$.

La convergenza in probabilità implica la convergenza in distribuzione e dunque si ha $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$. ♣

• **Esercizio 6.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{[0, T]}$, si determini l'espressione di $d(t^2 B_t)$.

♠ **Soluzione.** Applicando la formula semplificata di integrazione stocastica per parti, ovvero

$$d(h(t)g(B_t)) = h'(t)g(B_t) dt + h(t)g'(B_t) dB_t + \frac{1}{2} h(t)g''(B_t) dt,$$

con $h(t) = t^2$ e $g(x) = x$, si ha

$$d(t^2 B_t) = 2t B_t dt + t^2 dB_t. \quad \clubsuit$$

Esame del 2 Febbraio 2026

• **Esercizio 1.** Una sperimentazione clinica ha verificato che un vaccino è efficace contro un primo virus con probabilità 0.55 e contro un secondo il virus con probabilità 0.65. Inoltre, il vaccino si è

dimostrato efficace contro almeno uno dei due virus con probabilità 0.80. Si determini la probabilità che il vaccino sia efficace contro entrambi i virus.

♠ **Soluzione.** Si assuma che E_1 rappresenti l'evento che il vaccino sia efficace contro il primo virus e che E_2 rappresenti l'evento che il vaccino sia efficace contro il secondo virus. Dunque, risulta $P(E_1) = 0.55$, $P(E_2) = 0.65$ e $P(E_1 \cup E_2) = 0.80$. La probabilità richiesta è data da

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2) = 0.40 . \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 2.** Un dado bilanciato viene lanciato 10 volte in modo indipendente. Si determini la probabilità che nei 10 lanci si verifichi 2 volte la faccia con un punto, 1 volta la faccia con due punti, 3 volte la faccia con tre punti, 1 volta la faccia con quattro punti, 2 volte la faccia con cinque punti, 1 volta la faccia con sei punti.

♠ **Soluzione.** Se la v.a. X_k rappresenta il numero di volte che si verifica la faccia con k punti, si consideri il v.v.a. $X = (X_1, \dots, X_6)^T$. Dunque, il v.v.a. X è distribuito con legge Multinomiale di parametri 10 e $(\frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{6})^T$. Se p_X rappresenta la f.p.c. del v.v.a. X , la probabilità richiesta è data da

$$p_X(2, 1, 3, 1, 2, 1) = \binom{10}{2 \ 1 \ 3 \ 1 \ 2 \ 1} \left(\frac{1}{6}\right)^{10} = \frac{10!}{2!1!3!1!2!1!6^{10}} = \frac{175}{69984} \simeq 0.0025 . \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{2}{(1 + x_1 + x_2)^3} \mathbf{1}_{]0, \infty[\times]0, \infty[}(x_1, x_2) ,$$

si determini il valore atteso condizionato $E[X_2 \mid X_1 = x_1]$.

♠ **Soluzione.** La d.p. della v.a. X_1 è data da

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^\infty \frac{2}{(1 + x_1 + x_2)^3} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_1) dx_2 = \frac{1}{(1 + x_1)^2} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x_1) .$$

Dalla definizione di valore atteso della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$, per $x_1 \in]0, \infty[$ si ha

$$E[X_2 \mid X_1 = x_1] = \int_0^\infty x_2 \frac{2(1 + x_1)^2}{(1 + x_1 + x_2)^3} dx_2 = 1 + x_1 . \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 4.** Si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ tale che la v.a. X_n possiede f.r. data da

$$F_{X_n}(x) = \frac{\lfloor nx^2 \rfloor}{n} \mathbf{1}_{]0, 1[}(x) + \mathbf{1}_{[1, \infty[}(x) ,$$

dove $\lfloor x \rfloor$ denota il più grande numero intero minore o uguale a x . Tenendo presente la definizione di convergenza in legge, si determini la legge della v.a. X , tale che $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ per $n \rightarrow \infty$.

♠ **Soluzione.** Si osservi che per ogni $x \in]-\infty, 0]$ si ha $\lim_n F_{X_n}(x) = 0$ e per ogni $x \in [1, \infty[$ si ha $\lim_n F_{X_n}(x) = 1$. Inoltre, risulta $0 \leq nx^2 - \lfloor nx^2 \rfloor < 1$, da cui

$$0 \leq x^2 - \frac{\lfloor nx^2 \rfloor}{n} < \frac{1}{n}$$

e per ogni $x \in]0, 1[$ si ha

$$\lim_n F_{X_n}(x) = \lim_n \frac{\lfloor nx^2 \rfloor}{n} = x^2 .$$

Dunque, si ottiene infine che

$$F_X(x) = x^2 \mathbf{1}_{]0,1[}(x) + \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x),$$

ovvero la v.a. X è distribuita con legge Beta $\mathcal{BE}(0, 1, 2, 1)$. ♣

• **Esercizio 5.** Dato il v.v.a. $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ che ammette la seguente f.c.m.

$$\varphi_X(t_1, t_2, t_3) = e^{-4t_1^2 - 4t_2^2 - t_3^2 - 2t_1 t_2 - it_1},$$

si determini la legge della v.a. trasformata somma $Y = X_1 + X_2 + X_3$.

♠ **Soluzione.** Per le proprietà della f.c.m. si ha

$$\varphi_Y(t) = \varphi_X(t, t, t) = e^{-it - 11t^2}.$$

Dunque, la v.a. trasformata Y è distribuita con legge Normale $\mathcal{N}(-1, 22)$. ♣

• **Esercizio 6.** Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = \sin(t) dt + 2 dB_t$$

con condizione iniziale $X_0 = 0$ q.c. e se ne determini la soluzione.

♠ **Soluzione.** Dalla definizione di processo di Itô si ha

$$X_t = \int_0^t \sin(s) ds + \int_0^t 2 dB_s = -\cos(t) + 2 B_t. \quad \clubsuit$$

Prova intermedia del 27 Aprile 2026

• **Esercizio 1.** Un'urna contiene cinque palline rosse e quindici palline nere. Una pallina viene estratta casualmente e ne viene osservato il colore. Successivamente la pallina estratta viene di nuovo inserita nell'urna insieme a cinque palline dello stesso colore. Infine, una pallina viene estratta dall'urna con la nuova composizione di palline. Si determini la probabilità che questa pallina sia rossa.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento relativo all'osservare una pallina rossa alla prima estrazione, mentre sia E l'evento relativo all'osservare una pallina rossa alla seconda estrazione. Si ha $P(E_1) = \frac{1}{4}$ e quindi $P(E_1^c) = \frac{3}{4}$. Inoltre, $P(E | E_1) = \frac{2}{5}$ e $P(E | E_1^c) = \frac{1}{5}$. Dal momento che gli eventi E_1 e E_1^c costituiscono una partizione dello spazio fondamentale, applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E | E_1)P(E_1) + P(E | E_1^c)P(E_1^c) = \frac{1}{4}. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 2.** Data la v.a. assolutamente continua X con f.r.

$$F_X(x) = \frac{3}{4}(x^2 - x^3/3) \mathbf{1}_{]0,2[}(x) + \mathbf{1}_{[2,\infty[}(x),$$

si verifichi che effettivamente F_X è una f.r. e si calcoli $E[X]$.

♠ **Soluzione.** La f.r. F_X è assolutamente continua dal momento che $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$, dove la versione della d.p. può essere scelta come

$$f_X(x) = \frac{3}{4}(2x - x^2) \mathbf{1}_{]0,2[}(x).$$

In effetti, F_X è una f.r. dal momento che $0 \leq F_X(x) \leq 1$, e $\frac{d}{dx}F_X(x) \geq 0$ in quanto $2x - x^2 \geq 0$ per $x \in]0, 2[$. Inoltre, risulta

$$E[X] = \int_0^\infty x \frac{3}{4} (2x - x^2) dx = 1. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)},$$

si determini la d.p.c. del v.v.a. trasformato $Y = (Y_1, Y_2)^T = (\frac{X_1+X_2}{2}, \frac{X_1-X_2}{2})^T$.

♠ **Soluzione.** Si ha $Y = (Y_1, Y_2)^T = g(X)$, dove g è dato dal diffeomorfismo $g(x) = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1-x_2}{2})^T$. Dal momento che $g^{-1}(y) = (y_1 + y_2, y_1 - y_2)^T$, allora si ha

$$|J(g^{-1}(y))| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right| = 2.$$

Dunque, si ottiene

$$f_Y(y_1, y_2) = \frac{1}{\pi} e^{-(y_1^2 + y_2^2)}. \quad \clubsuit$$

Esame del 22 Giugno 2026

• **Esercizio 1.** Un test ematico rivela correttamente una patologia con probabilità pari a 0.95. La proporzione di persone che soffre di questa patologia in una certa popolazione è pari a 0.01. Se una persona scelta casualmente effettua il test, si determini la probabilità che il test sia positivo alla patologia.

♠ **Soluzione.** Si indichi con E_1 l'evento relativo all'osservare una persona che soffre della patologia, mentre sia E l'evento relativo alla positività del test. Si ha $P(E_1) = 0.01$ e quindi $P(E_1^c) = 0.99$. Inoltre, $P(E | E_1) = 0.95$ e $P(E | E_1^c) = 0.05$. Dal momento che gli eventi E_1 e E_1^c costituiscono una partizione dello spazio fondamentale, applicando la Legge delle Probabilità Totali si ottiene

$$P(E) = P(E | E_1)P(E_1) + P(E | E_1^c)P(E_1^c) = 0.059. \quad \clubsuit$$

• **Esercizio 2.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = \mathbf{1}_{[0,1] \times [0,1]}(x_1, x_2),$$

si determini la varianza della v.a. $Y = X_1^3 X_2^2$.

♠ **Soluzione.** Dal momento che $f_X(x_1, x_2) = f_X(x_1)f_X(x_2)$, le v.a. X_1 e X_2 sono indipendenti e distribuite con la stessa legge Uniforme $\mathcal{BE}(0, 1, 1, 1)$. Inoltre, per $r \in \mathbb{N}$ si ha

$$E[X_1^r] = E[X_2^r] = \frac{1}{r+1},$$

da cui

$$E[Y] = E[X_1^3]E[X_2^2] = \frac{1}{12},$$

e quindi

$$\text{Var}[Y] = E[X_1^6]E[X_2^4] - E[Y]^2 = \frac{109}{5040} .$$

♣

• **Esercizio 3.** Dato il v.v.a. assolutamente continuo $X = (X_1, X_2)^T$ che ammette la seguente d.p.c.

$$f_X(x_1, x_2) = 10x_1^2 x_2 \mathbf{1}_{]0,1[}(x_1) \mathbf{1}_{]0,x_1[}(x_2) ,$$

si determini il valore atteso condizionato $E[X_2 \mid X_1 = x_1]$.

♠ **Soluzione.** La d.p. della v.a. X_1 è data da

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^{x_1} 10x_1^2 x_2 \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x_1) dx_2 = 5x_1^4 \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x_1) .$$

Dalla definizione di valore atteso della v.a. X_2 all'evento $\{X_1 = x_1\}$, per $x_1 \in]0, 1[$ si ha

$$E[X_2 \mid X_1 = x_1] = \int_0^{x_1} x_2 \frac{10x_1^2 x_2}{5x_1^4} dx_2 = \frac{2}{3} x_1 .$$

♣

• **Esercizio 4.** Si consideri la successione di v.a. indipendenti $(X_n)_{n \geq 1}$ tale che X_n è una v.a. discreta con f.p. data da

$$p_{X_n}(x) = \frac{n^2 - 1}{n^2} \mathbf{1}_{\{0\}}(x) + \frac{1}{n^2} \mathbf{1}_{\{e^n\}}(x) .$$

Si verifichi che $X_n \xrightarrow{P} 0$ e $X_n \xrightarrow{q.c.} 0$ per $n \rightarrow \infty$. Si verifichi anche che X_n non converge in media quadratica a 0.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$\lim_n P(|X_n| > \varepsilon) = \lim_n \frac{1}{n^2} = 0 ,$$

ovvero $X_n \xrightarrow{P} 0$ per $n \rightarrow \infty$. Inoltre, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} < \infty ,$$

ovvero $X_n \xrightarrow{q.c.} 0$ per $n \rightarrow \infty$. Tuttavia, risulta

$$\lim_n E[X_n^2] = \lim_n \frac{e^{2n}}{n} = \infty ,$$

e dunque X_n non converge in media quadratica a 0.

♣

• **Esercizio 5.** Dato il moto Browniano $(B_t)_{t \in [0, \infty[}$, assumendo che $s \leq t$, si calcoli $E[B_s B_t^2]$.

♠ **Soluzione.** Si ha

$$E[B_s B_t^2] = E[B_s (B_t - B_s + B_s)^2] = E[B_s (B_t - B_s)^2 + 2B_s^2 (B_t - B_s) + B_s^3] .$$

Per le proprietà del moto Browniano, risulta

$$E[B_s B_t^2] = E[B_s]E[(B_t - B_s)^2] + 2E[B_s^2]E[B_t - B_s] + E[B_s^3] = 0 ,$$

dal momento che $E[B_s] = E[B_s^3] = 0$, $E[(B_t - B_s)^2] = t - s$ e $E[B_t - B_s] = 0$.

♣

• **Esercizio 6.** Sia dato il moto Browniano $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ ed il p.a. $M = (M_t)_{t \in [0, T]}$ tale che $M_t = e^{\frac{1}{2}t} \sin(B_t)$. Calcolando il differenziale stocastico di M , si verifichi che questo p.a. è una martingala.

♠ **Soluzione.** Dalla Formula ridotta di Itô con $dX_t = dB_t$ e $g(x, y) = e^{\frac{1}{2}y} \sin(x)$, si ha

$$dM_t = dg(B_t, t) = e^{\frac{1}{2}t} \cos(B_t) dB_t .$$

Dunque, M è un processo di Itô con $\alpha = (\alpha_t)_{t \in [0, T]}$ e $\beta = (\beta_t)_{t \in [0, T]}$ dove $\alpha_t = 0$ e $\beta_t = e^{\frac{1}{2}t} \cos(B_t)$, ovvero è una martingala dal momento che il p.a. α è identicamente nullo, mentre $\beta \in \mathcal{M}_T^2$ essendo

$$\mathbb{E}[\int_0^T e^{\frac{1}{2}t} \cos(B_t) dt] = \int_0^T \mathbb{E}[e^{\frac{1}{2}t} \cos(B_t)] dt \leq \int_0^T e^{\frac{1}{2}t} dt = 2(e^{\frac{1}{2}T} - 1) < \infty . \quad \clubsuit$$