Teoria dei giochi: esempi

Pietro, Camillo e il compito di gruppo

Pietro deve fare i compiti di scuola per domani. Ha 4 ore di tempo ($\overline{T} = 4$) che può decidere di dedicare allo studio o a giocare alla Playstation ($\overline{\mathrm{T}} = \mathrm{S} + \mathrm{P}$, dove P è il tempo passato alla playstation, S è il tempo di studio). Il voto (V) che prenderà è pari a V=5S (un'ora di studio *rende* 5 voti). Sostituendo il vincolo temporale nella funzione di produzione del voto, otteniamo la frontiera delle possibilità produttiva: V=20-5P. Le sue preferenze sono $U = VP$.

Possiamo facilmente ricavare la scelta ottima:

$\begin{cases} \frac{U_P}{U_V} = 5 \\ \mathrm{V} = 20 - 5\mathrm{P} \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} \frac{V}{P} = 5 \\ \mathrm{V} = 20 - 5\mathrm{P} \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} V = 5P \\ \mathrm{V} = 20 - 5\mathrm{P} \end{cases}$ sostituendo la prima nella seconda

$5P = 20 - 5P$ ➔ $P = \frac{20}{10} = 2$ e sostituendo nella prima $V = 4 * 2 = 10$

Se per ipotesi Pietro avesse solo la possibilità di scegliere fra due opzioni – o studiare 2 ore (giocando 2 ore alla play) o studiare 1 ora (giocando 3 ore alla play), non avremmo dovuto impostare il sistema, ci sarebbe bastato confrontare le utilità nei due casi. Pietro avrebbe scelto quella che gli garantiva la maggior utilità, o il maggiore payoff

P = 2	U(2,10) = 2*10=20
P = 3	U(3,5) = 3*5=15

La scelta ovviamente è identica a quella ottenuta in precedenza, perché U(2,10) > U(3,5)

Questa sarebbe stata la scelta di Pietro se il compito fosse stato individuale.

La professoressa, tuttavia, divide gli studenti in gruppi di due. Il lavoro sarà di gruppo. Gli studenti dovranno fare una parte del lavoro ciascuno e il voto finale, comune ad entrambi gli studenti, dipenderà dall'impegno di entrambi. Immaginiamo che Pietro sia in gruppo con Camillo e che questi sia in tutto e per tutto simile a lui: stessa funzione di utilità, stesso rendimento dello studio.

Ipotizziamo che i voti siano assegnati in questo modo:

- se entrambi lavorano 2 ore (giocano 2 ore alla play), il voto sarà 10
- se uno lavora 2 ore (2 alla play) e l'altro 1 ora (3 alla play) il voto sarà 7
- se entrambi lavorano 1 ora (3 alla play), il voto sarà 5

Quanto giocherà Pietro alla Play? Sempre 2 ore?

Non possiamo condurre l'analisi nello stesso modo di prima. Ora il voto che Pietro consegue, dipenderà da quello che sceglie lui, ma anche da quello che sceglie il suo compagno di gruppo Camillo. Fra Camillo e Pietro vi è interdipendenza strategica.

Dobbiamo usare la teoria dei giochi per capire quel che succede e analizzare le scelte di Pietro e Camillo.

Ciascuno ha due strategie e quindi vi saranno quattro esiti possibili con quattro diversi livelli di utilità.

Se $\mathrm{P_P}$ = $\mathrm{P_C}$ = 2 ➔ $\mathrm{U_P} = \mathrm{U_C} = 2 * 10 = 20$

Se $\mathrm{P_P}$ = 2 e $\mathrm{P_C}$ = 3 ➔ $\mathrm{U_P} = 2 * 7 = 14$ e $\mathrm{U_C} = 3 * 7 = 21$

Se $\mathrm{P_P}$ = 3 e $\mathrm{S_C}$ = 2 ➔ $\mathrm{U_P} = 3 * 7 = 21$ e $\mathrm{U_C} = 2 * 7 = 14$

Se $S_P = S_C = 3 \rightarrow U_P = U_C = 3 * 5 = 15$

Possiamo rappresentare questa situazione con una tabella a doppia entrata, in cui mettiamo nelle righe le due strategie di Pietro e nelle colonne le due strategie di Camillo. I quattro esiti possibili sono rappresentati dai quattro possibili incroci fra colonne e righe.

		Camillo	
		2	3
Pietro	2	20, 20	14, 21
	3	21, 14	15, 15

La nuova situazione di interdipendenza ha determinato la necessità di cambiare modello decisionale passando alla teoria dei giochi.

E' evidente che entrambi i giocatori hanno una strategia dominante, giocare 3 ore alla play e studiare un'ora sola e ottenere un misero 7 come voto.

L'equilibrio di Nash sarà appunto (3,3) che permette di ottenere un payoff di 15 per entrambi. In questo caso, il payoff altro non è che l'utilità associata con ciascuno del 4 esiti possibili del gioco.

Non solo quindi è cambiato il modello decisionale, ma è anche cambiata la decisione ottimale che ora è studiare 1 ora e giocare 3 ore alla play. Notate che abbiamo solo introdotto l'interdipendenza, mentre preferenze (utilità) e efficienza nello studio sono rimaste costanti.

Quale prezzo fissare per le birre?

Ci sono due bar (A e B) che possono far pagare un boccale di birra € 2, € 4, o € 5. Si può prevedere che 6000 birre al mese verranno richieste dai turisti, che scelgono uno dei due bar in modo casuale e 4000 birre al mese dalle persone del luogo che sceglieranno il bar con il prezzo più basso. I locali si dividerebbero equamente (50%) fra i due bar, se praticassero lo stesso prezzo.

Ovviamente la quantità venduta di birra da ciascun locale, dipende da quel che fa un barista ma anche da quello che fa l'altro barista. Quindi vi è interazione strategica.

a) Rappresentate il problema decisionale dei baristi sotto forma di un gioco simultaneo per la massimizzazione del fatturato del bar.
b) Verificate se esistono strategie dominate o dominanti.
c) Verificate se esiste un equilibrio di Nash

---

a)

I turisti si dividono casualmente (50%) e quindi qualsiasi sia il prezzo scelto, il fatturato che proviene dai turisti sarà pari a $FT_A = p_A 300$, dove p_A è il prezzo della birra praticato dal bar A (lo stesso vale nel caso del bar B: $FT_B = p_B 300$)

Il fatturato che proviene dalla gente del luogo (FL) sarà uguale a

$$\begin{cases} FL_A = p_A 400 \text{ se } p_A < p_B \\ FL_A = p_A 200 \text{ se } p_A = p_B \\ FL_A = 0 \qquad \text{ se } p_A > p_B \end{cases}$$

Il fatturato complessivo (FC) del bar A sarà uguale a:

$$\begin{cases} FC_A = p_A 700 \; se \; p_A < p_B \\ FC_A = p_A 500 \; se \; p_A = p_B \\ FC_A = p_A 300 \; se \; p_A > p_B \end{cases}$$

Il caso del bar B è perfettamente simmetrico.

Il gioco può essere rappresentato in forma normale (in migliaia di euro) come segue

		B		
		2	4	5
	2	10, 10	14, 12	14, 15
A	4	12, 14	20, 20	28, 15
	5	15, 14	15, 28	25, 25

b)

La strategia 2 (sia per A che per B) è dominata dalla strategia 3 (e 4), perché qualunque prezzo scelga l'altro barista permette di ottenere un payoff più basso. Non esistono strategie dominanti.

Un barista razionale non fisserà mai il prezzo a 2.

c) Applichiamo la procedura della funzione di risosta ottima

		B		
		2	4	5
	2	10, 10	14, 12	14, $\underline{15}$
A	4	12, 14	$\underline{20}$, $\underline{20}$	$\underline{28}$, 15
	5	$\underline{15}$, 14	15, $\underline{28}$	25, 25

Le risposte ottime dei due baristi sono rappresentate dai valori sottolineati. Ad esempio, la risposta ottima di A alla scelta di B di giocare 2, è scegliere 5 (che permette di ottenere 15, contro i 12 che otterrebbe se scegliesse 4 e 10 che otterrebbe se scegliesse 2) mentre la risposta ottima di B alla scelta di A di giocare 4 è scegliere 4 (che permette di ottenere 20, contro i 14 che otterrebbe se scegliesse 2 e 15 che otterrebbe se scegliesse 5). E così via.

Solo in un caso, un esito (una coppia di strategie) corrisponde alla BRF di entrambi i giocatori (4,4). Questo è l'equilibrio di Nash.

La guerra dei sessi #2.0

Aldo e Beatrice sono fidanzati e stanno programmando dove trascorrere la giornata di domenica. Beatrice vorrebbe andare a vedere la mostra di Van Gogh, mentre Aldo vorrebbe andare a vedere il raduno di moto d'epoca. Entrambi avrebbero piacere ad andare insieme.

Le loro utilità dipendono da due fattori

- se vanno al loro meta preferita hanno una utilità pari a p (0 se vanno altrove);
- se vanno insieme hanno un utilità pari a i (zero se vanno da soli).

L'utilità complessiva sarà la somma delle due

Il gioco quindi può essere rappresentato come segue

		B	
		VG	moto
	VG	i, p+i	0, 0
A	moto	p, p	(p+i), i

Trovate l'equilibrio/gli equilibri di Nash in tre casi:

a) modalità "*amore vero*" ➔ i > p, i = 3, p= 1

b) modalità "*ho bisogno dei miei spazi*" → $p > i$, $i = 1$, $p = 3$

c) modalità "*innamorato perso*" → $i_A > p_A$ e $p_B > i_B$, $i_A = 3$, $p_A = 1$ e $i_B = 1$, $p_B = 3$

Possiamo rappresentare le tre modalità come un gioco per la determinazione simultanea della scelta di come passare la giornata di domenica, rappresentato in forma normale come vedete di seguito.

a)

A \ B	VG	moto
VG	$\underline{3}, \underline{4}$	0, 0
moto	1, 1	$\underline{4}, \underline{3}$

b)

A \ B	VG	moto
VG	1, $\underline{3}$	0, 0
moto	$\underline{3}, \underline{3}$	$\underline{3}$, 1

c)

A \ B	VG	moto
VG	$\underline{3}, \underline{4}$	0, 0
moto	1, $\underline{3}$	$\underline{4}$, 1

a) Vi sono due equilibri di Nash (VG,VG) e (moto, moto) → i due innamorati andranno insieme, anche se non si può prevedere dove.

b) C'è un solo equilibrio di Nash (moto, VG) → ciascuno va dove vuole. Andare dove si preferisce è la strategia dominante per entrambi.

c) Si va dove vuole lei: l'equilibrio di Nash è (VG, VG). La strategia VG è la strategia dominante per B. A non ha strategie domanti, egli si adegua.