Esercitazione capitolo 3

Matteo si sta preparando agli esami di maturità: il voto che prenderà dipenderà da quante ore studierà.

La sua capacità di apprendimento è tale che la relazione fra voto e ore di studio è $R = g\,S$ => funzione di produzione del "voto" => lineare
produttività marginale $= g$ => costante

Mancano pochi mesi all'esame e il numero massimo di ore che M. può studiare $\bar{e} = T$

Quando non studia M. si gode il tempo libero $l = T - S$ e quindi $S = T - l$. Possiamo sostituire S nella fdP ottenendo:

$V = g(T - l)$ => frontiera del consumo possibile => VINCOLO DI MATTEO

$\boxed{g = \text{Costo opportunità del tempo libero}}$ i voti a cui M. deve rinunciare per un'ora di l in più

g = Saggio Marginale di trasformazione => inclinazione frontiera consumo possibile

La sua funzione di utilità è $U = l^{\alpha} V^{\beta}$ (l = tempo libero, V = voto)

OBIETTIVO DI MATTEO

Matteo è razionale => Max U soggetto al vincolo => l variabile decisionale

l'utilità è massima se => $\frac{dU}{dl} = 0$ sapendo che $R = g(T-l) \Rightarrow U = l^\alpha (gT - gl)^\beta$

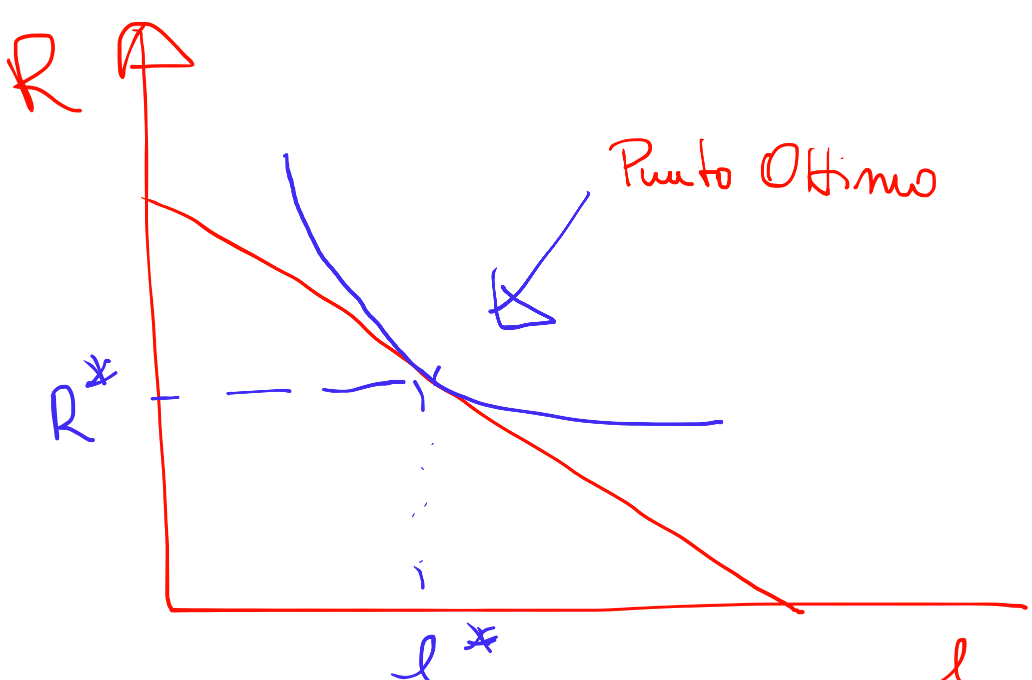
$\frac{dU}{dl} = \alpha l^{\alpha-1} R^\beta + l^\alpha \beta R^{\beta-1}(-g) = 0$ $\quad \frac{\alpha l^{\alpha-1} R^\beta}{\beta l^\alpha R^{\beta-1}} = g$ => FOC condizione del primo ordine

$U_l = \alpha l^{\alpha-1} R^\beta$ => Utilità marginale di l => derivata parziale di U rispetto a l

$U_R = \beta l^\alpha R^{\beta-1}$ => Utilità marginale di R => derivata parziale di U rispetto a R

$$\frac{U_l}{U_R} = \frac{\alpha l^{\alpha-1} R^\beta}{\beta l^\alpha R^{\beta-1}} = \frac{\alpha R}{\beta l} = MRS$$

Condizione per l'equilibrio $\boxed{\frac{U_l}{U_R} = g}$



Per trovare la scelta ottima dobbiamo mettere a sistema

$$\begin{cases} \frac{U_\ell}{U_R} = g \\ R = g(T-\ell) \end{cases}$$

$$U_\ell = \alpha \ell^{\alpha-1} R^{\beta} \; ; \; U_R = \beta \ell^{\alpha} R^{\beta-1} \Rightarrow \frac{U_\ell}{U_R} = \frac{\alpha R}{\beta \ell}$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha R}{\beta \ell} = g \Rightarrow \ell = \frac{\alpha}{\beta} \frac{R}{g} \\ R = g(T-\ell) \Rightarrow R = gT - \cancel{g} \frac{\alpha}{\beta \cancel{g}} R = \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) R = gT \Rightarrow \end{cases}$$

$$R = \frac{\beta}{\alpha+\beta} gT \Rightarrow$$

Se $\beta \uparrow$ $R \uparrow$ => aumenta il peso relativo del voto nell'utilità
Se $g \uparrow$ $R \uparrow$ => un'ora di studio è più produttiva
Se $T \uparrow$ $R \uparrow$ => Matteo ha più tempo per studiare

$$\ell = \frac{\alpha}{\cancel{\beta} \cancel{g}} \frac{\cancel{\beta}}{\alpha+\beta} \cancel{g} T = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} T$$

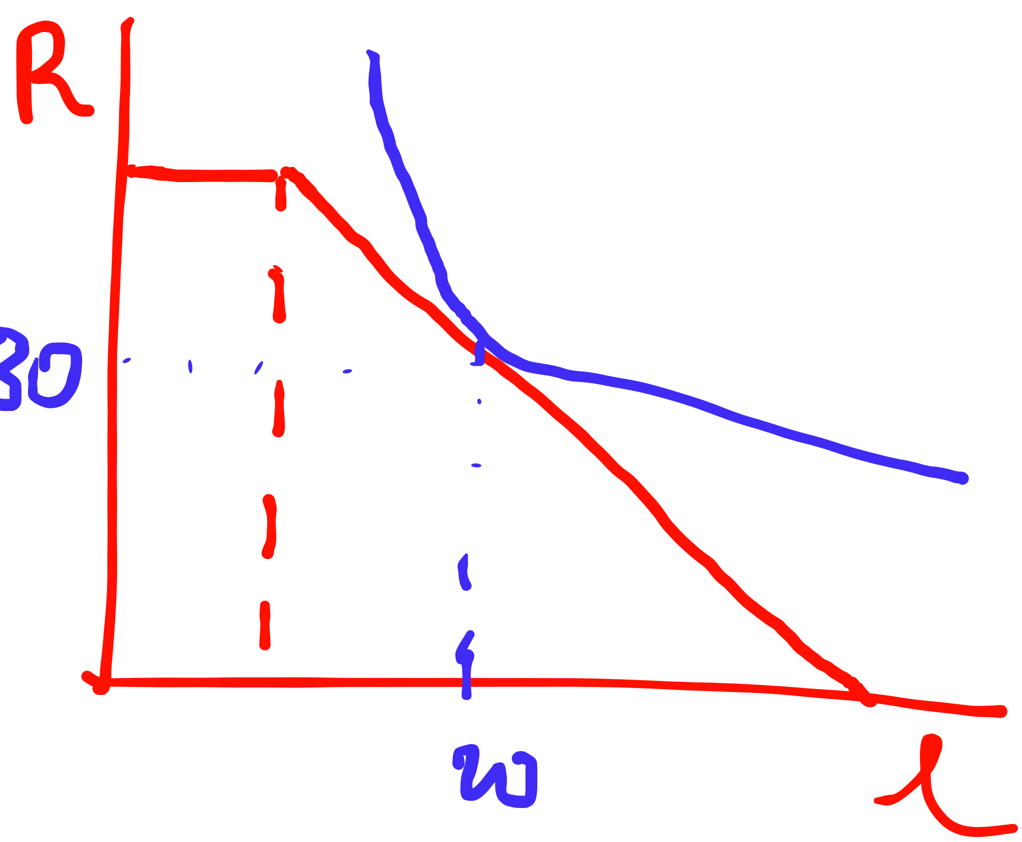
Se $T \uparrow$ anche $\ell \uparrow$
Se $\alpha \uparrow$ $\ell \uparrow$

ℓ non dipende da g: Effetto reddito ed effetto sostituzione si eliminano a vicenda

Se $g = \frac{1}{3}$; $T = 360$; $\alpha = 1$; $\beta = 2$ => Che voto prenderà M ?

$$\begin{cases} \dfrac{V_l}{V_R} = \dfrac{R}{2l} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow l = \dfrac{3}{2} R \longrightarrow \text{Ottimo rapporto fra } R \text{ e } l \\ \\ R = \dfrac{1}{3}\left(360 - \dfrac{3}{2}R\right) = 120 - \dfrac{1}{2} R \Rightarrow \dfrac{3}{2} R = 120 \Rightarrow R = \dfrac{\cancelto{40}{120}}{\cancel{3}} 2 = 80 \end{cases}$$

$$l = \frac{3}{\cancel{2}} \cancelto{40}{80} = 120$$



60 1

Dimostrate che se $g = \frac{1}{3}$ $\alpha = \beta = 1$ allora $l^* = 180$ e $R = 60$

se $g = \frac{1}{2}$ $\alpha = \beta = 1$ allora $l = 180$ e $R = 90$

Se $g = \frac{3}{4}$ e $\alpha = 1, \beta = 1$ allora $l = 240$ e $R = 90$