Scelta fra lavoro e tempo libero con un po' di matematica e qualche esercizio

Appendice al capitolo 3

Mario

Mario frequenta la facoltà di Biologia dell'Università di Vattelapesca. Vuole avere un buon voto di laurea, ma anche passare del tempo a divertirsi. Egli dovrà decidere quanti giorni all'anno studiare e quanti, invece, riposarsi e divertirsi.

Obiettivo (quel che vuole fare) ➔ ottenere il maggior benessere possibile, il maggior livello di utilità (che dipende dal voto e dal divertimento);

Vincolo (quel che può fare) ➔ rispettare la sua *funzione di produzione* di voti che gli dice come può trasformare i giorni di studio in voti di laurea

Ipotesi:

a) fisiologicamente è possibile studiare al massimo 275 giorni all'anno;

b) i giorni di studio sono perfettamente divisibili;

c) prendiamo in considerazione un solo anno di studio (la scelta che farà quell'anno è identica a quella degli altri anni).

Vincolo

Per semplificare le cose, immaginiamo che si possa esprimere la funzione di produzione del voto di laurea come una funzione lineare del tempo impiegato a studiare, il voto di laurea dipenda solo da quanti giorni M. passi a studiare. La funzione di produzione dello studio sarà

$$V = cG$$

dove V è il voto di laure in 110esimi, G è il numero di giorni di studio, c è una costante.

Rispetto alla funzione descritta nel LEIBNIZ 2, è una forma funzionale più semplice, una funzione lineare.

Il prodotto medio cosi come definito nel testo e nel Leibniz sarà:

$$AP = \frac{V}{G} = c$$

Il che vuol dire che in media un giorno di studio lo porta a conseguire c voti in più. c è il voto per giorni di studio.

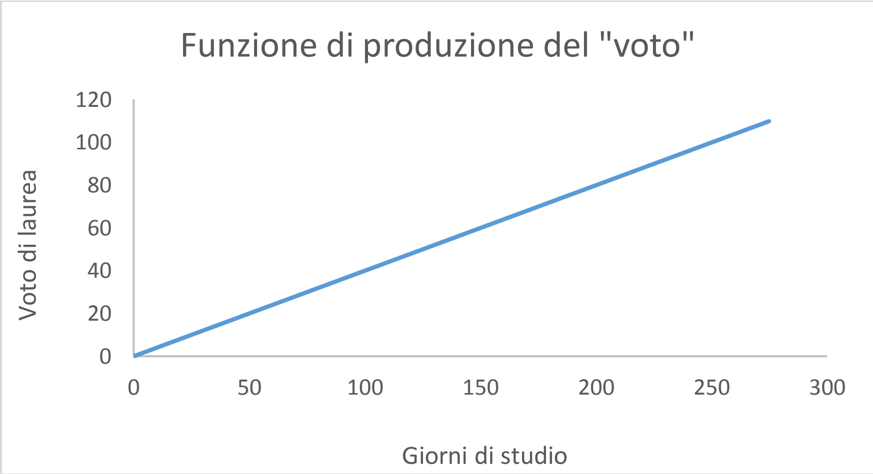
Visto che il prodotto marginale è la derivata della funzione di produzione $\frac{dV}{dG}$, il prodotto marginale nel caso della funzione di produzione di M. sarà

$$MP = \frac{dV}{dG} = c$$

Il che vuol dire che un giorno in più di studio lo porta a conseguire c voti in più.

Nel caso della funzione di produzione lineare (la più semplice che ci sia) prodotto medio e prodotto marginale coincidono e sono uguali al coefficiente angolare della retta.

Come vedete, se la funzione di produzione è lineare, la produttività marginale è costante, un giorno di studio frutta sempre lo stesso voto, sia il primo giorno che il ventesimo. Questa è un'ipotesi meno realistica di quella adottata nel Leibnitz e nel testo. Nella realtà, le prima ore di studio sono più produttive delle ultime. Il fatto di considerare giorni e non ore, rende tuttavia un po' meno irrealistica l'ipotesi. La ragione per la quale scegliamo questa forma funzionale, tuttavia, è da ascriversi totalmente alla sua semplicità matematica.



Nella figura vediamo la FdP di M. Essa è la rappresentazione grafica della seguente funzione analitica

$$V = 0.4\ G$$

100 giorni di studio all'anno "producono" 40 punti, ne occorrono 275 per ottener il massimo punteggio

Per quanto uno studente sia ligio allo studio, il numero massimo di giorni passati a studiare $(\overline{G})$ è 275 (peraltro non avrebbe senso studiare di più visto che 110 è il punteggio massimo). Quindi

$$G = \bar{G} - D$$

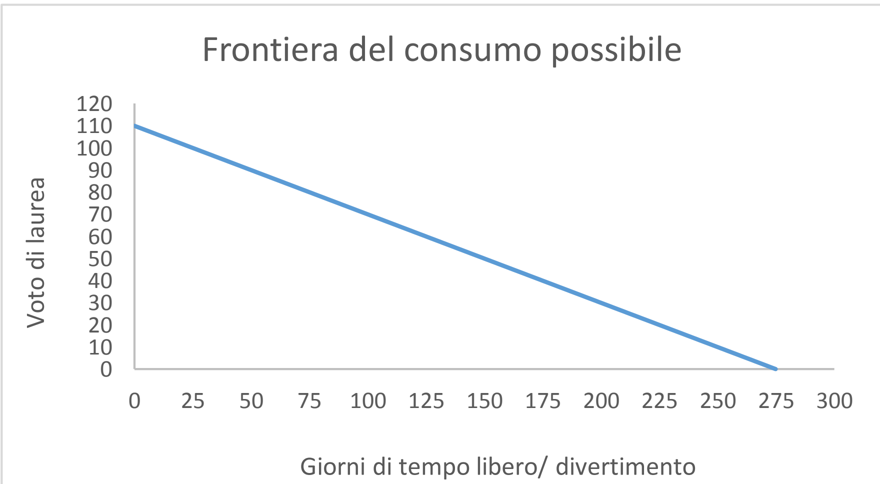
Sostituendo questo valore nella funzione di produzione, otteniamo

$$V = 0.4(275 - D) = 110 - 0.4D$$

dove D sono i giorni di divertimento, di vacanza dallo studio che il nostro eroe si concede all'anno.

Questa è la funzione del consumo possibile per A. E' anche la modellizzazione analitica del vincolo di M. Ci dice quale combinazione dei due "beni" (voto di laurea e vacanza/divertimento) egli possa "consumare" date la sua funzione di produzione del voto, ovvero la sua capacità di studio.

La rappresentazione grafica della funzione (la rappresentazione grafica del vincolo di M.) sarà:



Mentre prima il coefficiente *c* era interpretabile come la produttività marginale o quella media, adesso non sarà altro che il **costo opportunità** del giorno di vacanza in termini di voto. Un giorno di vacanza *costa* 0.4 voti a Mario che può scambiare, ad esempio, 10 giorni di vacanza in più con 4 voti in più alla laurea.

Il saggio marginale di trasformazione mostra come sia possibile per M. "trasformare" giorni di vacanza in voti di laurea, il saggio al quale può scambiare fra loro i suoi due obiettivi (esprime il trade-off che M deve affrontare)

$$\boldsymbol{MRT} = -\frac{dV}{dD} = -(-c) = 0.4$$

Quale punto sulla curva del consumo possibile– ovvero quale combinazione di voto e giorni di divertimento - M. sceglierà, dipende dalle sue preferenze, da quanto relativamente gli piace il voto e la vacanza.

Obiettivo

La funzione di utilità è una funzione Cobb-Douglas.

$$U = D^{\alpha}V^{\beta}$$

dove α e β sono i pesi che Mario assegna ai due argomenti della funzione di utilità (ci dicono quanto essi siano relativamente importanti per lui).

Come si è visto nel testo e nel Leibniz 3,

1) le funzioni di utilità parziali sono

$U^D(V = \bar{V}) = D^{\alpha}\bar{V}^{\beta}$ ➔ il benessere che crea la variazione di D quando V rimane costante a $\bar{V}$

$U^V(D = \bar{D}) = \bar{D}^{\alpha}V^{\beta}$ ➔ il benessere che crea la variazione di V quando D rimane costante a $\bar{D}$

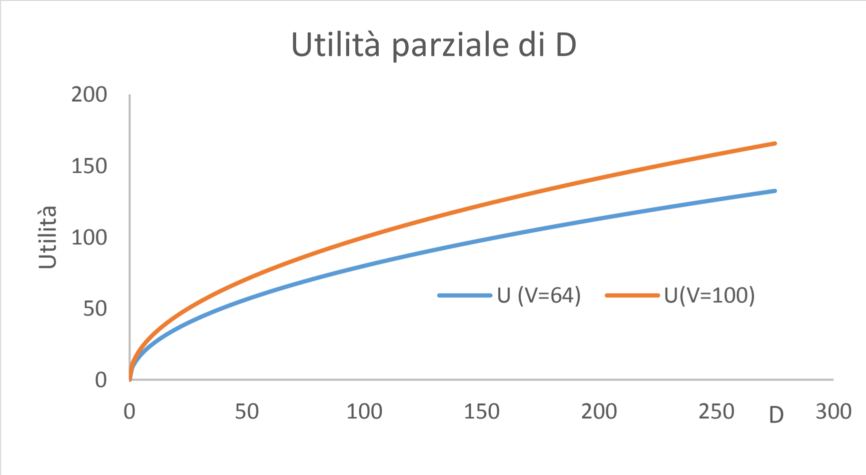
2) le utilità marginali sono:

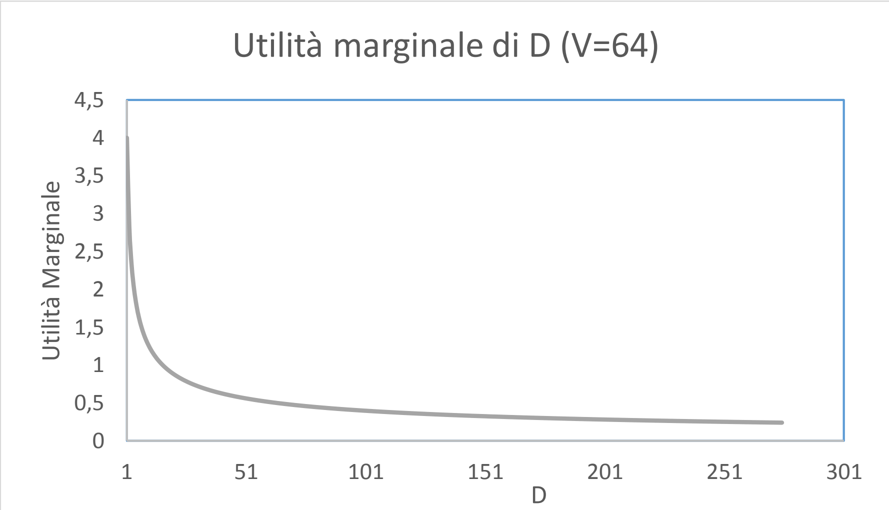
$U_D = \frac{\partial U}{\partial D} = \alpha D^{\alpha-1}V^{\beta} = \frac{\alpha U}{D}$ ➔ mostra l'effetto che un incremento sufficientemente piccolo di D ha sulla utilità di Mario. Risponde alla domanda: se D aumenta – rimanendo costante V - di quanto varia l'utilità di M?

$U_V = \frac{\partial U}{\partial V} = \beta D^{\alpha}V^{\beta-1} = \frac{\alpha U}{V}$ ➔ mostra l'effetto che un incremento sufficientemente piccolo di V ha sulla utilità di Mario. Risponde alla domanda: se il voto aumenta – rimanendo costante D - di quanto varia l'utilità di M?

Come è evidente e come suggerisce la teoria sono entrambe positive, M. è più felice se ha un voto più alto a parità di giorni di vacanza o se ha più giorni di vacanza a parità di voti.

Se $\alpha = \beta = 0.5\ e\ \ V = 64\ (100)$ le funzioni di utilità parziale e di utilità marginale per D sono proposte nelle figure che seguono (dato che $\alpha = \beta$ quelle di V saranno simili).





L'utilità marginale è decrescente. Infatti se deriviamo l'utilità marginale di D otteniamo

$\frac{dU_D}{dD} = \frac{\partial^2 U}{\partial D^2} = (\alpha - 1)D^{\alpha-2}V^{\beta}$ ➔ negativa se $\alpha < 1$.

L'utilità marginale del divertimento è positiva ma decrescente: il che vuol dire che incrementi successivi del divertimento aumentano sempre il benessere di M., ma questi incrementi sono via-via inferiori e diminuiscono all'aumentare di D.

Come possiamo rappresentare le preferenze di M. quando sia D che V variano? Graficamente occorrerebbe un disegno a tre dimensioni (U,D,V), che non è praticabile. Possiamo usare invece le **curve di indifferenza**.

Le curve indifferenza rappresentano l'insieme delle combinazioni di D e V che danno a M. la stessa utilità e che quindi egli giudica essere fra loro indifferenti.

Teoricamente avremo una diversa curva d'indifferenza per ogni livello di utilità, avremo quindi un numero infinito di curve. Possiamo allora rappresentare le preferenze di M. in uno spazio bidimensionale attraverso un insieme (una famiglia) di curve d'indifferenza, ciascuna che segnala un diverso livello di utilità.

In termini analitici

$\overline{U} = D^{\alpha}V^{\beta}$ ➔ equazione di una generica curva d'indifferenza. Restituisce tutti le coppie di D e V che garantiscono lo stesso livello di utilità $\overline{U}$.

Risolviamo per V

$V^\beta = \frac{\bar{U}}{D^\alpha}$ ➔ $V = \left(\frac{\bar{U}}{D^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} = \bar{U}^{\frac{1}{\beta}} D^{-\frac{\alpha}{\beta}}$ ➔ equazione di una generica curva d'indifferenza. Ci dice per ogni valore di D, quale sarà il valore di V che farà sì che il valore della utilità sia $\bar{U}$.

Se deriviamo la funzione della CdI, otteniamo $\frac{dV}{dD} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{\bar{U}^{\frac{1}{\beta}}}{D^{\frac{\alpha}{\beta}+1}}$. Se sostituiamo $\bar{U} = D^\alpha V^\beta$, otteniamo:

$$\frac{dV}{dD} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{(D^\alpha V^\beta)^{\frac{1}{\beta}}}{D^{\frac{\alpha}{\beta}+1}} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{D^{\frac{\alpha}{\beta}}V^{\frac{\beta}{\beta}}}{D^{\frac{\alpha}{\beta}+1}} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{D^{\frac{\alpha}{\beta}}V}{D^{\frac{\alpha}{\beta}+1}} = -\frac{\alpha V}{\beta D}$$ ➔ inclinazione curva di indifferenza = - **MRS** (tasso marginale di sostituzione)

Posiamo notare due cose

a) la CdI è inclinata negativamente (per tutti i valori di α e β positivi)

b) il MRS è uguale al rapporto fra le utilità marginali:

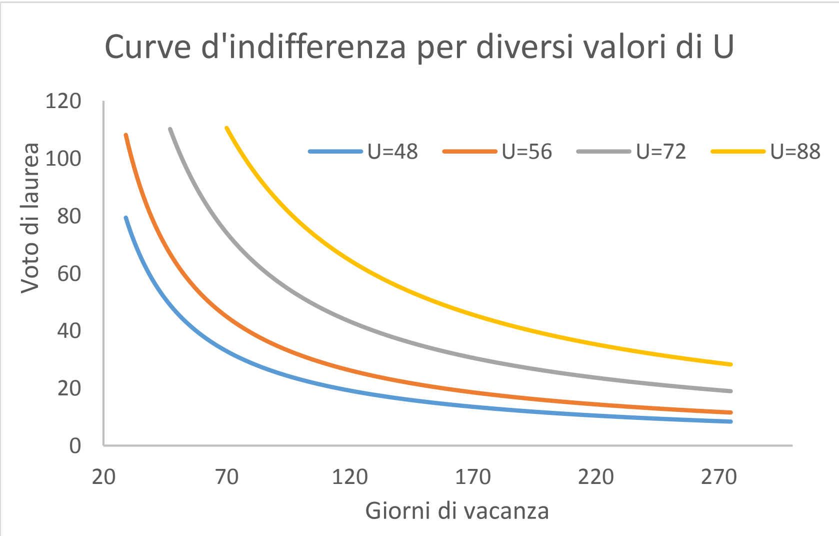
$$MRS = \frac{U_D}{U_V} = \frac{\alpha D^{\alpha-1}V^\beta}{\beta D^\alpha V^{\beta-1}} = \frac{\alpha V}{\beta D}$$

Nota ➔ $\text{saggio marginale di sostituzione (MRS)} = \frac{\text{utilità marginale del divertimento (D)}}{\text{utilità marginale del voto (V)}}$.

Questo è vero per qualsiasi forma funzionale l'utilità assuma.

Se $\alpha = \beta = 0.5$ ➔ $V = \frac{\bar{U}^2}{D}$ e $\frac{dV}{dD} = -\frac{\bar{U}^2}{D^2} = -\frac{DV}{D^2} = -\frac{V}{D}$

La figura che segue plotta quattro diverse curve d'indifferenza per diversi valori di $\bar{U}$ nell'ipotesi che $\alpha = \beta = 0.5$

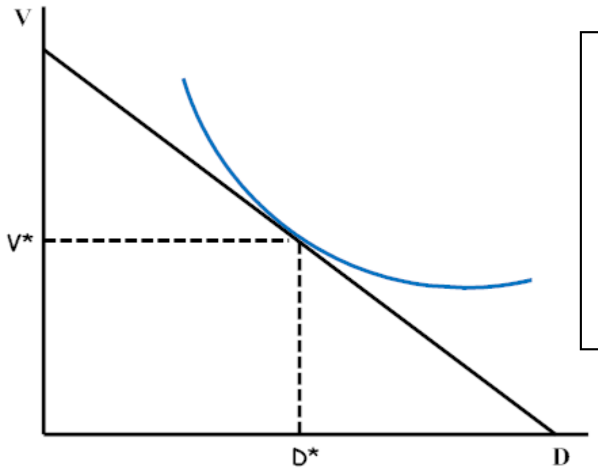


Famiglia di curve d'indifferenza.

Quando più ci si allontana dall'origine quanto maggiore è il livello di utilità

Problema dello studente

Per risolvere il problema di scelta dello studente dobbiamo mettere insieme obiettivo e vincolo. Graficamente, curve di indifferenza e frontiera del consumo possibile e raggiungere la più alta curva d'indifferenza dato il vincolo rappresentato dalla frontiera del consumo possibile, che sarà la curva d'indifferenza tangente alla frontiera.



Graficamente l'equilibrio è definito da due condizioni

a) essere sulla Frontiera Possibile (frontiera del consumo possibile) ➔ rispettare il vincolo

b) essere sulla più alta CdI ➔ ottenere la massima utilità

Equilibrio ➔ condizione di tangenza

MRS=MRT

Analiticamente

$Max\ U = D^{\alpha}V^{\beta}$ soggetto al vincolo che $V = c\bar{G} - cD$ sostituendo $Max\ U = D^{\alpha}(c\bar{G} - cD)^{\beta}$

Semplice problema di massimizzazione non vincolata.

Per trovare la condizione del primo ordine occorre imporre la derivata di U rispetto alla variabile che usiamo come variabile decisionale (D) uguale a zero. Per calcolare la derivata utilizziamo le regole di derivazione di una funzione implicita, insieme a quella di derivazione di un prodotto.

$\frac{dU}{dD} = \alpha D^{\alpha-1}(c\bar{G} - cD)^{\beta} + \beta D^{\alpha}(c\bar{G} - cD)^{\beta-1}(-c) = \alpha D^{\alpha-1}U^{\beta} - c\beta D^{\alpha}U^{\beta-1} = 0$ ➔ FOC

$\alpha D^{\alpha-1}V^{\beta} - \beta D^{\alpha}V^{\beta-1}c = 0$ ➔ $\alpha D^{\alpha-1}V^{\beta} = \beta D^{\alpha}V^{\beta-1}c$ ➔ $\frac{\alpha D^{\alpha-1}V^{\beta}}{\beta D^{\alpha}V^{\beta-1}} = c$

che diventa

$\frac{U_D}{U_V} = \frac{\alpha V}{\beta D} = c$ ➔ Condizione di ottimo ➔ mostra come (in che proporzione) uno studente razionale "consuma" i due beni.

Ovviamente è semplicemente la condizione di equilibrio già evidenziata nel testo, ovvero

MRS = MRT

Questa condizione (che equivale alla condizione b del modello grafico) ci dà tuttavia solo la proporzione con la quale lo studente studia e si diverte

$V = c\frac{\beta}{\alpha}D$. Per sapere quale sarà la scelta ottima dovremo metterla a sistema con la frontiera del consumo possibile o frontiera possibile (questa condizione equivale alla condizione a) del modello grafico)

Il sistema semplicemente ci assicura che entrambe le condizioni devono essere realizzate.

$\begin{cases} \frac{U_D}{U_V} = c \\ V = c\bar{G} - cD \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} \frac{\alpha V}{\beta D} = c \\ V = c\bar{G} - cD \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} V = c\frac{\beta}{\alpha}D \\ V = c\bar{G} - cD \end{cases}$ ➔ sostituendo la prima nella seconda

$c\frac{\beta}{\alpha}D = c\bar{G} - cD$ ➔ $c(\frac{\beta}{\alpha} + 1)D = c\bar{G}$ ➔ $c(\frac{\alpha+\beta}{\alpha})D = c\bar{G}$

$D^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\bar{G}$ ➔ ottima quantità di giorni di divertimento ➔ cresce al crescere del peso che lo studente dà al divertimento (α) e diminuisce al crescere del peso che dà al voto (β). Ovviamente dipende anche dalla dotazione iniziale di giorni $\bar{G}$. Non dipende da c

$V^* = c\frac{\beta}{\alpha}D$ ➔ $V^* = c\frac{\beta}{\alpha}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\bar{G}$ che diventa

$V^* = \frac{\beta}{\alpha+\beta}c\bar{G}$ ➔ ottima votazione ➔ cresce al crescere del peso che lo studente annette al voto (β) e diminuisce al crescere del peso che dà al divertimento (α). Ovviamente dipende anche dalla dotazione iniziale di giorni $\bar{G}$. Aumenta all'aumentare di c

Il barista e la fidanzata spagnola

La storia è quella raccontata a lezione. Mario lavora l'estate in un bar per pagarsi in viaggio in Spagna dove potrà riabbracciare la sua fidanzata Concita.

La funzione di utilità di Mario è

$$U = SM + a\,S$$

dove M sono i soldi che M. guadagna lavorando (che rappresentano tutti i beni che M. potrebbe acquistare) e S i giorni passati in Spagna con C. La funzione di utilità è una *quasi* Coob-Douglas e indica che M e S sono in parte complementari e in parte sostitutivi.

Se w è il salario giornaliero che M. percepisce e $\bar{E}$ sono i giorni complessivi dell'estate, i soldi che M. guadagna sono pari ai giorni che lavora moltiplicati per il salario giornaliero. Questi ultimi sono a loro volta uguali a tutti i giorni estivi meno quelli passati in Spagna. Il vincolo del barista sarà quindi

$$M = w(\bar{E} - S)$$

dove w è il costo opportunità di un giorno passato *tête-à-tête* con Concita, ovvero la quantità di denaro a cui M. deve rinunciare per passare un giorno in più con C.

La scelta ottima sarà la soluzione del sistema

$\begin{cases} \frac{U_S}{U_M} = w \\ M = w(\bar{E} - S) \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} \frac{M+a}{S} = w \\ M = w(\bar{E} - S) \end{cases}$ $\begin{cases} M = wS - a \\ M = w(\bar{E} - S) \end{cases}$ sostituendo la prima nella seconda otteniamo

$wS - a = w(\bar{E} - S)$ ➔ $S = \frac{w\bar{E}+a}{2w} = \frac{\bar{E}}{2} + \frac{a}{2w}$

Il numero di giorni che M. passa con C. dipende positivamente dai giorni complessivi dell'estate ($\bar{E}$), negativamente dal suo costo opportunità (se aumenta w, poco romanticamente M. preferirà lavorare un po' di più), e da a, ovvero da quanto M. tenga a C. Potremmo dire che quanto più la ama, tanto maggiore e a tanto più giorni passerà con C. *ceteris paribus.*

Esercizi numerici

Pasquale e Natalino

Pasquale e Natalino frequentano l'università e hanno le stesse capacità di studio riassunte nella funzione che trasforma G (giorni di studio) in V (voti di laurea) che vedete di seguito

V = 0.5 G

Entrambi possono al massimo studiare fino a 360 giorni in un anno.

Hanno invece diverse funzioni di utilità, La funzione di utilità di P. è

$U_P = D_P V_P$

mentre la funzione di utilità di N. è

$U_N = D^{1.5}{}_N V_N$

Dimostrate che Pasquale terminerà gli studi con una votazione superiore.

Risposta

Per risolvere il problema occorre impostare il sistema fra la FOC e la frontiera del consumo possibile.

$$\begin{cases} \frac{U_V}{U_D} = c \\ V = c\bar{G} - cD \end{cases}$$

Per P. questo significa (per semplicità elidiamo il pedice P)

$$\begin{cases} \frac{V}{D} = 0.5 \\ V = 180 - 0.5D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V = 0.5D \\ V = 180 - 0.5D \end{cases} \rightarrow 0.5D = 180 - 0.5D\ ;$$

$$D_P = \frac{180}{1} = 180;$$

$$V_P = 0.5 * 180 = 90$$

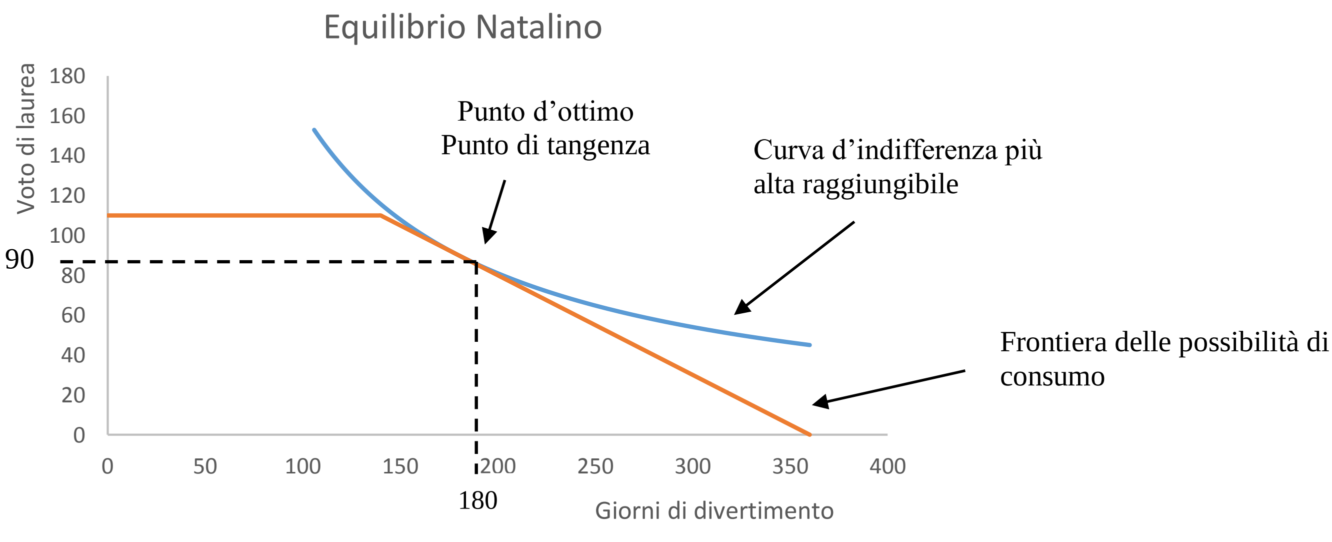
Per N. invece significa (per semplicità elidiamo il pedice N)

$$\begin{cases} \frac{1.5V}{D} = 0.5 \\ V = 180 - 0.5D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V = \frac{0.5}{1.5}D \\ V = 180 - 0.5D \end{cases} \rightarrow \frac{1}{3}D = 180 - \frac{1}{2}D\ ;$$

$$D_N = \frac{6}{5}180 = 216;$$

$$V_N = \frac{1}{3} * 216 = 72$$

Benché Natalino abbia le stesse “capacità” di Pasquale, otterrà un voto più basso perché rispetto a questi ama più divertirsi e quindi allocherà il proprio tempo più al divertimento che allo studio.



Altri esercizi

1) Utilizzando i dati precedenti, mostrate che se Pasquale trovasse un sistema di studio più efficiente e la sua funziona di produzione diventasse (tutto il resto rimanendo uguale)

V=0.75 G

allora otterrebbe un voto di laurea pari a 108.

Costanza

Costanza è una correttrice di bozze e lavora per una casa editrice che la paga 10 euro all'ora. Il massimo di ore di lavoro che può fare è 15 ore al giorno. Con quel che guadagna Costanza si compra, un generico bene di consumo che costa 0.5 euro al chilo. Ella quindi consuma solo 2 beni: tempo libero (t =15 – L dove L sono le ore in cui lavora) e l'unico bene di consumo che esiste (y).

La sua funzione di utilità è $U = t^{0.5}y$

a) Disegnate la frontiera delle possibilità di consumo di Costanza

b) Calcolate quante ore al giorno lavora Costanza

c) Se il salario pagato dalla casa editrice aumentasse a 15 euro l'ora, Costanza lavorerebbe di più o di meno?

d) Se aumentasse il prezzo del bene di consumo (da 0.5 a 1) cosa farebbe Costanza?

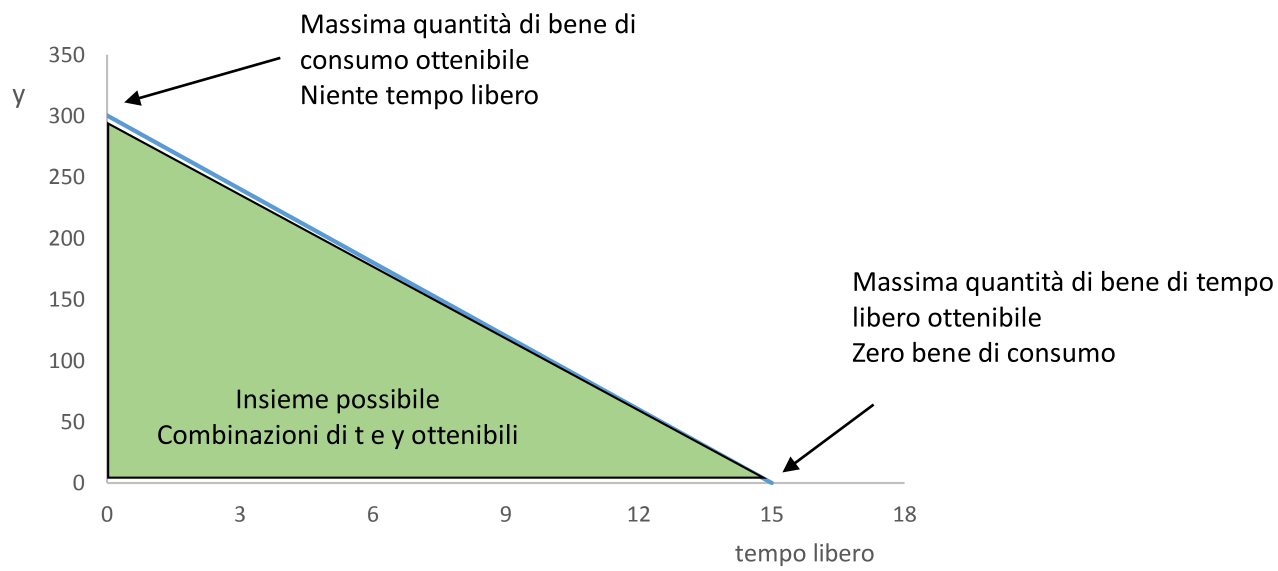
Risposte

2a) Occorre tener conto che Costanza non lavora per ottenere soldi (che non entrano direttamente nella sua funzione di utilità e quindi non creano benessere), ma per ottenere il bene di consumo. Un'ora di lavoro le porta 10 euro che dato il prezzo del bene di consumo (0.5) le permettono di acquistare 20 unità del bene di consumo. La sua funzione di produzione del bene di consumo tramite la correzione di bozze sarà

$y = \frac{10}{\frac{1}{2}}L = 20L$ ➔ un'ora di lavoro le permette di produrre 20 unità del bene di consumo.

L'equazione della frontiera delle possibilità di consumo sarà

$y = 20(15 - t) = 300 - 20t$



Il costo opportunità del tempo libero sarà pari a 20. Costanza può scambiare un'ora di tempo libero con 20 unità del bene di consumo.

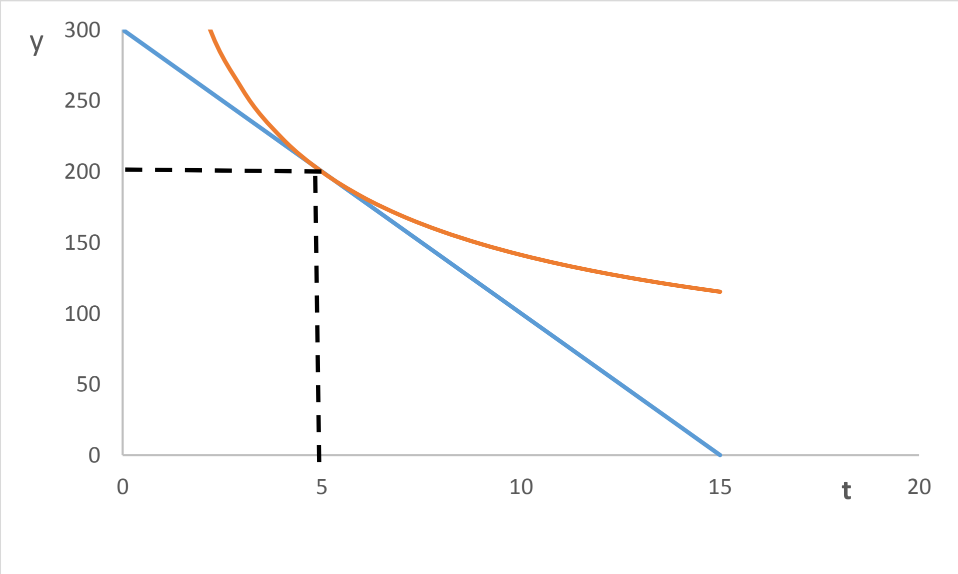
2b)

Come prima, la combinazione ottima si trova risolvendo il sistema:

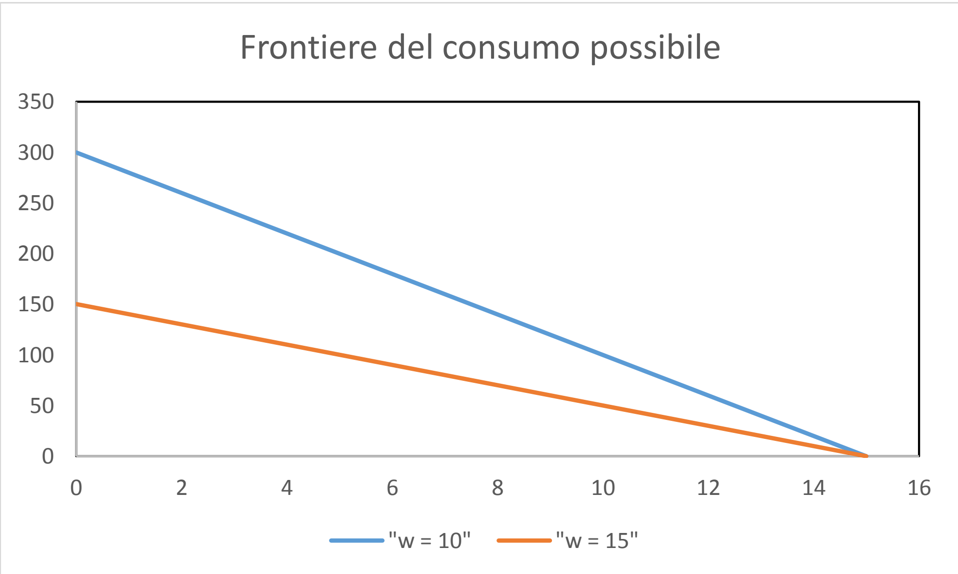
$\begin{cases} \frac{U_t}{U_y} = 20 \\ y = 20 * 15 - 20 * t \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} \frac{0.5y}{t} = 20 \\ y = 300 - 20\ t \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} y = \frac{20}{0.5} t \\ y = 300 - 20t \end{cases}$ sostituendo la prima nella seconda

$40\ t = 300 - 20\ t$ ➔ $t = \frac{300}{60} = 5$

$y = 300 - 20 * 5 = 200$



2c) Se il salario di Costanza aumentasse, allora frontiera del consumo possibile ruoterebbe verso l'alto (il punto nel quale non lavora, ovviamente non cambia) e l'insieme del consumo possibile aumenta.

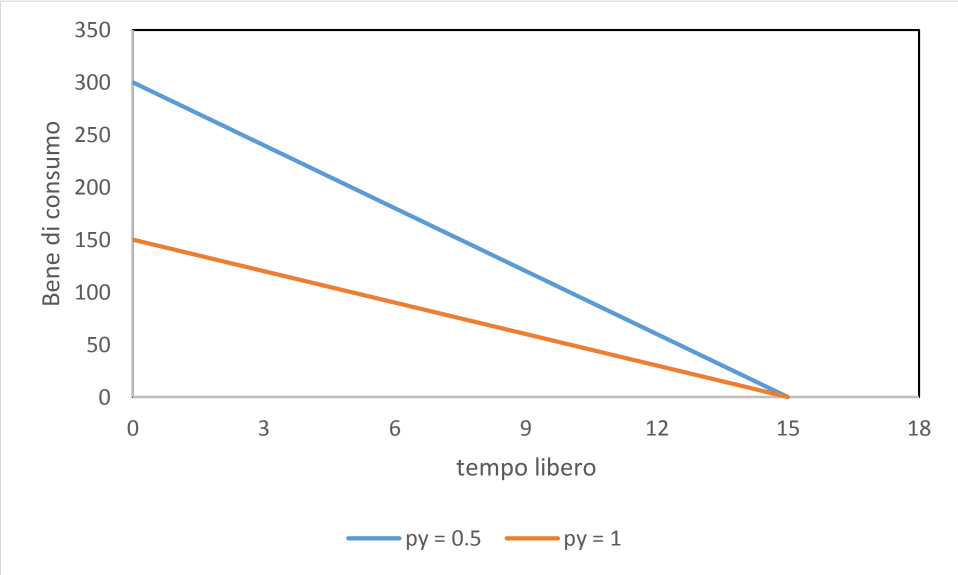


Per ricalcolare la decisione ottima modifichiamo il sistema

$\begin{cases} \frac{0.5y}{t} = 30 \\ y = 450 - 30\ t \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} y = 60t \\ y = 450 - 30\ t \end{cases}$ ➔ $t = \frac{450}{90} = 5$ ➔ C. non aumenta le ore di tempo libero

$y = 450 - 30 * 5 = 300$ ➔ C. aumenta il consumo di beni

2d) Ovviamente in questo caso l'insieme del consumo possibile si contrae (py è il prezzo del bene di consumo).



Per ricalcolare la decisione ottima modifichiamo il sistema

$\begin{cases} \frac{0.5y}{t} = 10 \\ y = 150 - 10\,t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 20t \\ y = 150 - 10\,t \end{cases} \rightarrow t = \frac{150}{30} = 5 \rightarrow$ C. non aumenta le ore di tempo libero

$y = 150 - 10 * 5 = 100 \rightarrow$ C. diminuisce il consumo di beni

Il barista e la fidanzata spagnola

La funzione di utilità di Mario è

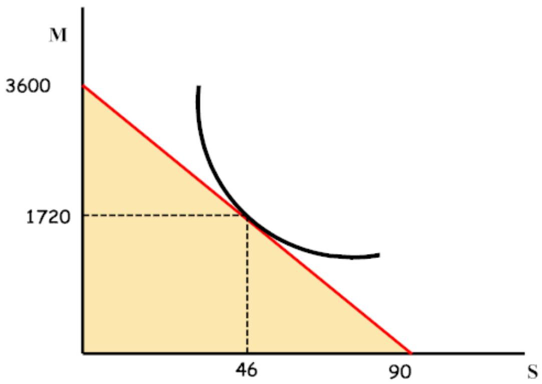
$$U = SM + 160\,S$$

dove M sono i soldi che M. guadagna lavorando (che rappresentano tutti i beni che M. potrebbe acquistare) e S i giorni passati in Spagna con C.

Se w, il salario giornaliero è pari a 40 che M. e 90 sono i giorni complessivi dell'estate, i soldi che M. guadagna sono

$$M = 40(90 - S) = 3600 - 40S$$

come mostra la figura questo indica il vincolo che M. ha di fronte (l'area colorata)



M. non potrà che scegliere una combinazione M e S che si trova nell'area colorata.

Se vuole massimizzare il benessere sceglierà una combinazione che si trova sulla frontiera dell'insieme ovvero sulla retta rossa

Graficamente nel punto di tangenza evidenziato nel grafico

Analiticamente la scelta ottima sarà la soluzione del sistema

$\begin{cases} \frac{U_S}{U_M} = 40 \\ M = 40(90 - S) \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} \frac{M+160}{S} = 40 \\ M = 3600 - 40S \end{cases}$ $\begin{cases} M = 40S - 160 \\ M = 3600 - 40S \end{cases}$ sostituendo la prima nella seconda otteniamo

$40S - 160 = 3600 - 40S$ ➔ $S = \frac{3600+160}{80} = \frac{90}{2} + \frac{160}{80}$= 47 (questo significa che lavorerà 43 giorni)

$M = 40(90 - 47) = 40 * 44 = 1720$. Partirà con mille settecento sessanta euro in tasca.

Dimostrate che se il salario raddoppiasse il barista lavorerebbe un giorno in più