COMPITI DI ANALISI MATEMATICA
AA. 2013/14

Prova Intermedia 2013

I M 1) Determinare tutte le soluzioni, reali o complesse, dell'equazione $z^5 = i\,z$.

I M 2) Studiare la Serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \cdot \log^{n+1} x$, determinando anche la sua funzione somma.

I M 3) Data la composizione di funzioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, g(t_1, t_2) = (x_1, x_2, x_3)$, e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x_1, x_2, x_3) = y$, sapendo che f e g sono ovunque differenziabili, si esprima $\dfrac{\partial(y)}{\partial(t_1, t_2)}$ mediante opportuno prodotto di matrici Jacobiane e si applichi poi tale risultato nel caso $g(t_1, t_2) = (3t_1 + 2t_2, t_1\, t_2, t_1 - 2t_2)$ e $f(x_1, x_2, x_3) = x_1\, e^{x_2 - x_3}$.

I M 4) Data l'equazione $f(x, y) = xy + e^{x-y} - 2x + \log y = 0$ ed il punto $\mathrm{P}_0 = (1, 1)$ che la soddisfa, determinare la natura del punto stazionario che presenta la funzione implicita $y = y(x)$ definibile con tale equazione.

I M 5) Data la funzione $f(x, y) = e^{x-y}$, determinare tutte le direzioni v per le quali risulta $\mathcal{D}_v f(0, 0) = \mathcal{D}^2_{v,v} f(0, 0)$.

I Appello Sessione Invernale 2014

I M 1) Calcolare $\sqrt[4]{i^{68} - i^{57}}$.

I M 2) Data la funzione $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, si verifichi che essa non è differenziabile in $(0, 0)$ e si determini poi se esiste $\mathcal{D}_v f(0, 0)$, dove v è il versore di $(1, 1)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x, y) = e^{x+y} - x + y = 1$ ed il punto $\mathrm{P}_0 = (0, 0)$ che la soddisfa, determinare la natura del punto stazionario che presenta la funzione implicita $y = y(x)$ definibile con tale equazione.

I M 4) Studiare la Successione di funzioni $f_n(x) = x \cdot e^{x^2 - 2nx}$, determinandone insieme di convergenza e funzione limite. Studiare poi la sua eventuale convergenza uniforme. Determinare infine l'insieme di convergenza e la funzione somma della Serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x \\ \text{s.v.: } x^2 + 4y^2 \leq 4 \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = 3x + y + 24t \\ y' = -x + 3y + 10t^2 + 40t \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x\, y' = e^y \cdot (x - 1) \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

II M 4) Sia $f(x, y) = x^2 y - 2xy$ e sia v il versore di $(1, 1)$. Determinare tutti i punti (x_0, y_0) per i quali risulta $\begin{cases} \mathcal{D}_v f(x_0, y_0) = -2\sqrt{2} \\ \mathcal{D}^2_{v,v} f(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$.

$\boxed{\text{II Appello Sessione Invernale 2014}}$

I M 1) Calcolare $\sqrt[3]{e^{\left(\log 2+i\,\frac{\pi}{3}\right)}}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^\alpha}{x^2+y^2} & :(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & :(x,y)=(0,0)\end{cases}$, determinare per quali valori del parametro α la funzione risulta differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} x^2-y^2+z^2=0 \\ xyz\,e^{xyz}=0\end{cases}$ ed il punto $\mathrm{P}_0=(1,\,-1,0)$ che lo soddisfa, determinare una possibile funzione implicita con esso definibile e di tale funzione determinare l'equazione della retta tangente nel punto opportuno.

I M 4) Studiare la Successione di funzioni $f_n(x)=e^{-nx}-e^{n(x-1)}$, determinandone insieme di convergenza e funzione limite. Studiare poi la sua eventuale convergenza uniforme. Determinare infine insieme di convergenza e funzione somma della Serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y)=x^2+y \\ \text{s.v.} \begin{cases} x^2+y^2\leq 1 \\ y-(x-1)^2\geq 0\end{cases}\end{cases}$.

II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x'=x-y+t \\ y'=y+2\end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'-y=x\,y^2 \\ y(0)=1\end{cases}$.

II M 4) Data $f(x,y)=\log\left(x^2-y^2\right)$, determinare tutti i punti (x,y) per i quali il quadrato del modulo del gradiente $\|\nabla f(x,y)\|^2$ risulta uguale al determinante della matrice Hessiana $|\mathbb{H}(f)|$.

$\boxed{\text{Appello Sessione Straordinaria I 2014}}$

I M 1) Calcolare $\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^{10}}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2|y|^\alpha}{(x^2+y^2)^\alpha} & :(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & :(x,y)=(0,0)\end{cases}$, con α numero reale positivo, determinare i valori del parametro α per i quali la funzione risulta differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z,w)=x^3y-y^2z^2+zyw^2=1 \\ g(x,y,z,w)=e^xy-z\,e^w+x^2zw=1\end{cases}$ e il punto $\mathrm{P}_0=(1,1,1,1)$ che lo soddisfa, verificare che con esso è possibile definire una funzione implicita $(x,y)\to(z(x,y),w(x,y))$ e di tale funzione calcolare le derivate parziali prime.

I M 4) Studiare la Successione di funzioni $f_n(x)=x\log^{2n}x$, determinandone insieme di convergenza e funzione limite. Studiare poi la sua eventuale convergenza uniforme. Determinare infine insieme di convergenza e funzione somma della Serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = 2x - 3y \\ \text{s.v.} \begin{cases} y \geq x^2 - x \\ y \leq x \end{cases} \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = 2x + 3y + e^t \\ y' = -x - 2y + 1 \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = (1 + y^2)\, x \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

II M 4) La funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{2} e^{2-(x^2+y^2)}$ ammette derivate direzionali nel punto P. Sapendo che $\mathcal{D}_v f(P) = 1$ and $\mathcal{D}_w f(P) = -1$, con $v = (1,0)$ e $w = (0,1)$, determinare almeno un punto P che soddisfi tali condizioni e calcolare la derivata direzionale del secondo ordine $\mathcal{D}^2_{v,w} f(P)$.

II Appello Sessione Estiva 2014

I M 1) Calcolare $\sqrt{(1-i)^3}$.

I M 2) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z) = (x+y+z)e^{x+y+z} = 0 \\ g(x,y,z) = xe^{yz} + ye^{xz} + ze^{xy} = 0 \end{cases}$ ed il punto $\mathrm{P}_0 = (1, 0, -1)$ che lo soddisfa, verificare che con esso non si può definire una funzione implicita $y \to (x,z)$ ma si può invece definire una funzione implicita $x \to (y,z)$. Di tale funzione determinare l'equazione della retta tangente nel punto opportuno.

I M 3) Stabilire se la funzione $f(x,y) = x \cdot |\operatorname{sen} y|$ è differenziabile nel punto $(0,0)$.

I M 4) Determinare l'insieme di convergenza della Serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-2}}{n^3\, 2^{n+2}} \cdot x^n$.

II M 1) Rendere massima la somma di tre numeri positivi x, y e z sotto la condizione che la somma del quadrato del primo numero con il doppio del quadrato del secondo ed il triplo del quadrato del terzo sia 11.

II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x + 2y + e^t \\ y' = 3x + 2y - e^t \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} e^x \cdot y' = e^y \cdot x \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

II M 4) Data la funzione $f(x,y) = x^3 + y^3$, e dati u versore di $(1, -1)$ e v versore di $(1,1)$, determinare tutti i punti (x,y) nei quali risulta $\mathcal{D}_u f(x,y) = 0$ e $\mathcal{D}_v f(x,y) = 3\sqrt{2}$.

II Appello Sessione Autunnale 2014

I M 1) Calcolare $\sqrt[4]{\dfrac{1-i}{1+i}}$.

I M 2) Verificare che la matrice Hessiana della funzione $f(x,y,z) = x^2\, y - x\, z^2 - z^2 + x^2$ non può mai essere uguale alla matrice nulla.

I M 3) L'equazione $f(x,y,z) = e^{x^2y^2z} - e^{xyz^2} = 0$, soddisfatta nel punto $P = (1,1,0)$, definisce una funzione implicita $z = z(x,y)$. Si calcoli il gradiente di z nel punto $(1,1)$.

I M 4) Determinare l'insieme di convergenza della Serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cdot 3^n}{n\,!} \cdot (x+1)^n$.

II M 1) Determinare i punti di massimo e minimo per la funzione $f(x,y) = 6xy - 2x - 3y$ nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x - t \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' - 2y = x \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

II M 4) Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = \left(2xe^y - ye^x + 2; x^2e^y - e^x - 1\right)$. Determinare tutte le funzioni $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di cui $F(x,y)$ costituisce il gradiente.

Appello Sessione Straordinaria II 2014

I M 1) Dopo aver determinato le radici dell'equazione $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$, si scrivano queste in forma trigonometrica e se ne calcoli poi il prodotto.

I M 2) Determinare i valori del parametro k per i quali la forma quadratica generata dalla matrice $\mathbb{H} = \left\|\begin{matrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{matrix}\right\|$ risulta una forma quadratica definita.

I M 3) L'equazione $f(x,y) = x^2 + y^2 + 6xy + 1 = 0$, che risulta soddisfatta nel punto $P = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, definisce una funzione implicita $y = y(x)$. Si determini l'espressione del polinomio di Taylor di II grado di tale funzione implicita.

I M 4) Studiare la convergenza uniforme della Successione di funzioni $f_n(x) = n\,e^{1-nx}$. Determinare poi l'insieme di convergenza della Serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

II M 1) Analizzare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = y^2\,e^x - xy$.

II M 2) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y,z) = x^2 - y + z^2 \\ \text{s.v.: } x - y^2 + z = 0 \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x\,y' = (1 + y^2) \cdot \log x \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

II M 4) Determinare l'espressione del polinomio di MacLaurin di secondo grado della funzione $f(x,y) = e^{x^2 - y^2}$.