COMPITI DI ANALISI MATEMATICA
AA. 2014/15

Prova Intermedia 2014

I M 1) Sono dati tre numeri complessi z_1, z_2 e z_3, aventi modulo pari ad 1 ed argomenti rispettivamente uguali a $\dfrac{4\pi}{3}$, $\dfrac{5\pi}{6}$ e $\dfrac{3\pi}{2}$. Calcolare le radici quadrate del numero $z = i \cdot \dfrac{z_1^2 \cdot z_2^3}{z_3^3}$.

I M 2) Determinare insieme di convergenza semplice, di convergenza uniforme e funzione limite della Successione di funzioni $f_n(x) = e^{1-nx^2}$. Determinare poi l'insieme di convergenza e la funzione somma della Serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

I M 3) Verificare se la funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2|x|} + \sqrt{y^2|y|}$ è differenziabile in $(0,0)$. In caso positivo, calcolare il suo differenziale totale del primo ordine.

I M 4) Data l'equazione $f(x,y) = e^{x+y} - x + y = 1$ ed il punto $\mathrm{P}_0 = (0,0)$ che la soddisfa, determinare la natura del punto stazionario che presenta la funzione implicita $y = y(x)$ definibile con tale equazione.

I M 5) Data la funzione $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ e dato $v = (\cos\alpha, \mathrm{sen}\,\alpha)$, determinare se esistono valori di α per i quali risulti $[\mathcal{D}_v f(1,1)]^2 = \mathcal{D}^2_{v,v} f(1,1)$.

I Appello Sessione Invernale 2015

I M 1) Trovare due numeri tali che la loro somma sia pari a 2 ed il loro prodotto sia pari a 4. Quindi calcolare le loro radici quadrate.

I M 2) Determinare se la funzione $f(x,y) = |xy| \cdot (x-y)$ risulta differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data la funzione $f(x,y) = e^{x-y}$ ed i versori $u = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ e $v = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, sapendo che $\mathcal{D}^2_{u,v} f(x,y) = -2$, determinare il valore di $\mathcal{D}_u f(x,y)$.

I M 4) Studiare la Serie di potenze $\displaystyle\sum_{n:0}^{+\infty} \frac{n}{n^2+3n-1} \cdot x^n$.

II M 1) Verificare se con il sistema $\begin{cases} f(x,y,z) = xy - xz + y = 0 \\ g(x,y,z) = xyz - xz + yz = 0 \end{cases}$ si può definire, in un intorno di $P(-1,1,0)$, una funzione in forma implicita. Se ciò è possibile, definire tale funzione e determinare l'equazione della sua retta tangente.

II M 2) Risolvere il problema: $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 - xy \\ \text{s.v.} \begin{cases} 1 - x \le y \\ y \le 1 - x^2 \end{cases} \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' \cdot \log^2 y = xy \\ y(0) = e \end{cases}$.

II M 4) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = y + t \\ y' = x + e^t \end{cases}$.

II Appello Sessione Invernale 2015

I M 1) Calcolare le radici terze del numero $e^{\log 2+\frac{5}{3}\pi i}$.
I M 2) Studiare la Successione di funzioni $f_n(x)=x^{2n}-x^2$, determinandone l'insieme di convergenza, la funzione limite ed opportuni intervalli nei quali la convergenza risulti uniforme.
I M 3) Data la funzione $f(x,y)=x^2-xy^2$ ed i versori u e v dei vettori $U=(1,1)$ e $V=(1,-1)$, determinare tutti i punti (x,y) nei quali risulta: $\begin{cases} \mathcal{D}_u f(x,y)=\sqrt{2} \\ \mathcal{D}^2_{u,v} f(x,y)=2 \end{cases}$.
I M 4) Determinare se con l'equazione $f(x,y)=y\cdot\log x-x\,e^y+x=0$, soddisfatta nel punto $P=(1,0)$, è possibile definire una funzione implicita. In caso affermativo, calcolarne le derivate prima e seconda.
II M 1) Data la funzione $f(x,y)=x^2-xy^2+k\,xy$, si analizzi la natura dei suoi punti stazionari al variare del parametro k.
II M 2) Risolvere il problema: $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y)=xy \\ \text{s.v.} \begin{cases} x^2-4x+4y\le 0 \\ x-4y\le 0 \end{cases} \end{cases}$.
II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'-y=y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$.
II M 4) Risolvere il sistema lineare omogeneo di equazioni differenziali: $\begin{cases} x'=x+y \\ y'=x-y \end{cases}$.

I Appello Sessione Autunnale 2015

I M 1) Dopo aver risolto l'equazione $x^4+x^3-2x^2+4x-24=0$, si calcolino le radici terze della soluzione avente modulo massimo.
I M 2) Studiare la Successione di funzioni $f_n(x)=ne^{-nx}$, determinandone l'insieme di convergenza, la funzione limite ed opportuni intervalli nei quali la convergenza risulti uniforme.
Determinare poi l'insieme di convergenza della Serie di funzioni $\sum_{n:0}^{+\infty} f_n(x)$.
I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z)=e^{x^2-2z^2-1}-y=0 \\ g(x,y,z)=x^2-y^3-z^4=0 \end{cases}$, si determini quale tipo di funzione implicita risulta mediante questo definibile in un intorno del punto $\mathrm{P}_0=(1,1,0)$. Può per tale funzione determinarsi il vettore tangente nel punto opportuno considerato ?
I M 4) Data la funzione $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x} & : x\ne 0 \\ 0 & : x=0 \end{cases}$, determinare se essa ammette derivate direzionali nel punto $(0,0)$ e determinare poi se in questo stesso punto essa sia o no differenziabile.
II M 1) Risolvere il seguente problema: $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y)=3x-2y \\ \text{s.v. } xy=k \end{cases}$ nel caso $k>0$ e nel caso $k<0$.
II M 2) Data la funzione $f(x,y)=x\,e^y-x^2\,y$, determinarne gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo.
II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'=e^{x+y} \\ y(0)=1 \end{cases}$.
II M 4) Risolvere il sistema di equazioni differenziali lineari: $\begin{cases} x'=2x+y \\ y'=-x+t \end{cases}$.

$\boxed{\text{II Appello Sessione Autunnale 2015}}$

I M 1) Determinare i numeri la cui somma è uguale a 4 mentre il loro prodotto è uguale a 5.

I M 2) Studiare la Successione di funzioni $f_n(x) = ne^{-nx^2}$, determinandone l'insieme di convergenza, la funzione limite ed opportuni intervalli nei quali la convergenza risulti uniforme.

Determinare poi l'insieme di convergenza della Serie di funzioni $\sum\limits_{n:0}^{+\infty} f_n(x)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y,z) = e^{x^2-2z^2+y} + x - y + 4z = 5$, si determini quale tipo di funzione implicita risulta mediante questa definibile in un intorno del punto $\mathrm{P}_0 = (1,1,1)$. Di tale funzione determinare l'equazione del piano tangente nel punto opportuno considerato.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$, determinare se essa ammette derivate direzionali nel punto $(0,0)$ e determinare poi se in questo stesso punto essa sia o no differenziabile.

II M 1) Risolvere il seguente problema: $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x + y \\ \text{s.v. } xy = k \end{cases}$ nel caso $k > 0$ e nel caso $k < 0$.

II M 2) Data la forma quadratica: $(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + k(\mathrm{d}z)^2 - 2\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, determinare per quali valori del parametro reale k la forma quadratica risulta definita, semi-definita e per quali indefinita.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = x\,e^{x-y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

II M 4) Risolvere il sistema di equazioni differenziali lineari : $\begin{cases} x' = y - t^2 \\ y' = -x + t \end{cases}$.