COMPITI DI ANALISI MATEMATICA
AA. 2015/16

Prova Intermedia 2015

I M 1) Determinare le quattro soluzioni complesse dell'equazione $\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = -1$.

I M 2) Si verifichi se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} x \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ risulta continua e poi anche differenziabile nel punto $(0,0)$.

I M 3) Sempre per la funzione $f(x,y) = \begin{cases} x \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, applicando la definizione di derivata direzionale, si calcoli $\mathcal{D}_v f(0,0)$, con $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = e^{2x-y}$, sia $D_v\, f(x,y)$, con $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, la derivata direzionale calcolata in un generico punto (x,y). Sia poi $D^2_{v,w}\, f(x,y)$ la derivata direzionale seconda con $w = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$. Se $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ e $\beta = \dfrac{3\pi}{4}$, sapendo che $D^2_{v,w}\, f(x,y) = -6$, calcolare $D_v\, f(x,y)$.

I M 5) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z,w) = xy + zw - e^{y-z} - e^{x-w} = 0 \\ \mathrm{g}\,(x,y,z,w) = e^{x-y} + e^{z-w} - xz - yw = 0 \end{cases}$, si verifichi che con esso è possibile definire implicitamente, in un intorno del punto $\mathrm{P}_0 = (1,1,1,1)$, una funzione $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \to (z,w)$. Di tale funzione F si costruisca la matrice Jacobiana nel punto $(1,1)$.

I Appello Sessione Invernale 2016

I M 1) Calcolando $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ si determinino seno e coseno di $\dfrac{\pi}{12}$.

I M 2) Si verifichi se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \cdot \dfrac{x - y}{x^2 + y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$ risulta continua e poi anche differenziabile nel punto $(0,0)$.

I M 3) L'equazione $f(x,y) = \log\left(x^2 + y^2\right) - \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = 0$ definisce in un intorno del punto $(1,0)$ una funzione implicita $y = y(x)$. Calcolare $y'(1)$ e $y''(1)$.

I M 4) Data $f(x,y) = e^{x-y}$ si determini almeno una direzione $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ per la quale risulti $\mathcal{D}_v f(0,0) = \mathcal{D}^2_{v,-v} f(0,0)$.

II M 1) Risolvere il problema: $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = xy - y^2 \\ \text{s.v.} \begin{cases} x \leq 1 - y^2 \\ 0 \leq x \end{cases} \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y''' - 5y'' - y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 24 \end{cases}$.

II M 3) Tra tutte le soluzioni del sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x - 2y + t \\ y' = x - y - t \end{cases}$ si determini quella per cui $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$.

II M 4) Data $f(x,y) = x^2 + y^2$ e data la regione $D = \{(x,y) : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$, calcolare $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

II Appello Sessione Invernale 2016

I M 1) Calcolare $i^{15} \cdot \dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^6}$.

I M 2) Data $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^3 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$ se ne calcolino le derivate parziali nel punto $(0,0)$ e si verifichi poi se la funzione in tale punto risulta differenziabile.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z) = e^{x^4 - y^4} + e^{z^4 - y^4} - 2xyz = 0 \\ g(x,y,z) = x^3 - y^3 + z^3 + 3xz = 0 \end{cases}$, si verifichi che con esso si può definire nel punto $(-1,1,-1)$ una funzione implicita $x \to (y(x), z(x))$ e di tale funzione si calcoli poi il vettore tangente.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = e^{\alpha(x-y)}$, determinare il valore del parametro α sapendo che $D_v f(0,0) + D^2_{v,-v} f(0,0) = \dfrac{1}{4}$, dove v è il versore di $(1,-1)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y,z) = x + y + z \\ \text{s.v. } x^2 + 2y^2 + 3z^2 = \frac{11}{6} \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \operatorname{sen} x \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = 2x + y + t \\ y' = -2x - y - 1 \end{cases}$.

II M 4) Data $f(x,y) = x + 2y$ e data la regione $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq e^x\}$, calcolare $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Appello Sessione Straordinaria I 2016

I M 1) Se $z = i^{19} - 3i^6 - i^{18} + 3i^3$, si determini quali, tra le radici quarte di z, hanno la parte immaginaria positiva.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = e^{x^2 - y^2}$, determinare i punti del piano (x,y) che soddisfano alla condizione $D^2_{v,v} f(x,y) + D^2_{-v,-v} f(x,y) = 0$, con v versore di $(1,1)$.

I M 3) L'equazione $\log(x^2 + y^2) - xy = 0$ definisce una funzione implicita $y = y(x)$ in un intorno del punto $P = (0,1)$. Calcolare $y'(0)$ e $y''(0)$.

I M 4) Date $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (t_1,t_2,t_3) \to (x_1,x_2)$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1,x_2) \to y$ funzioni differenziabili, sapendo che $\dfrac{\partial(y)}{\partial(t_1,t_2,t_3)} = \|\,1 \quad 3 \quad 4\,\|$ e che $\dfrac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(t_1,t_2,t_3)} = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix} \right\|$, si determini $\dfrac{\partial(y)}{\partial(x_1,x_2)}$.

II M 1) Determinare i punti di massimo e di minimo di $f(x,y) = x^3 + y^3$ nella regione di $\mathbb{R}^2$ costituita dal triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

II M 2) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x + y + e^t \\ y' = -x + y - e^t \end{cases}$.

II M 4) Data $f(x,y) = (x+y)^2$ e data la regione $D = \big\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1,\ y \le x\big\}$, calcolare $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

II Appello Sessione Estiva 2016

I M 1) Determinare il valore complesso del parametro k per cui $\dfrac{(1+2i)^2 - (1+i)^2}{1 + k\,i} = i$.

I M 2) Data una funzione $f(x,y)$, due volte differenziabile in un certo punto stazionario P_0, sapendo che $D^2_{e_1,-e_2} f(P_0) = 0$, $D^2_{-e_1,e_1} f(P_0) = -1$ e $D^2_{e_2,e_2} f(P_0) = 2$, si determini la natura di tale punto stazionario P_0. (e_1, e_2) è la base canonica.

I M 3) Con il sistema $\begin{cases} f(x,y,z) = x\,e^{y-x} - y\,e^{x-y} = 0 \\ g(x,y,z) = x - y + z\,e^z = 0 \end{cases}$ quale tipo di funzione implicita si può definire nel punto $(1,1,0)$? Si calcolino poi le sue derivate del primo ordine.

I M 4) Data $f(x,y,z) = 8x^3 + 24xz + z^3 - y^3 + 3y^2$, trovare i suoi punti stazionari e studiarne la natura.

II M 1) Studiare il problema: $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = xy - y \\ \text{s.v.} \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ y \le 1 - x^2 \end{cases} \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{(1+y^2)}{x^2} \\ y\left(\frac{4}{\pi}\right) = 1 \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x + 2y + e^t \\ y' = -y - 2e^t \end{cases}$.

II M 4) Data la regione $D = \{(x,y) : x \ge 0, y \ge 0, y \le e^x, y \le e + 1 - x, y \ge \log x\}$ e data $f(x,y) = 1$, calcolare $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.