

COMPITI DI MATEMATICA GENERALE AA. 2014/15

Prova Intermedia Anno 2014-Compito A1

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 - 3x)}{2x - x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sin x + x^2}{x + 2x^2} \right)^{\frac{1-x^2}{x}}.$$

2) Date le funzioni $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = 2^x$ e $h(x)$, si determini l'espressione di $h(x)$ sapendo che risulta $f(g(h(x))) = \sin x$.

3) Risolvere la disequazione $\log \left(\frac{3^x + 1}{2 - 3^x} \right) > 0$.

4) Date tre generiche proposizioni \mathbb{A} , \mathbb{B} e \mathbb{C} , determinare i casi di verità e di falsità della proposizione \mathbb{P} e \mathbb{Q} con $\mathbb{P} : (\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}) \vee (\mathbb{B} \Rightarrow \text{non } \mathbb{C})$ e $\mathbb{Q} : \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{C}$, nell'ipotesi che la proposizione $\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$ sia vera.

5) Determinare il valore del parametro k per il quale risulta $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + kx)^{-3} - 1}{\log(1 + 2x)} = 5$.

Prova Intermedia Anno 2014-Compito B1

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x - x^2)}{2x^2 + x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x - \sin x + 2x^2}{x^2 - x} \right)^{\frac{1+x}{x^2}}.$$

2) Date le funzioni $f(x) = 3^x - 2$, $g(x) = 2x + 3$ e $h(x)$, si determini l'espressione di $h(x)$ sapendo che risulta $f(g(h(x))) = \cos x$.

3) Risolvere la disequazione $\log \left(\frac{3^x + 2}{4 - 3^x} \right) > 0$.

4) Date tre generiche proposizioni \mathbb{A} , \mathbb{B} e \mathbb{C} , determinare i casi di verità e di falsità della proposizione \mathbb{P} e \mathbb{Q} con $\mathbb{P} : (\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{C}) \vee (\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A})$ e $\mathbb{Q} : \text{non } \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{B}$, nell'ipotesi che la proposizione $\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$ sia falsa.

5) Determinare il valore del parametro k per il quale risulta $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + kx} - 1}{\sin 3x} = 2$.

Prova Intermedia Anno 2014-Compito C1

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 + x}{\operatorname{tg}(x^2 + 2x)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + \sin x - 2x^2}{1 - x} \right)^{\frac{x^2}{1-x}}.$$

2) Date le funzioni $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = \log_2 x$ e $h(x)$, si determini l'espressione di $h(x)$ sapendo che risulta $f(g(h(x))) = \sin x$.

3) Risolvere la disequazione $\log \left(\frac{3 - 2^x}{2^x + 1} \right) > 0$.

4) Date tre generiche proposizioni \mathbb{A} , \mathbb{B} e \mathbb{C} , determinare i casi di verità e di falsità della proposizione \mathbb{P} e \mathbb{Q} con $\mathbb{P} : (\mathbb{B} \Rightarrow \text{non } \mathbb{A})$ e $\mathbb{Q} : [(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{C}) \vee (\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C})]$, nell'ipotesi che la proposizione $\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$ sia vera.

5) Determinare il valore del parametro k per il quale risulta $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+kx)^{-2} - 1}{e^{2x} - 1} = 3$.

Prova Intermedia Anno 2014-Compito D1

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^4 + x^5}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos x + \sin x + x^2}{1 + 2x^2} \right)^{\frac{2x^2}{x-1}}.$$

2) Date le funzioni $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = 3x + 1$ e $h(x)$, si determini l'espressione di $h(x)$ sapendo che risulta $f(g(h(x))) = \cos x$.

3) Risolvere la disequazione $\log \left(\frac{6 - 2^x}{2^x + 3} \right) > 0$.

4) Date tre generiche proposizioni \mathbb{A} , \mathbb{B} e \mathbb{C} , determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $\mathbb{P} \circ \mathbb{Q}$ con $\mathbb{P} : (\text{non } \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{A})$ e $\mathbb{Q} : [(\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C}) \wedge (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})]$, nell'ipotesi che la proposizione $\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$ sia falsa.

5) Determinare il valore del parametro k per il quale risulta $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+kx)^3} - 1}{\operatorname{tg} 4x} = 1$.

Prova Intermedia Anno 2014-Compito A2

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x^2}{7x^6 + x^8}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{\frac{x^2+1}{3x}}.$$

2) Date le funzioni $f(x) = \frac{2x-1}{3x+4}$ e $g(x)$, si determini l'espressione di $g(x)$ sapendo che risulta $f(g(x)) = 2^x$.

3) Risolvere la doppia disequazione $0 < \log_2(1-x) < 2$.

4) Date le due proposizioni:

\mathbb{P} : l'insieme \mathbb{A} è contenuto nell'insieme \mathbb{B} ;

\mathbb{M} : il complementare dell'insieme \mathbb{B} è contenuto nell'insieme \mathbb{A} ;

si studino verità e falsità della proposizione $(\mathbb{P} \wedge \mathbb{M})$ al variare dell'appartenenza di un generico elemento ad \mathbb{A} e a \mathbb{B} .

5) Date le funzioni $f(x) = (x-2) \cdot \log_3(3x-k)$ e $g(x) = x^2 - 5x + 6$, si determini il valore del parametro k per il quale risulta $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow 1$.

Prova Intermedia Anno 2014-Compito B2

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x^2}{5x^4}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x} \right)^{\frac{x^2-1}{2x}}.$$

2) Date le funzioni $f(x) = \frac{x-1}{3x-2}$ e $g(x)$, si determini l'espressione di $g(x)$ sapendo che risulta $f(g(x)) = \sin x$.

3) Risolvere la doppia disequazione $-1 < \log_3(x-1) < 0$.

4) Date le due proposizioni:

\mathbb{P} : l'insieme \mathbb{B} è contenuto nel complementare dell'insieme \mathbb{A} ;

\mathbb{M} : l'insieme \mathbb{A} è contenuto nell'insieme \mathbb{B} ;

si studino verità e falsità della proposizione ($\mathbb{P} \circ \mathbb{M}$) al variare dell'appartenenza di un generico elemento ad \mathbb{A} e a \mathbb{B} .

5) Date le funzioni $f(x) = (x - 1) \cdot (2^x - 3k)$ e $g(x) = x^2 - 1$, si determini il valore del parametro k per il quale risulta $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow 2$.

Prova Intermedia Anno 2014-Compito C2

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x^3}{\operatorname{tg}^3 x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + 2x}{2x + 3} \right)^{x-1}.$$

2) Date le funzioni $f(x) = 3^{1-2x}$ e $g(x)$, si determini l'espressione di $g(x)$ sapendo che risulta $f(g(x)) = \frac{x+1}{x-1}$.

3) Risolvere la doppia disequazione $-1 < \log_2(x-1) < 1$.

4) Date le due proposizioni:

\mathbb{P} : l'insieme \mathbb{A} è contenuto nell'insieme \mathbb{B} ;

\mathbb{M} : l'insieme \mathbb{B} è contenuto nel complementare dell'insieme \mathbb{A} ;

si studino verità e falsità della proposizione ($\mathbb{P} \circ \mathbb{M}$) al variare dell'appartenenza di un generico elemento ad \mathbb{A} e a \mathbb{B} .

5) Date le funzioni $f(x) = (x - 3) \cdot \log_2(2x + k)$ e $g(x) = x^2 - 4x + 3$, si determini il valore del parametro k per il quale risulta $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow 2$.

Prova Intermedia Anno 2014-Compito D2

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^4)}{3x^4 - x^5}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3+2x}{2x+1} \right)^{1-x}.$$

2) Date le funzioni $f(x) = 1 - 2\log x$ e $g(x)$, si determini l'espressione di $g(x)$ sapendo che risulta $f(g(x)) = \log_3(1+x)$.

3) Risolvere la doppia disequazione $0 < \log_3(2-x) < 1$.

4) Date le due proposizioni:

\mathbb{P} : il complementare dell'insieme \mathbb{B} è contenuto nell'insieme \mathbb{A} ;

\mathbb{M} : l'insieme \mathbb{A} è contenuto nell'insieme \mathbb{B} ;

si studino verità e falsità della proposizione ($\mathbb{P} \circ \mathbb{M}$) al variare dell'appartenenza di un generico elemento ad \mathbb{A} e a \mathbb{B} .

5) Date le funzioni $f(x) = (x+1) \cdot (3^x - 2k)$ e $g(x) = x^2 - x - 2$, si determini il valore del parametro k per il quale risulta $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow 0$.

I Appello Sessione Invernale 2015 - Compito A

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = 3x^2 - 2\log x$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{arctg} 2x}{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{1+x+x^2} \right)^{1-x}.$$

3) Disegnare un possibile grafico per una funzione che soddisfa alle seguenti quattro definizioni di limite:

- a) $\forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) : x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$;
 b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : 1 - \delta(\varepsilon) < x < 1 \Rightarrow |f(x) + 2| < \varepsilon$;
 c) $\forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) : 1 < x < 1 + \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) < \varepsilon$;
 d) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : x > \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.
 4) Data la funzione $f(x, y, z) = x^2y - e^{y-z} + \log(x - z)$, dopo aver calcolato $\nabla f(2, 1, 1)$ si calcoli anche $\nabla f(2, 1, 1) \cdot \mathbb{V}$, sapendo che il vettore \mathbb{V} ha modulo uguale a 2 e che l'angolo tra $\nabla f(2, 1, 1)$ e \mathbb{V} è uguale a $\frac{\pi}{3}$.
 5) Dati i vettori $\mathbb{X}_1 = (x^2, -3x, x)$ e $\mathbb{X}_2 = (x, x, -9)$, si determini per quali valori di x il loro prodotto scalare risulta massimo o minimo.
 6) Data la funzione $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - 4}$ si determini dove tale funzione risulta invertibile, determinando dominio e codominio nonché l'espressione della sua funzione inversa.
 7) Data la funzione $f(x) = \log(3x - 2)$ si determini il punto x_0 nel quale la retta tangente al grafico della funzione risulta perpendicolare alla retta di equazione $2y + x = 10$, determinando poi l'equazione di tale retta tangente.
 8) Analizzare i punti stazionari della funzione $f(x, y) = x^2 + y^3 - xy + x - 3y$.
 9) Determinare il valore del parametro k per cui risulta $\int_{-1}^0 \frac{x+k}{x+2} dx = 3$.
 10) Dati i vettori $\mathbb{X}_1 = (1, 1, m)$ e $\mathbb{X}_2 = (2, k, 4)$ si determini, al variare di m e di k , quando essi risultano paralleli e quando perpendicolari. Siano poi \mathbb{A} la matrice avente \mathbb{X}_1 ed \mathbb{X}_2 come righe e $\mathbb{Y} = (1, -1, 1)$. Si determinino i valori di m e k per cui $\mathbb{A} \cdot \mathbb{Y}$ dà per risultato il vettore nullo.

I Appello Sessione Invernale 2015 - Compito B

- 1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = 3\log x - 2x^2$.
 2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x - \sen 3x}{4x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x+x^2}{1+2x} \right)^{x-x^2}$$
.
 3) Disegnare un possibile grafico per una funzione che soddisfa alle seguenti quattro definizioni di limite:
 a) $\forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) : x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) < \varepsilon$;
 b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : 2 - \delta(\varepsilon) < x < 2 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$;
 c) $\forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) : 2 < x < 2 + \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$;
 d) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : x > \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) + 1| < \varepsilon$.
 4) Data la funzione $f(x, y, z) = e^{x-y} + \log(z - x) + y^2z$, dopo aver calcolato $\nabla f(1, 1, 2)$ si calcoli anche $\nabla f(1, 1, 2) \cdot \mathbb{V}$, sapendo che il vettore \mathbb{V} ha modulo uguale a 1 e che l'angolo tra $\nabla f(1, 1, 2)$ e \mathbb{V} è uguale a $\frac{\pi}{4}$.
 5) Dati i vettori $\mathbb{X}_1 = (x, 3, -9)$ e $\mathbb{X}_2 = (x^2, x^2, x)$, si determini per quali valori di x il loro prodotto scalare risulta massimo o minimo.
 6) Data la funzione $f(x) = \frac{3^x + 2}{3^x - 1}$ si determini dove tale funzione risulta invertibile, determinando dominio e codominio nonché l'espressione della sua funzione inversa.
 7) Data la funzione $f(x) = \log(2x + 3)$ si determini il punto x_0 nel quale la retta tangente al grafico della funzione risulta perpendicolare alla retta di equazione $3y + x = 6$, determinando poi l'equazione di tale retta tangente.
 8) Analizzare i punti stazionari della funzione $f(x, y) = y^3 - x^2 + xy + x - 3y$.

9) Determinare il valore del parametro k per cui risulta $\int_0^1 \frac{x-k}{x+1} dx = 2$.

10) Dati i vettori $\mathbb{X}_1 = (2, -1, m)$ e $\mathbb{X}_2 = (1, k, 2)$ si determini, al variare di m e di k , quando essi risultano paralleli e quando perpendicolari. Siano poi \mathbb{A} la matrice avente \mathbb{X}_1 ed \mathbb{X}_2 come righe e $\mathbb{Y} = (1, -1, 1)$. Si determinino i valori di m e k per cui $\mathbb{A} \cdot \mathbb{Y}$ dà per risultato il vettore nullo.

I Appello Sessione Invernale 2015 - Compito C

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = x^2 - 4 \log x$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 4x - \operatorname{sen} 3x}{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+2x}{1-x+x^2} \right)^{x-1}.$$

3) Disegnare un possibile grafico per una funzione che soddisfa alle seguenti quattro definizioni di limite:

a) $\forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) : x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon;$

b) $\forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) : -1 - \delta(\varepsilon) < x < -1 \Rightarrow f(x) < \varepsilon;$

c) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : -1 < x < -1 + \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon;$

d) $\forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) : x > \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon.$

4) Data la funzione $f(x, y, z) = \log(y-z) + e^{z-x} + 2xy$, dopo aver calcolato $\nabla f(1, 2, 1)$ si calcoli anche $\nabla f(1, 2, 1) \cdot \mathbb{V}$, sapendo che il vettore \mathbb{V} ha modulo uguale a 2 e che l'angolo tra $\nabla f(1, 2, 1)$ e \mathbb{V} è uguale a $\frac{\pi}{6}$.

5) Dati i vettori $\mathbb{X}_1 = (x^2, x, -3)$ e $\mathbb{X}_2 = (2x, 3x, 4x)$, si determini per quali valori di x il loro prodotto scalare risulta massimo o minimo.

6) Data la funzione $f(x) = \frac{2^x + 2}{2^x - 1}$ si determini dove tale funzione risulta invertibile, determinando dominio e codominio nonché l'espressione della sua funzione inversa.

7) Data la funzione $f(x) = \log(2x - 3)$ si determini il punto x_0 nel quale la retta tangente al grafico della funzione risulta perpendicolare alla retta di equazione $y + 2x = 1$, determinando poi l'equazione di tale retta tangente.

8) Analizzare i punti stazionari della funzione $f(x, y) = x^2 + y^3 + xy - x - 3y$.

9) Determinare il valore del parametro k per cui risulta $\int_{-1}^0 \frac{x-k}{x+2} dx = \frac{1}{2}$.

10) Dati i vettori $\mathbb{X}_1 = (k, 3, 2)$ e $\mathbb{X}_2 = (1, 1, m)$ si determini, al variare di m e di k , quando essi risultano paralleli e quando perpendicolari. Siano poi \mathbb{A} la matrice avente \mathbb{X}_1 ed \mathbb{X}_2 come righe e $\mathbb{Y} = (1, -1, 1)$. Si determinino i valori di m e k per cui $\mathbb{A} \cdot \mathbb{Y}$ dà per risultato il vettore nullo.

I Appello Sessione Invernale 2015 - Compito D

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = \log x - 3x^2$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x - \operatorname{arcsen} 3x}{4x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-x+x^2}{1+x} \right)^{x^2-1}.$$

3) Disegnare un possibile grafico per una funzione che soddisfa alle seguenti quattro definizioni di limite:

a) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon;$

- b) $\forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) : -\delta(\varepsilon) < x < 0 \Rightarrow f(x) > \varepsilon$;
 c) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : 0 < x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$;
 d) $\forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) : x > \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) < \varepsilon$.
 4) Data la funzione $f(x, y, z) = z^2 y - e^{x-y} + \log(x-z)$, dopo aver calcolato $\nabla f(2, 2, 1)$ si calcoli anche $\nabla f(2, 2, 1) \cdot \mathbb{V}$, sapendo che il vettore \mathbb{V} ha modulo uguale a 1 e che l'angolo tra $\nabla f(2, 2, 1)$ e \mathbb{V} è uguale a $\frac{3\pi}{4}$.
 5) Dati i vettori $\mathbb{X}_1 = (2x, -3, 6)$ e $\mathbb{X}_2 = (x^2, x^2, -2x)$, si determini per quali valori di x il loro prodotto scalare risulta massimo o minimo.
 6) Data la funzione $f(x) = \frac{3^x + 1}{3^x - 9}$ si determini dove tale funzione risulta invertibile, determinando dominio e codominio nonché l'espressione della sua funzione inversa.
 7) Data la funzione $f(x) = \log(3x + 2)$ si determini il punto x_0 nel quale la retta tangente al grafico della funzione risulta perpendicolare alla retta di equazione $y + 3x = 2$, determinando poi l'equazione di tale retta tangente.
 8) Analizzare i punti stazionari della funzione $f(x, y) = x^3 - y^2 - xy - 3x - y$.
 9) Determinare il valore del parametro k per cui risulta $\int_0^1 \frac{x+k}{x+1} dx = 2$.
 10) Dati i vettori $\mathbb{X}_1 = (k, 1, -2)$ e $\mathbb{X}_2 = (-1, 3, m)$ si determini, al variare di m e di k , quando essi risultano paralleli e quando perpendicolari. Siano poi \mathbb{A} la matrice avente \mathbb{X}_1 ed \mathbb{X}_2 come righe e $\mathbb{Y} = (1, -1, 1)$. Si determinino i valori di m e k per cui $\mathbb{A} \cdot \mathbb{Y}$ dà per risultato il vettore nullo.

II Appello Sessione Invernale 2015 - Compito A

- 1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = \log(3x - 4x^2)$.
 2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - \cos x}{2x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - \log(1-x)}{1+x}$$
 3) Date $f(x) = 3^x - x$ e $g(x) = 2^x - x$ dire se e dove le due funzioni possono risultare asintoticamente equivalenti: $f(x) \sim g(x)$.
 4) Data la funzione $f(x) = 3x - m e^{1+2x}$, determinare il valore del parametro m sapendo che la funzione ha un punto di massimo in $x = 1$.
 5) Date $f(x) = e^{3x-1}$ e $g(x) = e^{2x+1}$ si determini il punto x_0 nel quale la retta tangente al grafico di $f(x)$ e quella tangente al grafico di $g(x)$ risultano parallele.
 6) Se $f(x) = \sqrt[3]{3x+2}$ e $f(g(x)) = \log x$, determinare l'espressione di $g(x)$.
 7) Determinare l'area al di sotto del grafico della funzione $f(x) = 3 + 2x - x^2$ nella parte di piano cartesiano contenuta nel primo quadrante.
 8) Data una funzione $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la matrice Hessiana calcolata in un punto stazionario risulta $\mathbb{H} = \begin{vmatrix} k-1 & -1 \\ -1 & k+2 \end{vmatrix}$. Determinare, al variare del parametro k , la natura del punto stazionario.
 9) Date le matrici $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} k & 1 & -2 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}$ e $\mathbb{B} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & k \\ k & 2 \end{vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{V} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$, determinare il valore del parametro k per il quale risulta $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{V} = \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \end{vmatrix}$.
 10) Data la funzione $f(x, y) = xy - y + \log(x - y)$ si considerino le due proposizioni:

$\mathbb{A} : \frac{\partial f}{\partial x} = y - 1 + \frac{1}{x - y}$ e $\mathbb{B} : \frac{\partial f}{\partial y} = x - 1 - \frac{1}{x - y}$. Dopo aver determinato verità o falsità di ciascuna proposizione, si determini se la proposizione $\text{non } \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A}$ risulta vera o falsa.

II Appello Sessione Invernale 2015 - Compito B

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = \log(5x - 2x^2)$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{3x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2^x}{\log(2 - x)}.$$

3) Date $f(x) = 2^x - x$ e $g(x) = 4^x - x$ dire se e dove le due funzioni possono risultare asintoticamente equivalenti: $f(x) \sim g(x)$.

4) Data la funzione $f(x) = m e^{1+2x} - 3x$, determinare il valore del parametro m sapendo che la funzione ha un punto di minimo in $x = 1$.

5) Date $f(x) = e^{2x-1}$ e $g(x) = e^{3x+2}$ si determini il punto x_0 nel quale la retta tangente al grafico di $f(x)$ e quella tangente al grafico di $g(x)$ risultano parallele.

6) Se $f(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$ e $f(g(x)) = e^x$, determinare l'espressione di $g(x)$.

7) Determinare l'area al di sotto del grafico della funzione $f(x) = 6x - x^2 - 5$ nella parte di piano cartesiano contenuta nel primo quadrante.

8) Data una funzione $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la matrice Hessiana calcolata in un punto stazionario risulta $\mathbb{H} = \begin{vmatrix} k+1 & 1 \\ 1 & k-2 \end{vmatrix}$. Determinare, al variare del parametro k , la natura del punto stazionario.

9) Date le matrici $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & k \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix}$ e $\mathbb{B} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{V} = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$, determi-

nare il valore del parametro k per il quale risulta $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{V} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$.

10) Data la funzione $f(x, y) = x^2 + xy - e^{x-y}$ si considerino le due proposizioni:

$\mathbb{A} : \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - e^{x-y}$ e $\mathbb{B} : \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + x + e^{x-y}$. Dopo aver determinato verità o falsità di ciascuna proposizione, si determini se la proposizione $\mathbb{A} \Rightarrow \text{non } \mathbb{B}$ risulta vera o falsa.

II Appello Sessione Invernale 2015 - Compito C

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = \log(4x - 3x^2)$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \cos x}{3x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(1 - x) - e^x}{1 - x}.$$

3) Date $f(x) = 4^x - x$ e $g(x) = 3^x - x$ dire se e dove le due funzioni possono risultare asintoticamente equivalenti: $f(x) \sim g(x)$.

4) Data la funzione $f(x) = 2x - m e^{1+3x}$, determinare il valore del parametro m sapendo che la funzione ha un punto di massimo in $x = 1$.

5) Date $f(x) = e^{3x+1}$ e $g(x) = e^{2x+2}$ si determini il punto x_0 nel quale la retta tangente al grafico di $f(x)$ e quella tangente al grafico di $g(x)$ risultano parallele.

6) Se $f(x) = \sqrt[3]{x + 3}$ e $f(g(x)) = \sin x$, determinare l'espressione di $g(x)$.

7) Determinare l'area al di sotto del grafico della funzione $f(x) = 5 + 4x - x^2$ nella parte di piano cartesiano contenuta nel primo quadrante.

8) Data una funzione $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la matrice Hessiana calcolata in un punto stazionario risulta $\mathbb{H} = \begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 1 & k-2 \end{vmatrix}$. Determinare, al variare del parametro k , la natura del punto stazionario.

9) Date le matrici $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & -1 & k \end{vmatrix}$ e $\mathbb{B} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \\ k & -1 \end{vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{V} = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$, determinare il valore del parametro k per il quale risulta $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{V} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$.

10) Data la funzione $f(x, y) = x^{2y} - y \sin x$ si considerino le due proposizioni:

$\mathbb{A} : \frac{\partial f}{\partial x} = 2y x^{2y-1} - y \cos x$ e $\mathbb{B} : \frac{\partial f}{\partial y} = x^{2y} \log x^2 - \sin x$. Dopo aver determinato verità o falsità di ciascuna proposizione, si determini se la proposizione $\mathbb{A} \Rightarrow \text{non } \mathbb{B}$ risulta vera o falsa.

II Appello Sessione Invernale 2015 - Compito D

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = \log(2x - 5x^2)$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - \cos x}{2x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 3^x}{1 + \log(2 - x)}.$$

3) Date $f(x) = 2^x - x$ e $g(x) = 3^x - x$ dire se e dove le due funzioni possono risultare asintoticamente equivalenti: $f(x) \sim g(x)$.

4) Data la funzione $f(x) = m e^{1+3x} - 2x$, determinare il valore del parametro m sapendo che la funzione ha un punto di minimo in $x = 1$.

5) Date $f(x) = e^{2x-2}$ e $g(x) = e^{3x+1}$ si determini il punto x_0 nel quale la retta tangente al grafico di $f(x)$ e quella tangente al grafico di $g(x)$ risultano parallele.

6) Se $f(x) = \sqrt[3]{2x-3}$ e $f(g(x)) = \cos x$, determinare l'espressione di $g(x)$.

7) Determinare l'area al di sotto del grafico della funzione $f(x) = x - x^2 + 6$ nella parte di piano cartesiano contenuta nel primo quadrante.

8) Data una funzione $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la matrice Hessiana calcolata in un punto stazionario risulta $\mathbb{H} = \begin{vmatrix} k & -2 \\ -2 & k+2 \end{vmatrix}$. Determinare, al variare del parametro k , la natura del punto stazionario.

9) Date le matrici $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix}$ e $\mathbb{B} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ k & -1 \\ 0 & k \end{vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{V} = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$, determinare il valore del parametro k per il quale risulta $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{V} = \begin{vmatrix} -4 \\ 2 \end{vmatrix}$.

10) Data la funzione $f(x, y) = x^2 2^y - xy + x$ si considerino le due proposizioni:

$\mathbb{A} : \frac{\partial f}{\partial x} = x 2^y - y + 1$ e $\mathbb{B} : \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 2^y - x$. Dopo aver determinato verità o falsità di ciascuna proposizione, si determini se la proposizione $\text{non } \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$ risulta vera o falsa.

Appello Sessione Straordinaria I 2015

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = e^{2x-x^2}$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x^2 + \sin 3x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} - e^x}{e^{2x}}.$$

3) Date $f(x) = 3x - 5$ e $g(x) = e^x$ determinare l'espressione della funzione composta $F(x) = f(g(f(x)))$ e determinare poi dove $F(x)$ risulta invertibile, nonché dominio, codominio ed espressione della sua inversa.

4) Data la funzione $f(x) = e^x$, determinare il punto x_0 nel quale la retta tangente al grafico di tale funzione risulta una retta passante per l'origine degli assi.

5) Disegnare un possibile grafico di una funzione $f(x)$ che soddisfi alle seguenti condizioni:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$;

b) ha per asintoto obliquo sulla destra la retta di equazione $y = 2x - 3$;

c) ha una discontinuità di II specie infinita in $x = 0$;

d) risulta $f(x) < 0$ solamente per $x \in [-3, -1]$.

6) Data la funzione $f(x, y, z) = x^2y - y \sin xz + \log \frac{z}{y}$, si determini $\nabla f(0, 1, 1)$ e si determini poi il valore del parametro k per il quale il vettore $\mathbb{X} = (2, 3, k)$ risulta perpendicolare a $\nabla f(0, 1, 1)$.

7) Determinare l'area della parte di piano cartesiano compresa al di sotto del grafico della funzione $f(x) = 4x - x^2$ e sopra quello della retta di equazione $y = 2x$.

8) Data la funzione $f(x) = m \cdot (x - k) \cdot e^{1-x}$, determinare il valore dei parametri m e k sapendo che la funzione ha un punto di massimo in $x = -3$ con $f(-3) = 5$.

9) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & k \\ k & -2 & m \end{vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{V} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$, determinare il valore

dei parametri m e k sapendo che il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{V}$ è perpendicolare al vettore $(1, 1, 1)$ ed ha modulo uguale a $\sqrt{2}$.

10) Dati tre generici insiemi \mathbb{A} , \mathbb{B} e \mathbb{C} , determinare se tra $\mathbb{X} = (\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \cup (\mathbb{A} \setminus \mathbb{C})$ e $\mathbb{Y} = (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \setminus (\mathbb{A} \cup \mathbb{C})$ sussista o meno la relazione di sottoinsieme.

I Appello Sessione Estiva 2015

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = \frac{\log 2x}{x}$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x + \log x}{1 - e^x}.$$

3) Data $f(x) = e^{2x} - e^x$ determinare i due intervalli nei quali la funzione risulta invertibile e, per ciascuno di essi, l'espressione della funzione inversa.

4) Date $f(x) = e^x + x$ e $g(x) = x$, determinare se e dove le due funzioni possono risultare asintoticamente equivalenti.

5) Data la funzione $f(x) = e^{3x} - 2x$, determinare il punto x_0 nel quale la retta tangente al grafico di tale funzione risulta perpendicolare alla retta di equazione $x + 2y = 10$.

6) Determinare l'espressione del Polinomio di Taylor di terzo grado nel punto $x = 1$ per la funzione $f(x) = e^{x-1} - \log x$.

7) Calcolare $\int_1^2 \frac{x^2 + x + 1}{x} dx$.

8) Data la funzione $f(x, y) = x^2 - xy^2 + 3y + y^4$, si determini la natura del suo punto stazionario.

9) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{V} = (1, x)$, determinare i valori della x per i quali risulta $\mathbb{V} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}^T = 0$.

10) Date le proposizioni \mathbb{A} e \mathbb{B} , determinare se la proposizione $[\mathbb{A} \Rightarrow (\text{non } \mathbb{A} \text{ o } \mathbb{B})] \text{ o } \mathbb{B}$ risulta una tautologia.

II Appello Sessione Estiva 2015

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = (x - 1) \cdot e^{3-x}$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - \log(1-x)}{2^{1-x}}.$$

3) Date le matrici $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & m & -2 \\ k & 2 & -1 \end{vmatrix}$ e $\mathbb{B} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, determinare i valori dei parametri m e k affinché risulti $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$.

4) Data $f(x) = \frac{\log(1+kx)}{1+kx}$ determinare il valore del parametro positivo k affinché la funzione presenti un punto di massimo in $x = 1$.

5) Calcolare $\int_0^\pi \frac{x}{\pi} - \sin x \, dx$.

6) Data la funzione $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2 - 2y$, si determini la natura dei suoi punti stazionari.

7) Date $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = e^x$, determinare l'espressione della funzione composta $F(x) = f(g(f(x)))$, dove questa risulta invertibile nonché l'espressione della sua funzione inversa.

8) Date le funzioni $f(x) = e^{2x+1}$ e $g(x) = e^{3-x}$, determinare il punto x_0 nel quale le rette tangenti ai grafici di tali funzioni risultano tra loro perpendicolari.

9) Determinare i casi di verità o falsità della proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}) \text{ e } (\text{non } (\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}))$.

10) Data la funzione $f(x) = \frac{\log(3-3^x)}{x}$ si determini il suo Campo d'esistenza e si calcoli poi il limite nei punti di frontiera di esso.

I Appello Sessione Autunnale 2015

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = \log(2x - x^2)$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - \sin^2 x}{x^2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - 3^x + \sin x}{2^x}$.

3) Data $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ determinare tutti i vettori $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^3$ per i quali $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$ e tali che $\|\mathbb{X}\| = 3$.

4) Date tre generiche proposizioni \mathbb{A} , \mathbb{B} e \mathbb{C} , determinare verità e falsità della proposizione: $[\mathbb{A} \Rightarrow (\mathbb{B} \text{ o } \mathbb{C})] \text{ o } [\mathbb{B} \Rightarrow (\mathbb{A} \text{ e } \mathbb{C})]$ sapendo che la proposizione $\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C}$ è falsa.

5) Verificare se risulta vero che $\int_\pi^{2\pi} \frac{\pi}{x} + \cos x \, dx = \pi \log 2$.

6) Dati i due vettori di \mathbb{R}^3 : $\mathbb{X}_1 = (x, y, y)$ e $\mathbb{X}_2 = (1 - x, x - y, -1)$, determinare per quali valori di x e di y il prodotto scalare $\mathbb{X}_1 \cdot \mathbb{X}_2$ risulta massimo.

7) Data la funzione $f(x) = \frac{1 + \log x}{1 - \log x}$, dopo aver determinato il suo campo d'esistenza ed i suoi punti di discontinuità, si verifichi che essa, dove esiste, risulta invertibile e si determini l'espressione della sua funzione inversa.

8) Date le funzioni $f(x) = e^{2x+1}$ e $g(x) = e^{3-x}$, determinare il punto x_0 nel quale le rette tangenti ai grafici di tali funzioni risultano tra loro perpendicolari.

9) Considerata la funzione $f(x, y, z) = (y - 1) \cdot \log z + x^{z-y}$, se ne calcoli il gradiente nel punto $\mathbb{P}_0 = (1, 1, 2)$ e si determini poi il valore del prodotto scalare $\nabla f(\mathbb{P}_0) \cdot \mathbb{V}$, sapendo che il vettore \mathbb{V} ha modulo pari a 2 e che forma con $\nabla f(\mathbb{P}_0)$ un angolo di 90° .

10) Determinare, in base al Teorema di Weierstrass, massimo e minimo assoluti per la funzione $f(x) = x^2 \cdot e^x$ nell'intervallo $[-2; 1]$.

II Appello Sessione Autunnale 2015

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - x + \sin x}{3^x + x}$.

3) Si considerino le seguenti due definizioni di limite:

- $\forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) : x > \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$;

- $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) + 1| < \varepsilon$.

Determinare a quale limite ciascuna delle due corrisponde e disegnare un possibile grafico di funzione che ammetta tali limiti.

4) Date le matrici $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ e $\mathbb{B} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ si determini la matrice \mathbb{W} per la quale risulta $\mathbb{A} \cdot \mathbb{W} = \mathbb{B}$.

5) Determinare il valore del parametro k per cui risulta $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{k}{x} - \sin x \, dx = 3$.

6) Data la funzione $f(x) = x^3 \cdot \log^2 x$, si determini la natura dei suoi punti stazionari.

7) Data la funzione $f(x) = \log\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$, trovare il campo di esistenza, il corrispondente co-dominio e determinare poi dove la funzione risulta invertibile, nonché l'espressione della sua funzione inversa.

8) Date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{k-x}$, determinare il valore del parametro k e quindi il punto x_0 nel quale le rette tangenti ai grafici di tali funzioni risultano tra loro perpendicolari.

9) Considerata la funzione $f(x, y, z) = \frac{xy-1}{z} \cdot \log(x-z)$, se ne calcoli il gradiente nel punto $\mathbb{P}_0 = (2, 1, 1)$ e si determini poi il valore del prodotto scalare $\nabla f(\mathbb{P}_0) \cdot \mathbb{V}$, sapendo che il vettore \mathbb{V} ha modulo pari a 2 e che forma con $\nabla f(\mathbb{P}_0)$ un angolo di 45° .

10) Date le proposizioni \mathbb{A} e \mathbb{B} , siano $\mathbb{S}: (\mathbb{A} \Rightarrow \text{non } \mathbb{B})$, $\mathbb{T}: \text{non}(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$. Considerate le proposizioni $\mathbb{S} \square \mathbb{T}$ e $\mathbb{T} \square \mathbb{S}$, si sostituisca al simbolo \square un opportuno connettivo logico in modo da ottenere o con $\mathbb{S} \square \mathbb{T}$ oppure con $\mathbb{T} \square \mathbb{S}$ una tautologia.

Appello Sessione Straordinaria II 2015

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = 2e^{3x} - 3e^{2x}$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 2x + \sin x}{2x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{-x} - x^2}{x - 3^x}$.

3) Disegnare un possibile grafico di funzione che ammetta i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1^+.$$

4) Verificare se e casomai dove risulta $e^x = o(3 + \sin x)$.

5) Determinare il valore del parametro k per cui risulta $\int_1^k 1 - 2x \, dx = \frac{1}{4}$.

6) Determinare la natura del punto stazionario della funzione $f(x, y) = e^{2x+y-x^2-y^2}$.

7) Determinare il valore del parametro k per il quale la funzione $f(x) = \begin{cases} 2^{x-3} & : x < k \\ 2^{3-2x} & : k \leq x \end{cases}$

risulta continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

8) Date le funzioni $f(x) = e^{1-x}$ e $g(x) = e^x$, determinare l'espressione della funzione composta $F(x) = f(g(x))$, dove questa risulta invertibile e l'espressione della sua inversa.

9) Date le matrici $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{vmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ e il vettore $\mathbb{X} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ si determini se

esistono valori del parametro k per i quali il vettore $(\mathbb{A} + \mathbb{B}) \cdot \mathbb{X}$ ha modulo pari a $3\sqrt{2}$.

10) Determinare il valore del parametro k ed il punto x_0 nel quale la retta di equazione $y = 2x - k$ risulta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^2 - 2x + 3$.