Compito di Analisi Matematica del 27/1/2014 $\boxed{\text{CAM 1}}$

IM1) $\sqrt[4]{i^{68}-i^{57}} = \sqrt[4]{i^{17\cdot 4}-i^{14\cdot 4+1}} = \sqrt[4]{(i^4)^{17}-(i^4)^{14}\cdot i^1} = \sqrt[4]{1^{17}-1^{14}\cdot i} = \sqrt[4]{1-i}$.

$1-i = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7}{4}\pi\right)$.

$\sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{7}{16}\pi + K\cdot\frac{2\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7}{16}\pi + K\cdot\frac{2\pi}{4}\right)\right)$; $0 \le K \le 3$.

Per $K=0$: $\sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\frac{7}{16}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7}{16}\pi\right)$; per $K=1$: $\sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\frac{15}{16}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{15}{16}\pi\right)$;

per $K=2$: $\sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\frac{23}{16}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{23}{16}\pi\right)$; per $K=3$: $\sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\frac{31}{16}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{31}{16}\pi\right)$.

IM2) $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} & : (x;y) \ne (0;0) \\ 0 & : (x;y) = (0;0) \end{cases}$. Verifichiamo che è continua in $(0;0)$.

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2|\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta|}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cdot|\cos\vartheta\cdot\mathrm{sen}\,\vartheta| = 0.$$

La convergenza è uniforme in quanto $\left|\rho|\cos\vartheta\cdot\mathrm{sen}\,\vartheta| - 0\right| = \rho\cdot|\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta| \le \rho \le \varepsilon$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{|(0+h)\cdot 0|}{\sqrt{(0+h)^2+0^2}} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0;0) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{|0\cdot(0+h)|}{\sqrt{0^2+(0+h)^2}} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$$

Per vedere se la funzione è differenziabile in $(0;0)$ occorre calcolare:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - (0;0)\cdot(x-0;y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2|\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta|}{\rho\cdot\rho} = |\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta| = 0$$

non $\forall\,\vartheta$ ma solo per $\vartheta = 0$; $\vartheta = \frac{\pi}{2}$; $\vartheta = \pi$; $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$. Quindi la funzione non è differenziabile in $(0;0)$.

v: versore di $(1;1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$D_v f(0;0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0;0)+tv) - f(0;0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{2}};\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(0;0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{\left|\frac{t^2}{2}\right|}{\sqrt{t^2}}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{|t|} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{2|t|} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{se } t\to 0^- \\ +\frac{1}{2} & \text{se } t\to 0^+ \end{cases}.$$

Il limite quindi non esiste, per cui la funzione non è derivabile nella direzione di $(1;1)$.

CAM2

IM3) $f(x;y) = e^{x+y} - x + y = 1$; $f(0;0) = 1-1+1 = 1$.

$\nabla f(x;y) = (e^{x+y} - 1;\ e^{x+y} + 1)$; $\nabla f(0;0) = (0;2)$.

È definibile $y = y(x) : x \to y(x)$ con $y'(0) = -\frac{0}{2} = 0$.

$H(x;y) = \begin{Vmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{Vmatrix}$; $H(0;0) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

$y''(0) = -\frac{1 + 2\cdot 1 \cdot 0 + 1\cdot(0^2)}{2} = -\frac{1}{2} < 0$: $x = 0$ è un punto di massimo per la funzione implicita $y = y(x)$.

IM4) $f_n(x) = x \cdot e^{x^2 - 2nx}$. $\quad$ C.E. $(f_n(x)) = \mathbb{R}$.

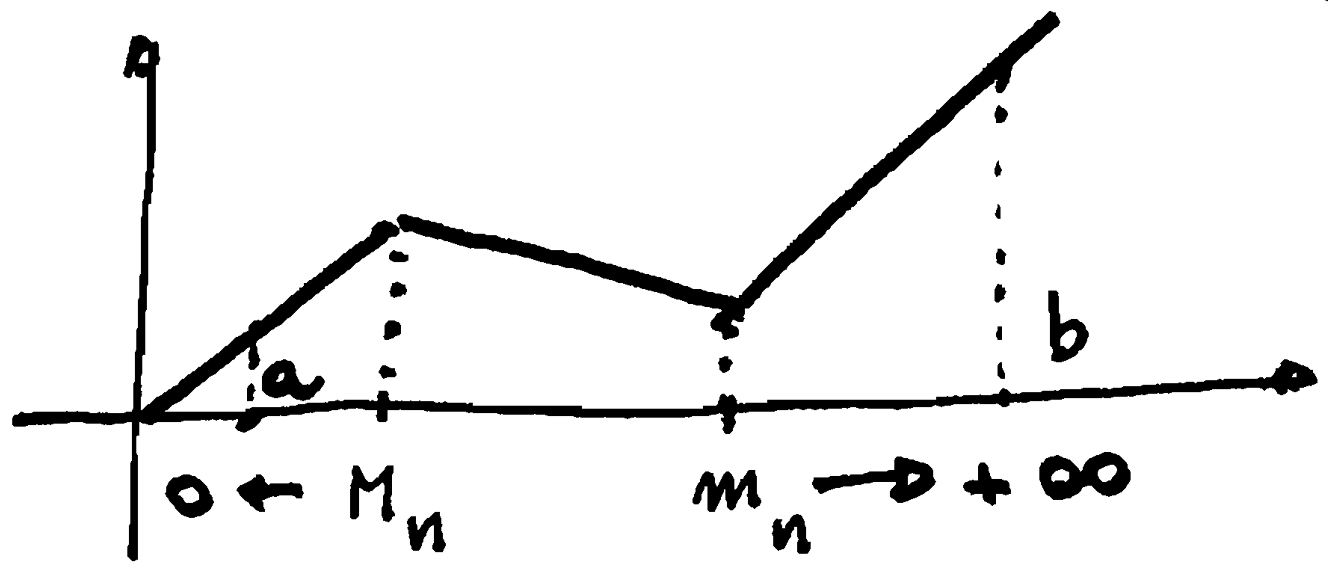
$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} -\infty : & x<0 \\ 0 : & x = 0 \\ 0 : & x>0 \end{cases}$. Quindi $\mathcal{C} = [0;+\infty[$ e $f(x) = 0\ \forall x \in \mathcal{C}$.

Studiamo l'andamento del grafico di $f_n(x)$.

$\lim_{x\to 0} f_n(x) = f_n(0) = 0$. $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

$f_n'(x) = 1\cdot e^{x^2-2nx} + x\cdot e^{x^2-2nx}\cdot(2x-2n) = e^{x^2-2nx}\cdot(2x^2 - 2nx + 1) \geq 0$

$2x^2 - 2nx + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{n \pm \sqrt{n^2-2}}{2}$; $f_n'(x) \geq 0$: $\quad \nearrow M_n \searrow m_n \nearrow$ $\quad \frac{n-\sqrt{n^2-2}}{2} \quad \frac{n+\sqrt{n^2-2}}{2}$



$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-2}}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-\sqrt{n^2-2})(n+\sqrt{n^2-2})}{2(n+\sqrt{n^2-2})} =$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - n^2 + 2}{2(n+\sqrt{n^2-2})} = 0$. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+\sqrt{n^2-2}}{2} = +\infty$.

Preso $[0;b]$, con $b>0$, risulta: $\sup\{|f_n(x) - f(x)|\} = f(M_n)$ o $f(b)$ ma comunque $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0;b]} \{|f_n(x) - f(x)|\} = 0$ e quindi la convergenza è uniforme in ogni intervallo $[0;b]$, con $b>0$.

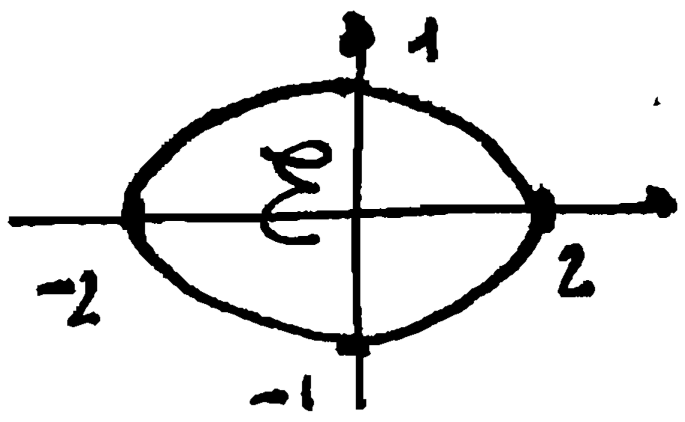
Studiamo ora $\sum_{n:0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n:0}^{+\infty} x\cdot e^{x^2-2nx}$. Essendo:

$\sum_{n:0}^{+\infty} x\cdot e^{x^2-2nx} = \sum_{n:0}^{+\infty} x\cdot e^{x^2}\cdot(e^{-2x})^n = x\cdot e^{x^2}\cdot \sum_{n:0}^{+\infty} (e^{-2x})^n$, studiabile come serie geometrica di ragione $q = e^{-2x}$. Sarà convergente se:

$|e^{-2x}| < 1 \Rightarrow e^{-2x} < 1 \Rightarrow -2x < 0 \Rightarrow x > 0$. Per $x = 0$ è convergente perché $f_n(0) = 0$. Quindi $C = [0;+\infty[$. La funzione somma sarà:

$S(x) = x\cdot e^{x^2}\cdot \frac{1}{1-e^{-2x}} = \frac{x\cdot e^{x^2}\cdot e^{2x}}{e^{2x}-1} = x\cdot \frac{e^{x^2+2x}}{e^{2x}-1}$.

II M1) $\begin{cases} \text{Max/min } f(x;y) = x^2 - y^2 - 2x \\ \text{s.v. } x^2 + 4y^2 \leq 4 \end{cases}$



$\boxed{\text{CAM3}}$

$f(x;y)$ è continua e differenziabile, l'insieme $\mathcal{E}$ è un insieme limitato e chiuso, il vincolo è ovunque qualificato.

$$\Lambda = x^2 - y^2 - 2x - \lambda\,(x^2 + 4y^2 - 4)$$

Caso $\lambda = 0$

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 2 = 0 \\ \Lambda'_y = -2y = 0 \\ x^2 + 4y^2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ 1 + 0 \leq 4 : \text{vera} \end{cases} ;\ H(x;y) = H(1;0) = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix} : \text{punto di Sella.}$$

Caso $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 2 - 2\lambda x = 0 \\ \Lambda'_y = -2y - 8\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y\,(1 + 4\lambda) = 0 \\ x - 1 = \lambda x \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 4 \\ \lambda = \frac{x-1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ \lambda = \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ \lambda = \frac{3}{2} > 0 \end{cases}$$

Max ? Max ?

oppure:

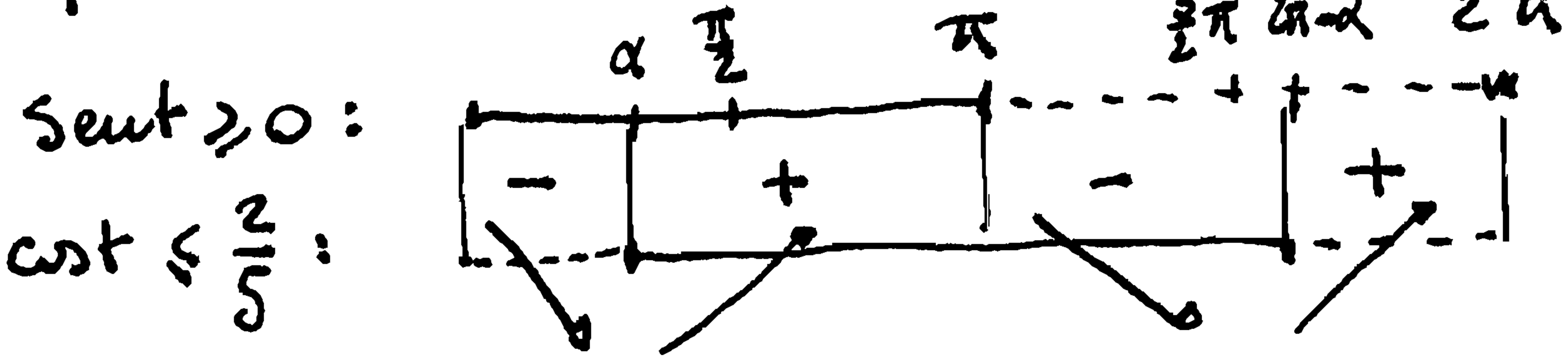
$$\begin{cases} \lambda = -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{4}x = 1 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \\ \frac{16}{25} + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{4} \\ x = \frac{4}{5} \\ y^2 = \frac{1}{4}\cdot\left(4 - \frac{16}{25}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{84}{25} = \frac{21}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{\sqrt{21}}{5} \\ \lambda = -\frac{1}{4} \end{cases} \cup \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = -\frac{\sqrt{21}}{5} \\ \lambda = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

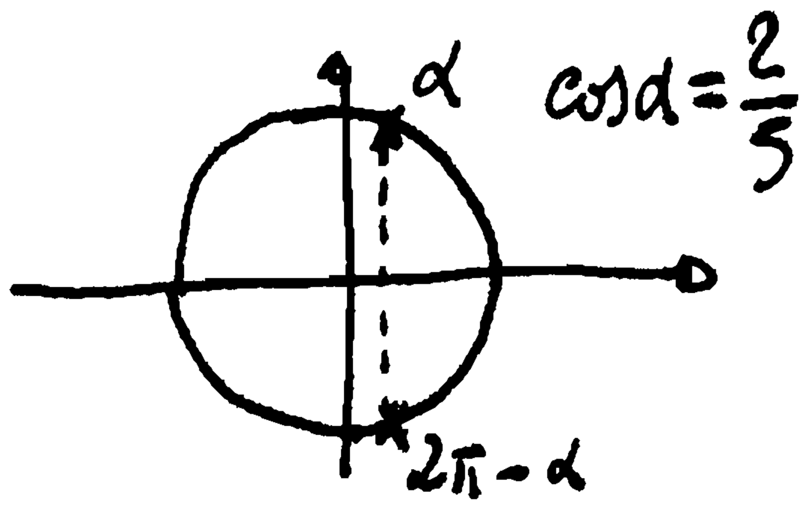
Min ? Min ?

Analisi sulla frontiera di $\mathcal{E}$. Poniamo $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(t) = 4\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t - 4\cos t = 5\cos^2 t - 4\cos t - 1.$

$f'(t) = 10\cos t \cdot (-\operatorname{sen} t) + 4\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t\,(4 - 10\cos t) = 2\operatorname{sen} t \cdot (2 - 5\cos t) \geq 0$





Quindi $(2;0)$ e $(-2;0)$ sono punti di Massimo.

Essendo $f(2;0) = 0$ e $f(-2;0) = 8$, $(2;0)$ è punto di Massimo relativo mentre $(-2;0)$ è punto di Massimo assoluto.

Essendo $f\left(\frac{4}{5};\frac{\sqrt{21}}{5}\right) = f\left(\frac{4}{5};-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) = -\frac{7}{5}$ questi sono due punti di minimo assoluto.

II M2) $\begin{cases} x' = 3x + y + 24t \\ y' = -x + 3y + 10t^2 + 40t. \end{cases}$ Scriviamo il sistema come: $\boxed{\text{CAM4}}$

$$\begin{cases} x' - 3x - y = 24t \\ x + y' - 3y = 10t^2 + 40t \end{cases} \Rightarrow \left\| \begin{matrix} D-3 & -1 \\ 1 & D-3 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 24t \\ 10t^2 + 40t \end{matrix} \right\|.$$

Risolviamo l'equazione omogenea rispetto a $x(t)$.

$$\left| \begin{matrix} D-3 & -1 \\ 1 & D-3 \end{matrix} \right| (x) = (D^2 - 6D + 9 + 1)(x) = (D^2 - 6D + 10)(x) = x'' - 6x' + 10x = 0.$$

Polinomio Caratteristico: $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0 : \lambda = 3 \pm \sqrt{9-10} = 3 \pm i.$

Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea per $x(t)$ risulta: $x(t) = c_1 e^{3t} \operatorname{sen} t + c_2 e^{3t} \cos t.$

Risolviamo sempre rispetto a $x(t)$ il sistema non omogeneo. Si ha:

$$\left| \begin{matrix} D-3 & -1 \\ 1 & D-3 \end{matrix} \right| (x) = \left| \begin{matrix} 24t & -1 \\ 10t^2 + 40t & D-3 \end{matrix} \right| \Rightarrow x'' - 6x' + 10x = (D-3)(24t) + 1(10t^2 + 40t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'' - 6x' + 10x = 24 - 72t + 10t^2 + 40t = 10t^2 - 32t + 24.$$

Ipotizziamo una soluzione particolare del tipo $x_0 = at^2 + bt + c$.

Per cui: $x_0' = 2at + b$; $x_0'' = 2a$ e sostituendo nell'equazione:

$2a - 12at - 6b + 10at^2 + 10bt + 10c = 10t^2 - 32t + 24$ da cui:

$$\begin{cases} 10a = 10 \\ 10b - 12a = -32 \\ 2a - 6b + 10c = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow x_0 = t^2 - 2t + 1.$$

Quindi la soluzione generale per $x(t)$ è: $x(t) = c_1 e^{3t} \operatorname{sen} t + c_2 e^{3t} \cos t + t^2 - 2t + 1.$

Dalla prima equazione si ottiene: $y = x' - 3x - 24t$ da cui:

$$y = \cancel{3c_1 e^{3t} \operatorname{sen} t} + c_1 e^{3t} \cos t + \cancel{3c_2 e^{3t} \cos t} - c_2 e^{3t} \operatorname{sen} t + 2t - 2 +$$
$$- \cancel{3c_1 e^{3t} \operatorname{sen} t} - \cancel{3c_2 e^{3t} \cos t} - 3t^2 + 6t - 3 - 24t \text{ per cui:}$$

$$y(t) = c_1 e^{3t} \cos t - c_2 e^{3t} \operatorname{sen} t - 3t^2 - 16t - 5.$$

Soluzione Generale: $\left\| \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix} \right\| = c_1 \left\| \begin{matrix} e^{3t} \operatorname{sen} t \\ e^{3t} \cos t \end{matrix} \right\| + c_2 \left\| \begin{matrix} e^{3t} \cos t \\ -e^{3t} \operatorname{sen} t \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} t^2 - 2t + 1 \\ -3t^2 - 16t - 5 \end{matrix} \right\|.$

II M 3) $\begin{cases} xy' = e^{y}\cdot(x-1) \\ y(1)=1 \end{cases}$. Equazione a variabili separabili.

CAM 5

Posto $x \neq 0 \Rightarrow e^{-y}\cdot y' = \frac{x-1}{x} = 1-\frac{1}{x} \Rightarrow \int e^{-y}\,dy = \int 1-\frac{1}{x}\,dx + k \Rightarrow$

$\Rightarrow -e^{-y} = x - \log x + k \Rightarrow e^{-y} = \log x - x + m \Rightarrow -y = \log(\log x - x + m) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\log(\log x - x + m)$.

$y(1)=1 \Rightarrow 1 = -\log(\log 1 - 1 + m) \Rightarrow \log(m-1) = -1 \Rightarrow m-1 = \frac{1}{e} \Rightarrow m = 1+\frac{1}{e}$.

Soluzione al problema di Cauchy: $y = -\log\left(\log x - x + 1 + \frac{1}{e}\right)$.

II M4) $f(x;y) = x^2y - 2xy$: funzione continua e differenziabile due volte.

$\nabla f(x;y) = (2xy-2y;\ x^2-2x)$; $H(x;y) = \begin{Vmatrix} 2y & 2x-2 \\ 2x-2 & 0 \end{Vmatrix}$.

versore di v : $\left(\frac{1}{\sqrt2};\frac{1}{\sqrt2}\right)$.

$\mathcal{D}_v f(x_0;y_0) = \nabla f(x_0;y_0) = (2x_0y_0-2y_0;\ x_0^2-2x_0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt2};\frac{1}{\sqrt2}\right) = -2\sqrt2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x_0y_0 - 2y_0 + x_0^2 - 2x_0 = -4$.

$\mathcal{D}^2_{v,v} f(x_0;y_0) = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2y_0 & 2x_0-2 \\ 2x_0-2 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \end{Vmatrix} = 2y_0\cdot\frac{1}{2} + 2(2x_0-2)\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} =$

$= y_0 + 2x_0 - 2 = 0 \Rightarrow y_0 = 2-2x_0$ e sostituendo nella prima equazione:

$2x_0(2-2x_0) - 2(2-2x_0) + x_0^2 - 2x_0 = -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x_0 - 4x_0^2 \cancel{-4} + 4x_0 + x_0^2 - 2x_0 = \cancel{-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x_0^2 + 6x_0 = -3x_0(x_0-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \text{ e } y_0 = 2 \\ x_0 = 2 \text{ e } y_0 = -2 \end{cases}$.

Abbiamo due punti : $(0;2)$ e $(2;-2)$ come soluzione del problema.