Compito di Analisi Matematica del 23/9/2014 AM1

IM1) $\frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-1-2i}{1+1} = -\frac{2i}{2} = -i = 1 \cdot \left(\cos\frac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\right)$.

$\sqrt[4]{\frac{1-i}{1+i}} = \sqrt[4]{-i} = \cos\left(\frac{3}{8}\pi + k \cdot \frac{2\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3}{8}\pi + k\cdot\frac{2\pi}{4}\right);\ 0 \le K \le 3.$

Per $K=0$: $\cos\frac{3}{8}\pi + i \operatorname{sen}\frac{3}{8}\pi$; per $K=1$: $\cos\frac{7}{8}\pi + i\operatorname{sen}\frac{7}{8}\pi$;

per $K=2$: $\cos\frac{11}{8}\pi + i\operatorname{sen}\frac{11}{8}\pi$; per $K=3$: $\cos\frac{15}{8}\pi + i\operatorname{sen}\frac{15}{8}\pi$.

IM2) $f(x;y;z) = x^2y - xz^2 - z^2 + x^2$

$\nabla f(x;y;z) = (2xy - z^2 + 2x;\ x^2;\ -2xz - 2z)$

$H(f(x;y;z)) = \begin{Vmatrix} 2y+2 & 2x & -2z \\ 2x & 0 & 0 \\ -2z & 0 & -2x-2 \end{Vmatrix}$. Se $x=0;\ y=-1;\ z=0$: $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix} \neq \mathbb{O}$;

se $x=-1;\ y=-1;\ z=0$: $\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \neq \mathbb{O}$. Quindi $H \neq \mathbb{O}\ \forall (x;y;z)$.

IM3) $f(x;y;z) = e^{x^2y^2z} - e^{xyz^2} = 0$; $f(1;1;0) = 1-1 = 0$.

$\nabla f(x;y;z) = \left(2xy^2z \cdot e^{x^2y^2z} - yz^2e^{xyz^2};\ 2x^2yz\, e^{x^2y^2z} - xz^2e^{xyz^2};\ x^2y^2e^{x^2y^2z} - 2xyz\, e^{xyz^2}\right)$.

$\nabla f(1;1;0) = (0\cdot1 - 0\cdot1;\ 0\cdot1 - 0\cdot1;\ 1\cdot1 - 0\cdot1) = (0;0;1)$. $f'_z(P) \neq 0$.

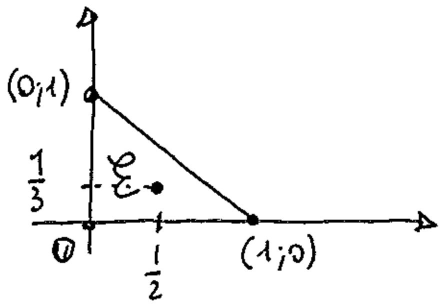
$\frac{\partial z}{\partial x}(P) = -\frac{0}{1} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial y}(P) = -\frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \nabla z(1;1) = (0;0)$.

IM4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cdot 3^n}{n!}(x+1)^n$. Centro $x_0 = -1$.

$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\cdot 3^n}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{(n+1)\cdot 3^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot(n+1) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{3} = +\infty.$

La serie di potenze risulta convergente $\forall x \in \mathbb{R}$.

IIM1) $\begin{cases} \text{Max/min } f(x;y) = 6xy - 2x - 3y \\ \text{s.v. } \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ y \le 1-x \end{cases} \end{cases}$



Massimi e minimi liberi:

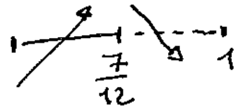
$\begin{cases} f'_x = 6y - 2 = 0 \\ f'_y = 6x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ $H = \begin{Vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{Vmatrix} = H\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$: $|H| = -36 < 0$: Punto di Sella.

Sull'asse x : $y=0 \Rightarrow f(x;0)=-2x$: funzione decrescente. $\boxed{AM2}$

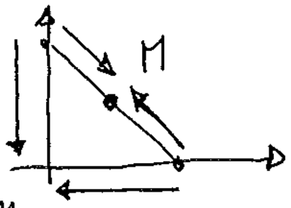
Sull'asse y : $x=0 \Rightarrow f(0;y)=-3y$: funzione decrescente.

Sulla retta $y=1-x$: $f(x;1-x)=6x(1-x)-2x-3(1-x)=6x-6x^2-2x-3+3x \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=-6x^2+7x-3$; $f'(x)=-12x+7\geq 0$ per $x\leq \frac{7}{12}$.



Conclusioni :



Il punto $\left(\frac{7}{12};\frac{5}{12}\right)$ è il punto di Massimo Assoluto;

Il punto $(0;0)$ è il punto di Minimo Assoluto.

II M2) $\begin{cases} x'=y \\ y'=x-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'-y=0 \\ -x+y'=-t \end{cases} \Rightarrow \left\|\begin{matrix} D & -1 \\ -1 & D\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} x \\ y\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0 \\ -t\end{matrix}\right\|$.

$\begin{vmatrix} D & -1 \\ -1 & D\end{vmatrix}(x) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -t & D\end{vmatrix} \Rightarrow (D^2-1)(x)=-t \Rightarrow x''-x=-t$. $\lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda_1=1; \lambda_2=-1$.

Soluzione equazione omogenea : $x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}$.

Da $(-t)$ pongo $x_0(t)=at+b \Rightarrow x_0'(t)=0; x_0''(t)=0$. Sostituendo:

$0-(at+b)=-t \Rightarrow -at-b=-t \Rightarrow a=1$ e $b=0$.

Soluzione generale della non omogenea per x : $x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}+t$.

Da $y=x' \Rightarrow y(t)=c_1e^t-c_2e^{-t}+1$.

II M3) $\begin{cases} y'-2y=x \\ y(0)=1 \end{cases} \Rightarrow y(x)=e^{-\int -2\,dx}\cdot\left[\int x\cdot e^{\int -2dx}dx+k\right]=e^{2x}\cdot\left[\int xe^{-2x}dx+k\right]=$

$=e^{2x}\cdot\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\int -\frac{1}{2}e^{-2x}dx+k\right)=e^{2x}\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+k\right)=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+k\cdot e^{2x}$.

$y(0)=1 \Rightarrow 0-\frac{1}{4}+k=1 \Rightarrow k=\frac{5}{4}$. Soluzione: $y(x)=\frac{5}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

II M4) $F(x;y)=(2xe^y-ye^x+2;x^2e^y-e^x-1)\overset{?}{=}\nabla f(x;y)$.

$f'_x=2xe^y-ye^x+2 \Rightarrow \int 2xe^y-ye^x+2\,dx=x^2e^y-ye^x+2x+k(y)$.

$f'_y=x^2e^y-e^x-1 \Rightarrow \int x^2e^y-e^x-1\,dy=x^2e^y-ye^x-y+h(x)$.

La funzione data è un gradiente, quello della funzione

$f(x;y)=x^2e^y-ye^x+2x-y$.

La soluzione più generale è $f(x;y)=x^2e^y-ye^x+2x-y+k$; $k\in\mathbb{R}$.