Compito di Analisi Matematica del 17/2/2015 $\boxed{AM1}$

IM1) $e^{\log 2+\frac{5}{3}\pi i} = e^{\log 2}\cdot e^{\frac{5}{3}\pi i} = 2\cdot\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{3}\pi\right) = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1-\sqrt{3}\cdot i.$

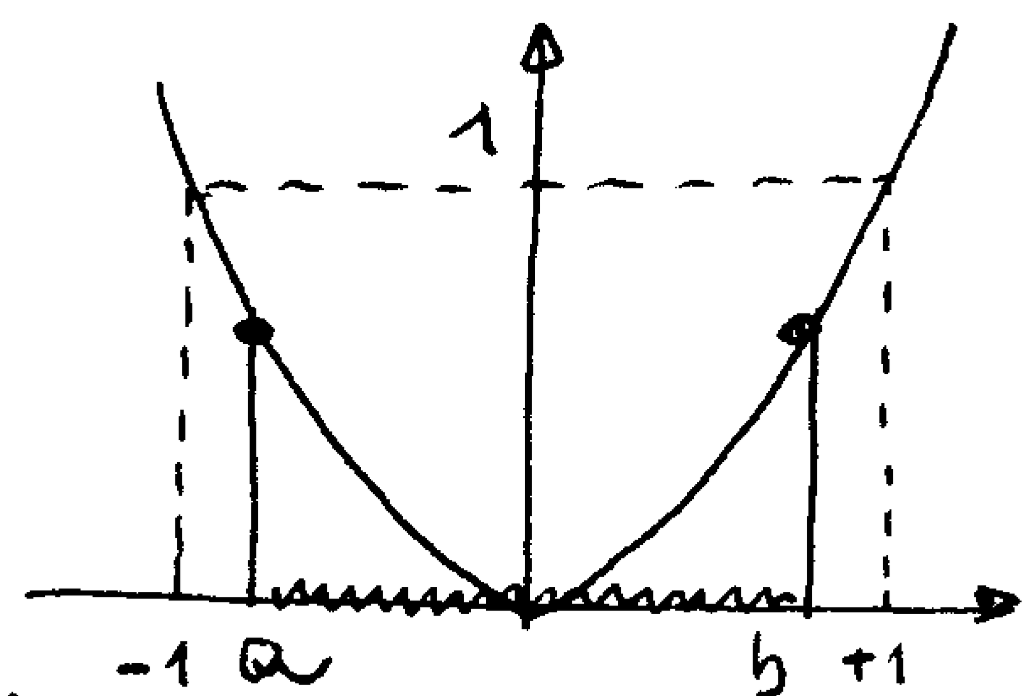
$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{5}{9}\pi + k\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{9}\pi + k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right);\ 0\le k\le 2$

$k=0: \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5}{9}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{5}{9}\pi\right)$; $k=1: \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11}{9}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{11}{9}\pi\right)$; $k=2: \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17}{9}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{17}{9}\pi\right)$.

IM2) $f_n(x) = x^{2n} - x^2$. $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} -x^2 : |x|<1 \Rightarrow -1<x<1 \\ 0 : x=\pm 1 \\ +\infty : |x|>1 \end{cases}$; $f(x) = \begin{cases} -x^2 : -1<x<1 \\ 0 : x=\pm 1 \end{cases}$.

$\mathcal{C} = [-1;+1]$.

Studiamo $\sup_{x\in[-1;+1]}\{|f_n(x)-f(x)|\}$. Risulta $f_n(x)-f(x) = x^{2n}-x^2-(-x^2) = x^{2n}$ $\forall x\in\,]-1;+1[$. Esaminando il grafico di $f_n(x)-f(x) = x^{2n}$ si vede che in ogni intervallo $[a;b]\subset\,]-1;+1[$ risulta:



$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[a;b]}\{|f_n(x)-f(x)|\} = \lim_{n\to+\infty} a^{2n}$ oppure $\lim_{n\to+\infty} b^{2n}$ sempre comunque $=0$

e quindi la convergenza è uniforme in ogni $[a;b]\subset\,]-1;+1[$.

IM3) $f(x;y) = x^2 - xy^2$: funzione differenziabile due volte.

$\nabla f(x;y) = (2x-y^2; -2xy)$. $H(x;y) = \begin{Vmatrix} 2 & -2y \\ -2y & -2x \end{Vmatrix}$. $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$D_u f(x;y) = \nabla f(x;y)\cdot u = (2x-y^2; -2xy)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(2x-y^2-2xy)$

$D^2_{u,v} f(x;y) = u\cdot H\cdot v^T = \begin{Vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 2 & -2y \\ -2y & -2x\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(2+2y) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-2y+2x)\end{Vmatrix} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(2+2y-2y+2x) = \frac{1}{2}\cdot(2+2x) = 1+x.$

Quindi si ha il sistema: $\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(2x-y^2-2xy) = \sqrt{2} \\ 1+x = 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-y^2-2y = 2 \\ x=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(y+2)=0 \\ x=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0\end{cases}$ e $\begin{cases} x=1 \\ y=-2.\end{cases}$

Ci sono due punti: $(1;0)$ e $(1;-2)$.

I M4) $f(x;y)=y\log x - xe^y + x = 0$; $f(1;0)=0-1+1=0$.

$\nabla f(x;y)=\left(y\cdot\frac{1}{x}-e^y+1 ;\ \log x - xe^y\right)$; $\nabla f(1;0)=(0-1+1 ; 0-1)=(0;-1)$.

Dato che $f'_y(1;0)\neq 0$ si può definire una funzione implicita : $x\to y(x)$.

$y'(1) = -\frac{f'_x(1;0)}{f'_y(1;0)} = -\frac{0}{-1}=0$. $H(x;y)=\begin{Vmatrix} -y\cdot\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} - e^y \\ \frac{1}{x} - e^y & -xe^y\end{Vmatrix}$; $H(1;0)=\begin{Vmatrix}0&0\\0&-1\end{Vmatrix}$.

$$y''(1) = -\frac{f''_{xx}(1;0)+2f''_{xy}(1;0)\cdot y' + f''_{yy}(1;0)\cdot(y')^2}{f'_y} = -\frac{0+2\cdot 0\cdot 0+(-1)\cdot(0)^2}{-1}=0.$$

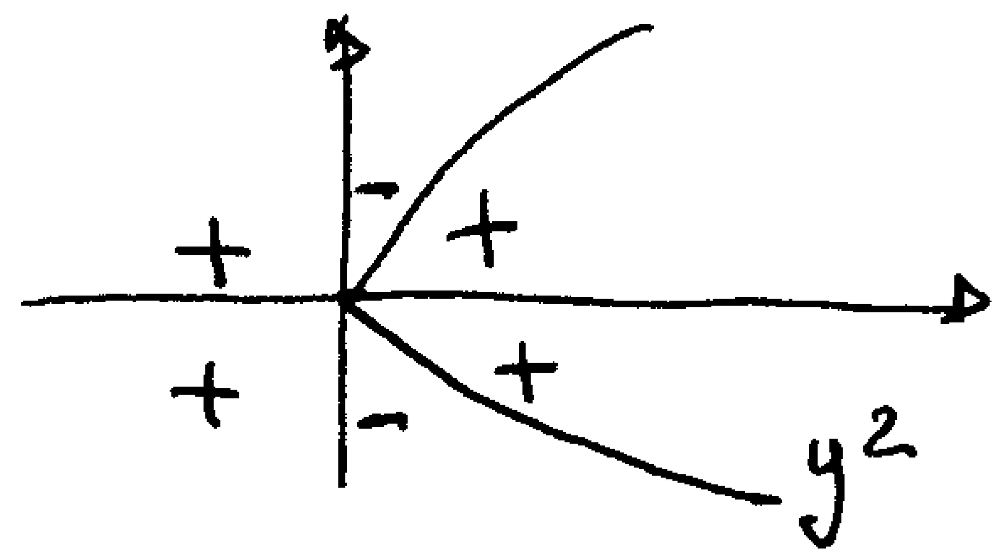
II M1) $f(x;y) = x^2-xy^2+kxy$

$\nabla f(x;y)=(0;0) \Rightarrow \begin{cases} f'_x=2x-y^2+ky=0 \\ f'_y=-2xy+kx=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(k-2y)=0 \\ 2x-y^2+ky=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y(k-y)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0\end{cases} \cup \begin{cases} x=0 \\ y=k\end{cases}$

oppure $\begin{cases} y=\frac{k}{2} \\ 2x-\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{2}=2x+\frac{k^2}{4}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{k^2}{8} \\ y=\frac{k}{2}\end{cases}$. Tre Punti Stazionari : $(0;0)$; $(0;k)$; $\left(-\frac{k^2}{8};\frac{k}{2}\right)$.

$H(x;y)=\begin{Vmatrix} 2 & k-2y \\ k-2y & -2x\end{Vmatrix}$. $H(0;0)=\begin{Vmatrix} 2 & k \\ k & 0\end{Vmatrix}$. Se $k\neq 0$: $|H_2|=0-k^2<0$: Punto di Sella $\forall k\neq 0$.

Se $k=0$: $f(x;y)=x^2-xy^2=x(x-y^2)$; $f(0;0)=0$; $f(x;y)\geq 0$:



Per $k=0$ il punto $(0;0)$ è un punto di Sella.

$H(0;k)=\begin{Vmatrix} 2 & -k \\ -k & 0\end{Vmatrix}$. Se $k\neq 0$: $|H_2|=0-k^2<0$: Punto di Sella $\forall k\neq 0$.

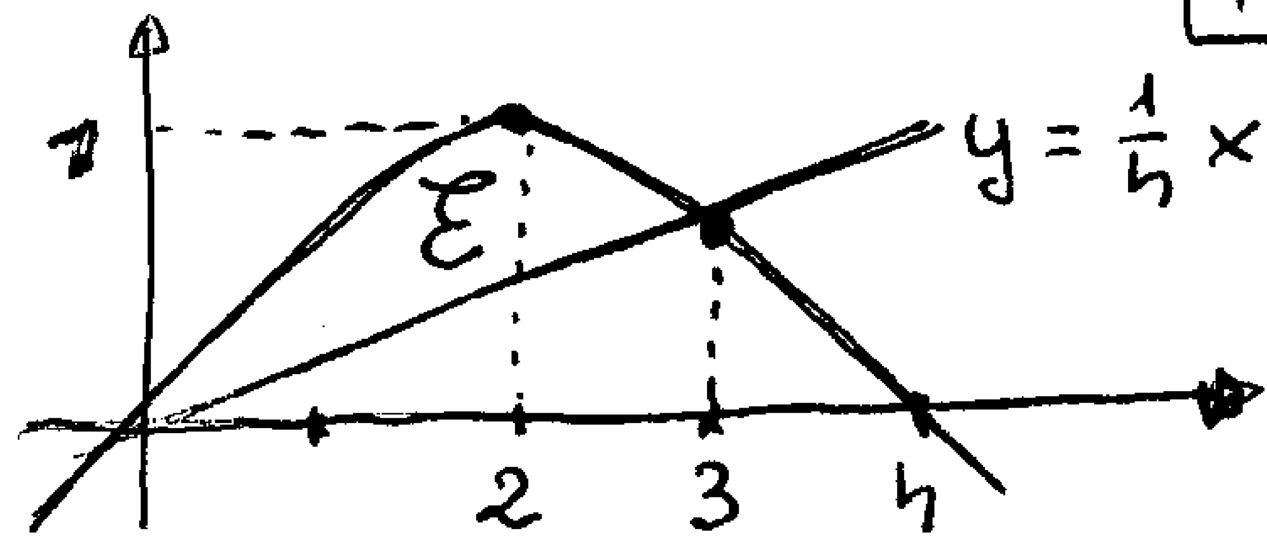
Se $k=0$ si torna al punto $(0;0)$ già studiato.

$H\left(-\frac{k^2}{8};\frac{k}{2}\right)=\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{k^2}{4}\end{Vmatrix}$. Se $k\neq 0$: $\begin{cases} 2>0 ; \frac{k^2}{4}>0 \\ \frac{k^2}{2}-0>0\end{cases}$: Punto di minimo.

Se $k=0$ si torna al punto $(0;0)$ già studiato.

AM3

II M 2) $\begin{cases} \text{Max/min } f(x;y) = x\cdot y \\ \text{s.v.} \begin{cases} x^2-4x+4y \le 0 \\ x-4y \le 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Max/min } f(x;y) = x\cdot y \\ \text{s.v.} \begin{cases} y \le -\frac{1}{4}x^2+x \\ y \ge \frac{1}{4}x \end{cases} \end{cases}$



$\mathcal{E}$ è un insieme limitato e chiuso. I vincoli sono qualificati.

$f(x;y)$ è una funzione continua, quindi per il Teorema di Weierstrass esistono il Massimo ed il minimo.

$$\Lambda = xy - \lambda_1(x^2-4x+4y) - \lambda_2(x-4y)$$

Se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y = 0 \\ \Lambda'_y = x = 0 \\ x^2-4x+4y \le 0 \\ x-4y \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 0 \le 0 \\ 0 \le 0 \end{cases}. \quad H(x;y) = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\|; \ |H_2| = -1 < 0:$$

Per Massimi e minimi liberi è un punto di Sella.

Se $\lambda_1 \ne 0$ e $\lambda_2 = 0$

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y - 2\lambda_1 x + 4\lambda_1 = 0 \\ \Lambda'_y = x - 4\lambda_1 = 0 \\ y = x - \frac{x^2}{4} \\ y \ge \frac{1}{4}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4\lambda_1 \\ y - 8\lambda_1^2 + 4\lambda_1 = 0 \\ y = x - \frac{x^2}{4} \\ y \ge \frac{1}{4}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4\lambda_1 \\ y = 8\lambda_1^2 - 4\lambda_1 \\ 8\lambda_1^2 - 4\lambda_1 = 4\lambda_1 - 4\lambda_1^2 \\ y \ge \frac{1}{4}x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\lambda_1^2 + 8\lambda_1 = 4\lambda_1(3\lambda_1 - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ oppure } \lambda_1 = \frac{2}{3}.$$

$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ 0 \ge 0 \end{cases}$ già studiato; $\begin{cases} \lambda_1 = \frac{2}{3} > 0 \\ x = \frac{8}{3} \\ y = \frac{8}{3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{64}{9} = \frac{96-64}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} \ge \frac{8}{12} \text{ Vera.} \end{cases}$ $: \left(\frac{8}{3}; \frac{8}{9}\right)$: Max ??

Se $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \ne 0$

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y - \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = x + 4\lambda_2 = 0 \\ y = \frac{1}{4}x \\ y \le x - \frac{x^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4\lambda_2 \\ y = \lambda_2 \\ \lambda_2 = \frac{1}{4}\cdot(-4\lambda_2) \\ y \le x - \frac{x^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ 0 \le 0 \text{ Vera} \end{cases}$$

$(0;0)$ già studiato.

Se $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y - 2\lambda_1 x + 4\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = x - 4\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ \begin{cases} y = x - \frac{x^2}{4} \\ y = \frac{1}{4}x \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x = x - \frac{x^2}{4} \\ y = \frac{1}{4}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ y = \frac{1}{4}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-3) = 0 \\ y = \frac{1}{4}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

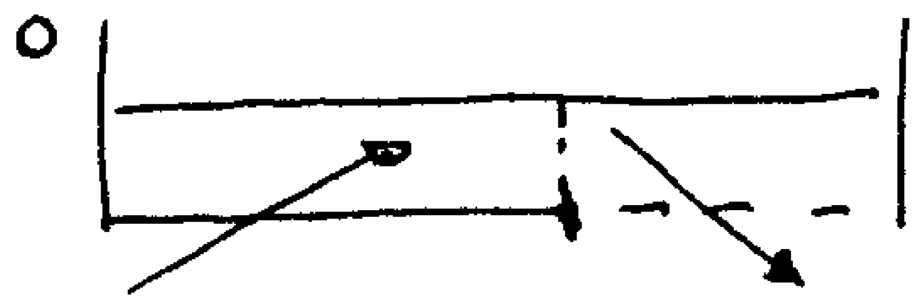
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 4\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -4\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \text{ già visto. } \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} - 6\lambda_1 + 4\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 3 - 4\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{3}{4} \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{3}{4} \\ 4\lambda_1 - 4\lambda_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{3}{4} \\ \lambda_2 = \frac{3}{4} - 2\lambda_1 \\ 4\lambda_1 - 3 + 8\lambda_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{3}{4} \\ 12\lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = \frac{3}{4} - 2\lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{3}{4} \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} > 0 \\ \lambda_2 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4} < 0 \end{cases}$$

Dato che $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ il punto $\left(3; \frac{3}{4}\right)$ non è né di Massimo né di minimo.

Se $y = x - \frac{x^2}{4}$: $f(x) = x \cdot \left(x - \frac{x^2}{4}\right) = x^2 - \frac{x^3}{4}$; $f'(x) = 2x - \frac{3}{4}x^2 = x\left(2 - \frac{3}{4}x\right) \geq 0 \Rightarrow$

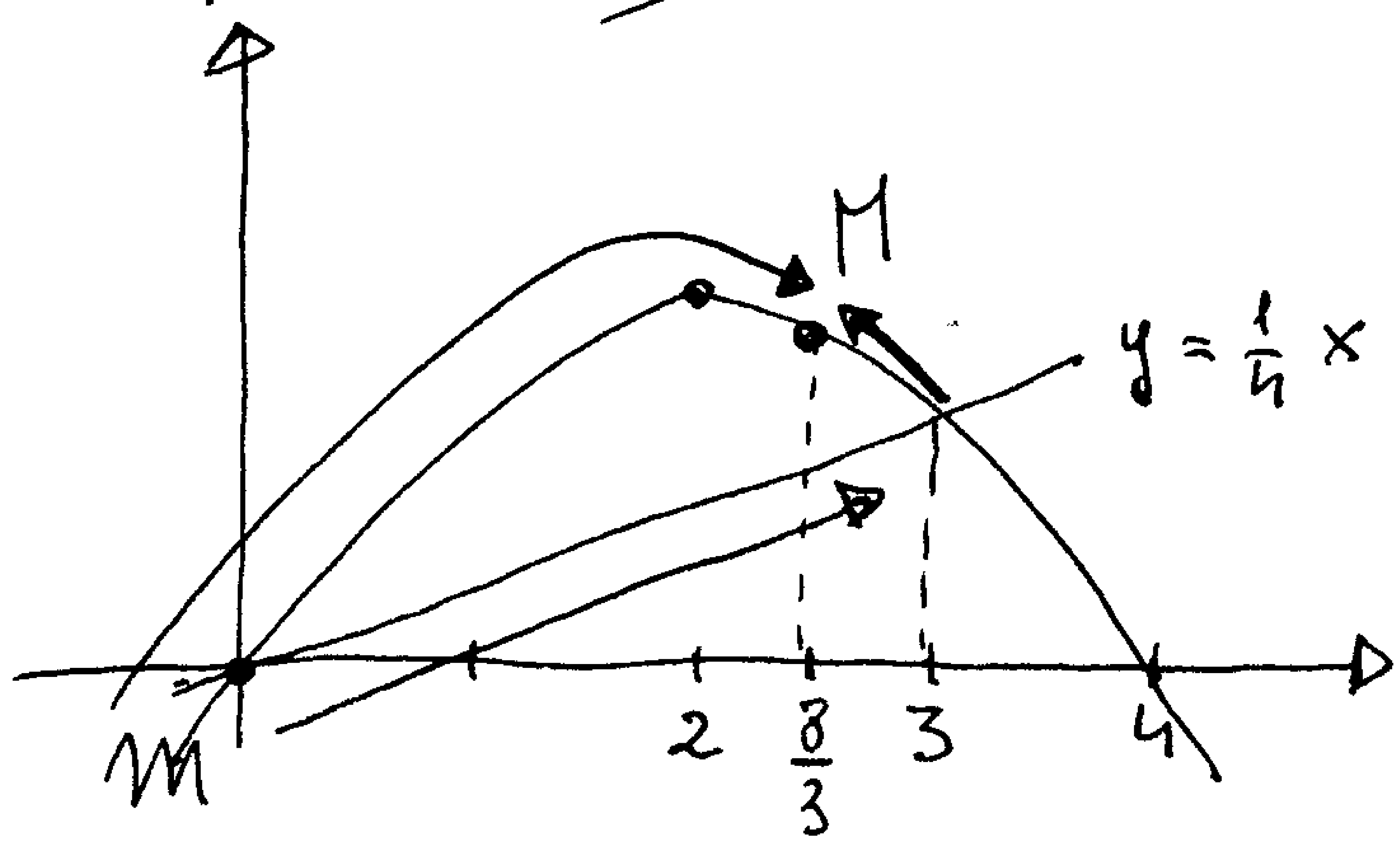
$$\Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x \geq 0 \\ 2 - \frac{3}{4}x \geq 0 \end{matrix} \right. \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x \geq 0 \\ x \leq \frac{8}{3} \end{matrix} \right.$$



Punto di Massimo in $\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{9}\right)$.

Se $y = \frac{1}{4}x$: $f(x) = x \cdot \frac{1}{4}x = \frac{1}{4}x^2$; $f'(x) = \frac{1}{2}x \geq 0$ per $x \geq 0$

Come si vede dall'andamento sulla frontiera, il punto $\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{9}\right)$ è il punto di Massimo assoluto con $f\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{9}\right) = \frac{64}{27}$; il punto $(0;0)$ non è un punto di Sella ma per questo problema è un punto di minimo, con $f(0;0) = 0$.



II M3) $\begin{cases} y' - y = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow y' = y^2 + y \Rightarrow \int \frac{1}{y^2 + y}\, dy = \int 1\, dx + K$; $y^2 + y = y(y+1) \neq 0 \left\langle \begin{matrix} y \neq 0 \\ y \neq -1 \end{matrix} \right.$

AM5

$$\int \frac{1}{y^2+y}\,dy = \int \frac{1}{y(y+1)}\,dy = \int \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\,dy = \int 1\,dx + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log y - \log(y+1) = x+K \Rightarrow \log\frac{y}{y+1} = x+K \Rightarrow \frac{y}{y+1} = e^{x+K} = e^x \cdot e^K = m\cdot e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = me^x \cdot y + me^x \Rightarrow y(1-me^x) = me^x \Rightarrow y = \frac{me^x}{1-me^x}.$$

$y(0)=1 \Rightarrow 1 = \frac{m}{1-m} \Rightarrow 1-m = m \Rightarrow m = \frac{1}{2}$: $y = \frac{e^x}{2-e^x}$ Soluzione problema.

$y=0$ si ha per $m=0$ ma $m = e^K$ ovvero per $K \to -\infty$

$y=-1$ si ha per $m \to +\infty$ ma $m = e^K$ ovvero per $K \to +\infty$.

II M4) $\begin{cases} x' = x+y \\ y' = x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' - x - y = 0 \\ -x + y' + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Vmatrix} D-1 & -1 \\ -1 & D+1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$

$$\begin{vmatrix} D-1 & -1 \\ -1 & D+1 \end{vmatrix}(x) = (D^2-1-1)(x) = (D^2-2)(x) = x'' - 2x = 0.$$

$$t^2 - 2 = 0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2}$$

Quindi $x(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}$.

Da $y = x' - x$ si ha: $y = c_1\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}t} - c_2\sqrt{2}\,e^{-\sqrt{2}t} - c_1 e^{\sqrt{2}t} - c_2 e^{-\sqrt{2}t}$

e quindi $y(t) = c_1(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t} + c_2(-\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t}$.

Soluzione generale del sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ y(t) = c_1(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t} + c_2(-\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t}. \end{cases}$$