Compito di Analisi Matematica del 4/9/2015 $\boxed{\text{CAM 1}}$

IM1) $x^4+x^3-2x^2+4x-24=0$; se $x=2$: $16+8-8+8-24=0$

	1	1	-2	4	-24
2		2	6	8	24
	1	3	4	12	0

$x^4+x^3-2x^2+4x-24=(x-2)(x^3+3x^2+4x+12)=0.$

Se $x=-3$: $-27+27-12+12=0.$

	1	3	4	12
-3		-3	0	-12
	1	0	4	0

$x^4+x^3-2x^2+4x-24=(x-2)(x+3)(x^2+4)=0.$

$x^2+4=0 \Rightarrow x=\pm 2i$. Radici: $x_1=2$; $x_2=-3$; $x_3=2i$; $x_4=-2i$.
Radice di modulo massimo: $x_2=-3$.

$-3=3(\cos\pi+i\,\mathrm{sen}\,\pi)$. $\sqrt[3]{-3}=\sqrt[3]{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\right)\right)$; $0\le k\le 2$.

$\underline{k=0}$: $\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\underline{k=1}$: $\sqrt[3]{3}(\cos\pi+i\,\mathrm{sen}\,\pi)=-\sqrt[3]{3}$;

$\underline{k=2}$: $\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\,\mathrm{sen}\frac{5}{3}\pi\right)=\sqrt[3]{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

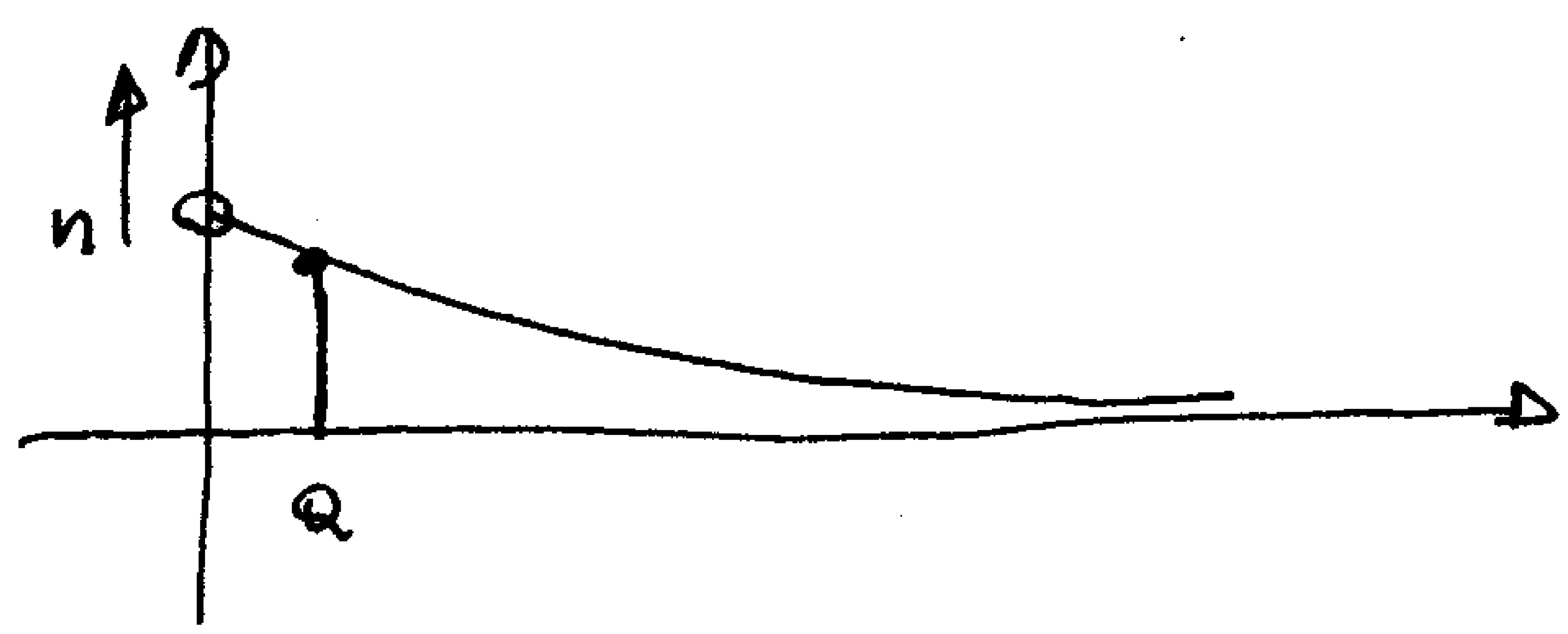
IM2) $f_n(x)=ne^{-nx}$. $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\begin{cases}0: & x>0\\ +\infty: & x\le 0\end{cases}$. $C=]0;+\infty[$; $f(x)=0$.

$f'(x)=-n^2e^{-nx}<0\ \forall x$ $\searrow$

$f''(x)=n^3e^{-nx}>0\ \forall x$ $\cup$

$\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=0^+$; $f_n(0)=n$

Grafico



In $[a;+\infty[$, con $a>0$: $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[a;+\infty[}\{|f_n(x)-f(x)|\}=\lim_{n\to+\infty} f_n(a)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Convergenza Uniforme in $[a;+\infty[$ $\forall a>0$.

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} n\cdot(e^{-x})^n \Rightarrow$ Criterio Radice: $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{(e^{-x})^n}=$

$=1\cdot e^{-x}<1$ se $x>0$. Insieme di convergenza Serie: $]0;+\infty[$.

IM3) $\begin{cases}f(x;y;z)=e^{x^2-2z^2-1}-y=0\\ g(x;y;z)=x^2-y^3-z^4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f(1;1;0)=1-1=0\\ g(1;1;0)=1-1=0\end{cases}$

$\frac{\partial(f;g)}{\partial(x;y;z)}=\begin{Vmatrix}2x\,e^{x^2-2z^2-1} & -1 & -4z\,e^{x^2-2z^2-1}\\ 2x & -3y^2 & -4z^3\end{Vmatrix}$; $\frac{\partial(f;g)}{\partial(x;y;z)}(1;1;0)=\begin{Vmatrix}2 & -1 & 0\\ 2 & -3 & 0\end{Vmatrix}$.

$\boxed{CAM2}$

Dato che $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6+2=-4 \neq 0$ si può definire $F: z \to (x(z); y(z))$.

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = 0 \ ; \ \frac{dy}{dz} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = 0.$$ Non esiste vettore tangente in $z=0$.

I M4) $f(x;y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$. $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(xy) \Rightarrow \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\rho\cos\alpha} = \lim_{\rho \to 0} \rho \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = 0$

ma non in modo uniforme, in quanto $\frac{1}{\cos\alpha}$ non è quantità che può essere maggiorata. Inoltre, posto $\frac{x^2+y^2}{x} = K$ (curve di livello) si ha:

$x^2+y^2-Kx=0$, equazione di una circonferenza di centro $(\frac{K}{2};0)$ e raggio $\frac{K}{2}$, quindi passante per $(0;0)$. Quindi $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ non esiste, la funzione non è continua e quindi non è differenziabile in $(0;0)$.

Derivate direzionali: $\lim_{t\to 0} \frac{f((0;0)+tv)-f(0;0)}{t}$ con $v=(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{t^2\cos^2\alpha + t^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{t\cos\alpha} \cdot \frac{1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$, se $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \frac{3}{2}\pi$.

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ o $\alpha = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow x=0$ e $f(x;y)=0 \Rightarrow \mathcal{D}f(x;y)=0$. La funzione ammette derivate direzionali in ogni direzione.

II M1) $\begin{cases} \text{Max/min } f(x;y) = 3x-2y \\ \text{s.v.: } xy = K \end{cases}$. $\Lambda(x;y) = 3x-2y-\lambda(xy-K)$.

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 3-\lambda y = 0 \\ \Lambda'_y = -2-\lambda x = 0 \\ xy = K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{\lambda} \\ y = \frac{3}{\lambda} \\ -\frac{6}{\lambda^2} = K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{\lambda} \\ y = \frac{3}{\lambda} \\ \lambda = \pm\sqrt{-\frac{6}{K}} \end{cases}$$. Il problema ha soluzioni solo se $K<0$.

$f\left(-2\cdot\sqrt{-\frac{K}{6}}; 3\sqrt{-\frac{K}{6}}; \sqrt{-\frac{6}{K}}\right) < 0$: Minimo ; $f\left(2\sqrt{-\frac{K}{6}}; -3\sqrt{-\frac{K}{6}}; -\sqrt{-\frac{6}{K}}\right) > 0$: Massimo.

II M2) $f(x;y) = xe^y - x^2y$. $\begin{cases} f'_x = e^y - 2xy = 0 \\ f'_y = xe^y - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^y - 2xy = 0 \\ x(e^y - x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ No soluzioni

CAM3

∘ Hume $\begin{cases} x = e^y \\ e^y - 2ye^y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e^y \\ e^y(1-2y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{e} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$. $H(x;y) = \begin{Vmatrix} -2y & e^y - 2x \\ e^y - 2x & xe^y \end{Vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow H(\sqrt{e}; \frac{1}{2}) = \begin{Vmatrix} -1 & -\sqrt{e} \\ -\sqrt{e} & e \end{Vmatrix}$. Dato che $-1 < 0$ e $e > 0$: Punto di Sella.

II M3) $\begin{cases} y' = e^{x+y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$. $y' = e^x \cdot e^y \Rightarrow e^{-y} \cdot y' = e^x \Rightarrow \int e^{-y} dy = \int e^x dx + k \Rightarrow$

$\Rightarrow -e^{-y} = e^x + k \Rightarrow e^{-y} = -e^x - k \Rightarrow -y = \log(-e^x - k) \Rightarrow y = -\log(-e^x - k)$.

$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = -\log(-1-k) \Rightarrow \log(-1-k) = -1 \Rightarrow -1-k = \frac{1}{e} \Rightarrow k = -1 - \frac{1}{e}$.

II M4) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x + t \end{cases} \Rightarrow x'' = 2x' + y' = 2x' - x + t \Rightarrow x'' - 2x' + x = t$.

$(D^2 - 2D + 1)(x) = 0 \Rightarrow (D-1)^2(x) = 0 \Rightarrow D_1 = D_2 = 1$: Sol. Omogenea: $x = c_1 e^t + c_2 t e^t$.

Posto $x_0(t) = at + b \Rightarrow x_0' = a$; $x_0'' = 0 \Rightarrow 0 - 2a + at + b = t \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -2a + b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow x_0(t) = t + 2$.

Soluzione della non omogenea: $x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + t + 2$.

Da $y = x' - 2x \Rightarrow c_1 e^t + c_2 e^t + c_2 t e^t + 1 - 2c_1 e^t - 2c_2 t e^t - 2t - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -c_1 e^t + c_2 e^t - c_2 t e^t - 2t - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + t + 2 \\ y(t) = -c_1 e^t + c_2 e^t (1-t) - 2t - 3 \end{cases}$.