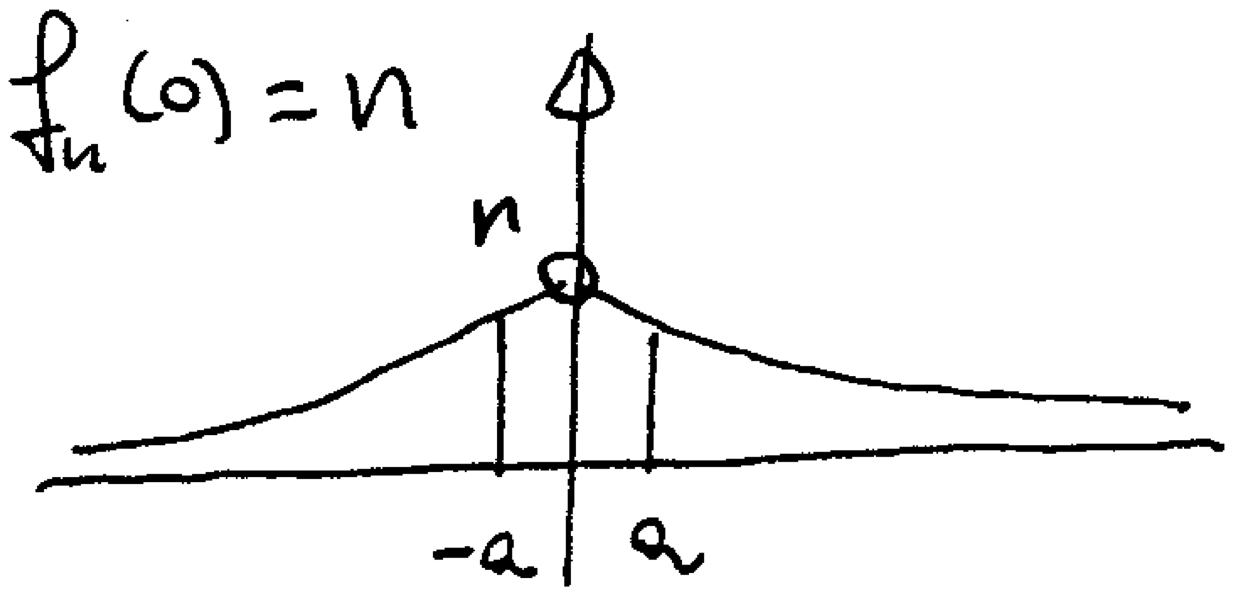
Compito di Analisi Matematica del 22/9/2015 $\boxed{\text{CAM1}}$

IM1) $\begin{cases} x+y=4 \\ x\cdot y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4-x \\ 4x-x^2=5 \end{cases} \Rightarrow x^2-4x+5=0 \Rightarrow x=2\pm\sqrt{4-5}=2\pm i \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x=2+i \\ y=2-i \end{cases} \cup \begin{cases} x=2-i \\ y=2+i \end{cases}.$

IM2) $f_n(x)=ne^{-nx^2}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=\begin{cases} 0 : x\neq 0 \\ +\infty : x=0 \end{cases}$. $\mathcal{C}=\mathbb{R}^*$; $f(x)=0$ per $x\neq 0$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_n(x)=0$. $f_n'(x)=-2n^2xe^{-nx^2}\geq 0$ per $x\leq 0$. $f_n(0)=n$



Preso $a>0$ si ha: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in]-\infty;-a]} \{|f_n(x)-f(x)|\}=$

$=\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[a;+\infty[} \{|f_n(x)-f(x)|\}=\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-na^2}=0$. Quindi

la convergenza è uniforme in ogni intervallo $]-\infty;-a]$ oppure $[a;+\infty[$, $a>0$.

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n\cdot(e^{-x^2})^n$. Con il criterio della Radice:

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{(e^{-x^2})^n}=1\cdot e^{-x^2}<1\ \forall x\neq 0.$

Se $x=0$: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n$: Serie divergente. Quindi $\mathcal{C}=\mathbb{R}^*$.

IIM3) $f(x;y;z)=e^{x^2-2z^2+y}+x-y+4z=5$. $f(1;1;1)=5$.

$f'_x=2xe^{x^2-2z^2+y}+1$; $f'_y=e^{x^2-2z^2+y}-1$; $f'_z=-4ze^{x^2-2z^2+y}+4$.

$\nabla f(1;1;1)=(3;0;0)$. Si può definire solo una funzione $(y;z)\to x$.

$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{0}{3}=0$; $\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{0}{3}$ $\Rightarrow$ Equazione piano tangente in $(y;z)=(1;1)$:

$x-1=0\cdot(y-1)+0\cdot(z-1) \Rightarrow x=1.$

IIM4) $f(x;y)=\begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} : (x;y)\neq(0;0) \\ 0 : (x;y)=(0;0) \end{cases}$. Vediamo se $f(x;y)\in\mathcal{C}(0;0)$.

CAM2

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^3\alpha}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cdot\cos^3\alpha = 0.$$

La convergenza è uniforme in quanto $|\rho\cdot\cos^3\alpha| \le \rho < \varepsilon$ con $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Sia $v = (\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha)$. $\mathcal{D}_v f(0;0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t\cos\alpha; 0+t\operatorname{sen}\alpha) - f(0;0)}{t} =$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{t^3\cos^3\alpha}{t^2\cos^2\alpha + t^2\operatorname{sen}^2\alpha} - 0\right)\cdot\frac{1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3\cos^3\alpha}{t^3} = \cos^3\alpha \quad \forall\alpha.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h;0) - f(0;0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^2\cdot h} = 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0;0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0;0+h) - f(0;0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h^2\cdot h} = 0.$$

Per la differenziabilità occorre verificare se: $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{f(x;y) - f(0;0) - \nabla f(0;0)\cdot(x-0;y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sia o no un limite che tende a 0.

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2} - 0 - (1;0)\cdot(x-0;y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^3 - x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho\to 0}\frac{-\rho^3\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha}{\rho^2\cdot\rho} = -\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha = 0 \text{ Solo se } \alpha = 0; \tfrac{\pi}{2}; \pi; \tfrac{3}{2}\pi.$$

Quindi la funzione non è differenziabile in $(0;0)$.

II M1) $\begin{cases} \text{Max/min } f(x;y) = x+y \\ \text{s.v. } xy = K. \end{cases}$ $\quad \Lambda = x + y - \lambda(xy - K)$

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 - \lambda y = 0 \\ \Lambda'_y = 1 - \lambda x = 0 \\ xy = K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda^2} = K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{K}} \end{cases}$$

. Il problema ha soluzioni solo per $K > 0$.

Se $\lambda = \frac{1}{\sqrt{K}} \Rightarrow (x = \sqrt{K}; y = \sqrt{K})$; $f(x;y) = 2\sqrt{K}$: Max.

Se $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{K}} \Rightarrow (x = -\sqrt{K}; y = -\sqrt{K})$; $f(x;y) = -2\sqrt{K}$: Min.

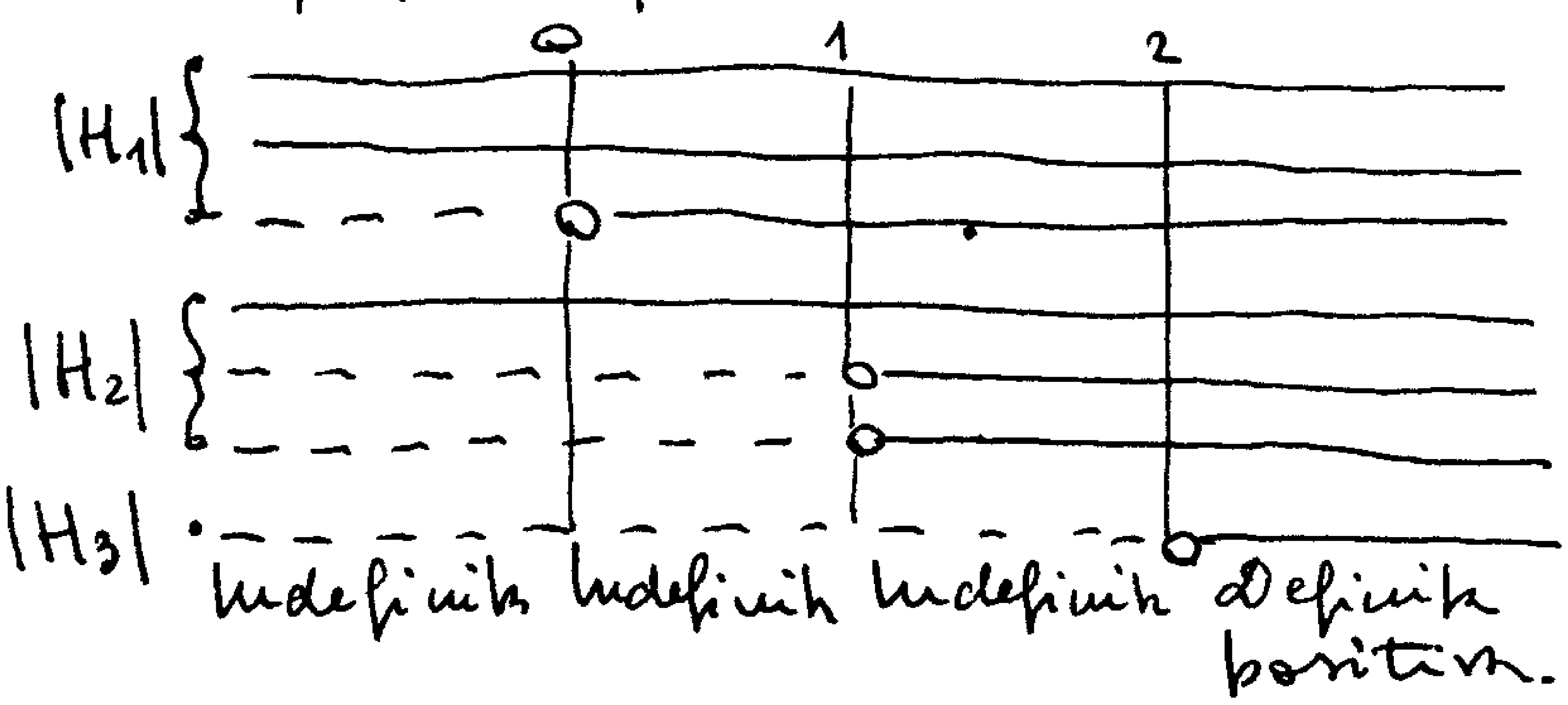
CAM3

II M2) $Q(dx;dy;dz) = \begin{Vmatrix} dx & dy & dz \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & K \end{Vmatrix} \circ \begin{Vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Vmatrix}.$

$|H_1|: \; 1>0 \; ; \; 1>0 \; ; \; K \geq 0.$

$|H_2|: \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & K \end{vmatrix} = K-1 \geq 0$ per $K \geq 1$; $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & K \end{vmatrix} = K-1 \geq 0$ per $K \geq 1$.

$|H_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & K \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & K \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = K-1-1 = K-2 \geq 0$ per $K \geq 2$.



Per $K<2$; $K=0$ e $K \neq 1$ la forma quadratica è indefinita.

Per $K=0$ è indefinita.
Per $K=1$ è indefinita
Per $K=2$ è Semi definita positiva
Per $K>2$ è definita positiva.

II M3) $\begin{cases} y' = xe^{x-y} \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow e^y \cdot y' = xe^x \Rightarrow \int e^y dy = \int xe^x dx + K \Rightarrow e^y = xe^x - e^x + K \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \log(xe^x - e^x + K)$. $y(0)=1: \; 1 = \log(K-1) \Rightarrow K-1 = e \Rightarrow K = e+1.$

II M4) $\begin{cases} x' = y - t^2 \\ y' = -x + t \end{cases} \Rightarrow x'' = y' - 2t \Rightarrow x'' = -x + t - 2t \Rightarrow x'' + x = -t \, . \, (D^2+1)(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Soluzioni $\pm i \Rightarrow x(t) = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t$. Posto $x_0(t) = at + b \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0' = a \; ; \; x_0'' = 0 \Rightarrow 0 + at + b = -t \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0(t) = -t.$

Quindi $x(t) = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t - t.$

Da $y = x' + t^2 \Rightarrow y(t) = c_1 \cos t - c_2 \operatorname{sen} t - 1 + t^2.$

Soluzione del sistema: $\begin{cases} x(t) = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t - t \\ y(t) = c_1 \cos t - c_2 \operatorname{sen} t - 1 + t^2 \end{cases}$