Compito di Mathematics for economic applications del 14/2/2011 (MfEA1)

IM1) $A=\begin{Vmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\2&0&1\end{Vmatrix} \to \begin{vmatrix}1-\lambda&0&-2\\0&1-\lambda&0\\2&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\cdot\left((1-\lambda)^2+4\right)=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+5)=0$

$\lambda = 1\pm\sqrt{1-5}=1\pm\sqrt{-4}=1\pm 2i \Rightarrow \lambda_1=1;\ \lambda_2=1+2i;\ \lambda_3=1-2i.$

Per $\lambda=1$: $\|A-1\cdot \mathbb{I}\|$: $\begin{Vmatrix}0&0&-2\\0&0&0\\2&0&0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}x\\y\\z\end{Vmatrix}=\underline{0} \Rightarrow \begin{cases}-2z=0\\ \forall y\\ 2x=0\end{cases} \Rightarrow (0;1;0)$ Autovettore di $\lambda=1$;

Per $\lambda=1+2i$: $\|A-(1+2i)\cdot\mathbb{I}\|$: $\begin{Vmatrix}-2i&0&-2\\0&-2i&0\\2&0&-2i\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}x\\y\\z\end{Vmatrix}=\underline{0}\Rightarrow\begin{cases}2ix+2z=0\\2iy=0\\2x-2iz=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=-ix\\y=0\end{cases}\Rightarrow(1;0;-i)$ Autovettore di $\lambda=1+2i$;

Per $\lambda=1-2i$: $\|A-(1-2i)\mathbb{I}\|$: $\begin{Vmatrix}2i&0&-2\\0&2i&0\\2&0&2i\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}x\\y\\z\end{Vmatrix}=\underline{0}\Rightarrow\begin{cases}2ix-2z=0\\2iy=0\\2x+2iz=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=ix\\y=0\end{cases}\Rightarrow(1;0;i)$ Autovettore di $\lambda=1-2i$.

IM2) $A=\begin{Vmatrix}1&0&m\\0&2&0\\k&1&1\end{Vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda&0&m\\0&2-\lambda&0\\k&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\cdot\left((1-\lambda)^2-mk\right)=(2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1-mk)=0.$

Autovalore fisso $\forall m$ e $\forall k$: $\lambda=2$.

•) per $\lambda=2$: $\lambda^2-2\lambda+1-mk\big|_2=4-4+1-mk=0$ per $mk=1\Rightarrow m=\frac{1}{k}$.

Se $m=\frac{1}{k}$: $\lambda^2-2\lambda+1-1=\lambda(\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda=2$ e $\lambda=0\Rightarrow\lambda=2$ Autovalore doppio.

•) $\lambda^2-2\lambda+1-mk=0\Rightarrow\lambda=1\pm\sqrt{1-1+mk}=1\pm\sqrt{m\cdot k}$ ha soluzioni doppie se $m=0$ o $k=0$

Se $m\cdot k=0\Rightarrow\lambda^2-2\lambda+1=0\Rightarrow(\lambda-1)^2=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=1$: autovalore doppio.

IM3) $f(x_1;x_2;x_3)=(x_1+x_2;x_1+x_3;x_1+3x_2-2x_3;-x_1+2x_2-3x_3)$

$f(x)=Y=A\cdot X$: $A=\begin{Vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&3&-2\\-1&2&-3\end{Vmatrix}\to\begin{Vmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&2&-2\\0&3&-3\end{Vmatrix}\to\begin{Vmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix}.\quad\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix}=-1\neq0.$

Car $(A)=2\Rightarrow$ Dim (Imm (A)) $=2$; Dim (Nucleo (A)) $=3-2=1$.

Base per Immagine

$\begin{Vmatrix}1&1&0&\vdots&y_1\\1&0&1&\vdots&y_2\\1&3&-2&\vdots&y_3\\-1&2&-3&\vdots&y_4\end{Vmatrix}\to\begin{Vmatrix}1&1&0&\vdots&y_1\\0&-1&1&\vdots&y_2-y_1\\0&2&-2&\vdots&y_3-y_1\\0&3&-3&\vdots&y_4+y_1\end{Vmatrix}\to\begin{Vmatrix}1&1&0&y_1\\0&-1&1&y_2-y_1\\0&0&0&y_3-y_1+2y_2-2y_1\\0&0&0&y_4+y_1+3y_2-3y_1\end{Vmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y_3+2y_2-3y_1=0\\y_4+3y_2-2y_1=0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}y_3=3y_1-2y_2\\y_4=2y_1-3y_2\end{cases}\Rightarrow(y_1;y_2;3y_1-2y_2;2y_1-3y_2)\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}(1;0;3;2)\\(0;1;-2;-3)\end{matrix}\right.$ Base per Immagine.

Base per Nucleo

$\begin{Vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&3&-2\\-1&2&-3\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Vmatrix}=\underline{0}\Rightarrow\begin{Vmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Vmatrix}=\underline{0}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\\-x_2+x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=-x_1\\x_3=x_2\end{cases}\Rightarrow$

$(x_1;-x_1;-x_1)$: Base per Nucleo : $(1;-1;-1)$.

I M4) $X_1=(1;0;-1)$. Troviamo un vettore perpendicolare a X_1: **MfEA2**

$(1;0;-1)\cdot(x;y;z) = x-z=0 \Rightarrow z=x \Rightarrow (x;y;x) \Rightarrow (1;1;1)=X_2$.

Troviamo un vettore $(x;y;x)$ perpendicolare a $(1;1;1)$:

$(1;1;1)\cdot(x;y;x) = x+y+x = 2x+y=0 \Rightarrow y=-2x \Rightarrow (x;-2x;x) \Rightarrow (1;-2;1)=X_3$.

Troviamo i versori di X_1; X_2 e X_3:

$\|X_1\| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = V_1$;

$\|X_2\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = V_2$;

$\|X_3\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = V_3$. Quindi $\{V_1;V_2;V_3\}$ è una base ortonormale per $\mathbb{R}^3$.

II M1) $H=\begin{Vmatrix}1 & 0 & k\\ 0 & 1 & 1\\ k & 1 & k\end{Vmatrix}$; Minori Principali di Ordine 1: $1>0$; $1>0$; k.

Minori Principali di ordine 2: $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1>0$; $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & k\end{vmatrix} = k-1\geq 0$ per $k\geq 1$; $\begin{vmatrix}1 & k\\ k & k\end{vmatrix} = k-k^2 = k(1-k)\geq 0$ per $0\leq k\leq 1$.

Minore Principale di Ordine 3: $\begin{vmatrix}1 & 0 & k\\ 0 & 1 & 1\\ k & 1 & k\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -k & k\\ 0 & 0 & 1\\ k & 1-k & k\end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix}1 & -k\\ k & 1-k\end{vmatrix} = (-1)(1-k+k^2) = -k^2+k-1 \geq 0$

per $k^2-k+1\leq 0$: $k=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow k^2-k+1>0\ \forall k$.

Ma il Minore di Ordine 2 $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & k\end{vmatrix}$ è >0 se $k>1$, mentre $\begin{vmatrix}1 & k\\ k & k\end{vmatrix}$ è >0 per $0<k<1$.

Quindi la forma quadratica potrebbe essere semidefinita solo per $k=1$:

Ma per $k=1$ i minori di Ordine 1 sono tutti >0 mentre quello di ordine 3 è <0, e quindi la forma è sempre indefinita.

II M2) $\begin{cases}\text{Max/min } f(x;y) = xy-y\\ \text{S.V.}: x^2+2y^2=1\end{cases}$. La $f(x;y)$ è continua, il vincolo è un insieme limitato e chiuso, quindi esistono massimo e minimo assoluti.

$\Lambda = xy-y-\lambda(x^2+2y^2-1)$

$$\begin{cases}\Lambda'_x = y-2\lambda x=0\\ \Lambda'_y = x-1-4\lambda y=0\\ x^2+2y^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=2\lambda x\\ x-1-8\lambda^2 x = x(1-8\lambda^2)-1=0\\ x^2+2y^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{1-8\lambda^2}\\ y=\frac{2\lambda}{1-8\lambda^2}\\ \left(\frac{1}{1-8\lambda^2}\right)^2+2\left(\frac{2\lambda}{1-8\lambda^2}\right)^2=1\end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1+8\lambda^2 = (1-8\lambda^2)^2 \Rightarrow 64\lambda^4-16\lambda^2+1-1-8\lambda^2 = 64\lambda^4-24\lambda^2 = 8\lambda^2(8\lambda^2-3)=0$.

Soluzioni: $\lambda=0$; $\lambda^2=\frac{3}{8} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

$P_1=(1;0)$ per $\lambda=0$; $P_2=\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$ per $\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $P_3=\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$ per $\lambda=-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

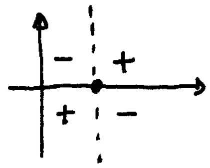
$\overline{H}(x;y;\lambda) = \begin{Vmatrix}0 & 2x & 4y\\ 2x & -2\lambda & 1\\ 4y & 1 & -4\lambda\end{Vmatrix}$. $|\overline{H}(1;0;0)| = \begin{vmatrix}0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = 0$: non si può decidere.

MfEA3

$$\left|\bar{H}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)\right| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -\sqrt{6} \\ -1 & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 1 \\ -\sqrt{6} & 1 & -\sqrt{6} \end{vmatrix} = 1(\sqrt{6}+\sqrt{6}) - \sqrt{6}(-1-3) = 6\sqrt{6} > 0 : \text{MAX}.$$

$$\left|\bar{H}\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)\right| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & \sqrt{6} \\ -1 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 1 \\ \sqrt{6} & 1 & \sqrt{6} \end{vmatrix} = 1(-\sqrt{6}-\sqrt{6}) + \sqrt{6}(-1-3) = -6\sqrt{6} < 0 : \text{min}.$$

Essendo $f(x;y) = y(x-1)$, con $f(1;0) = 0$ risulta $f(x;y) \geq 0$ in



quindi $(1;0)$ non è un punto di minimo né punto di massimo.

II M3) $f(x;y;z) = x^4y - y^3z^2 + xyz^3 = 1$; $P_1 = (-1;1;0)$; $P_2 = (1;1;1)$.

$\nabla f(x;y;z) = (4x^3y + yz^3 ; x^4 - 3y^2z^2 + xz^3 ; -2y^3z + 3xyz^2)$

$\nabla f(-1;1;0) = (-4;1;0)$: non è possibile definire $z = z(x;y)$.

$\nabla f(1;1;1) = (5;-1;1)$: è possibile definire $z = z(x;y)$.

Quindi: $\frac{\partial z}{\partial x}(1;1) = -\frac{5}{1} = -5$; $\frac{\partial z}{\partial y}(1;1) = -\frac{-1}{1} = 1$.

II M4) $f(x;y) = x^3y - xy^2$.

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2y - y^2 = y(3x^2-y) = 0 \\ f'_y = x^3 - 2xy = x(x^2-2y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ x^2 - 2y = 0 \end{cases}.$$

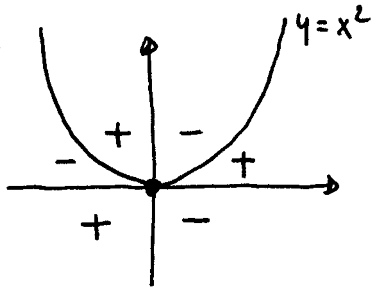
I primi 3 sistemi hanno tutti per unica soluzione $(0;0)$.

Se $y = 3x^2 \Rightarrow x^2 - 6x^2 = 0$ e quindi anche il quarto ha la soluzione $(0;0)$.

$H(x;y) = \begin{Vmatrix} 6xy & 3x^2-2y \\ 3x^2-2y & -2x \end{Vmatrix}$; $H(0;0) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$: nessuna risposta.

Si ha che $f(0;0) = 0$. Risulta $f(x;y) \geq 0$ se: $f(x;y) = xy \cdot (x^2 - y) \geq 0$

ovvero se $\begin{cases} xy > 0 \\ y < x^2 \end{cases} \cup \begin{cases} xy < 0 \\ y > x^2 \end{cases}$. $x \cdot y$ è positivo nel I e nel III quadrante, e quindi, graficamente abbiamo:



In ogni intorno del punto $(0;0)$ ci sono punti in cui $f(x;y) > 0$ e punti in cui $f(x;y) < 0$ e quindi $(0;0)$ è un punto di sella.