Compito di Matematica Generale del 4/6/2016 $\boxed{\text{CMG1}}$

1) $f(x)=\log(e^x+1)-\log(e^x-1)=\log\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$. C.E.: $e^x-1>0 \Rightarrow e^x>1 \Rightarrow x>0$.

$\lim_{x\to0^+} f(x)=\log 2-\log(\to 0^+)=2-(-\infty)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\log(\to 1^+)=0^+$.

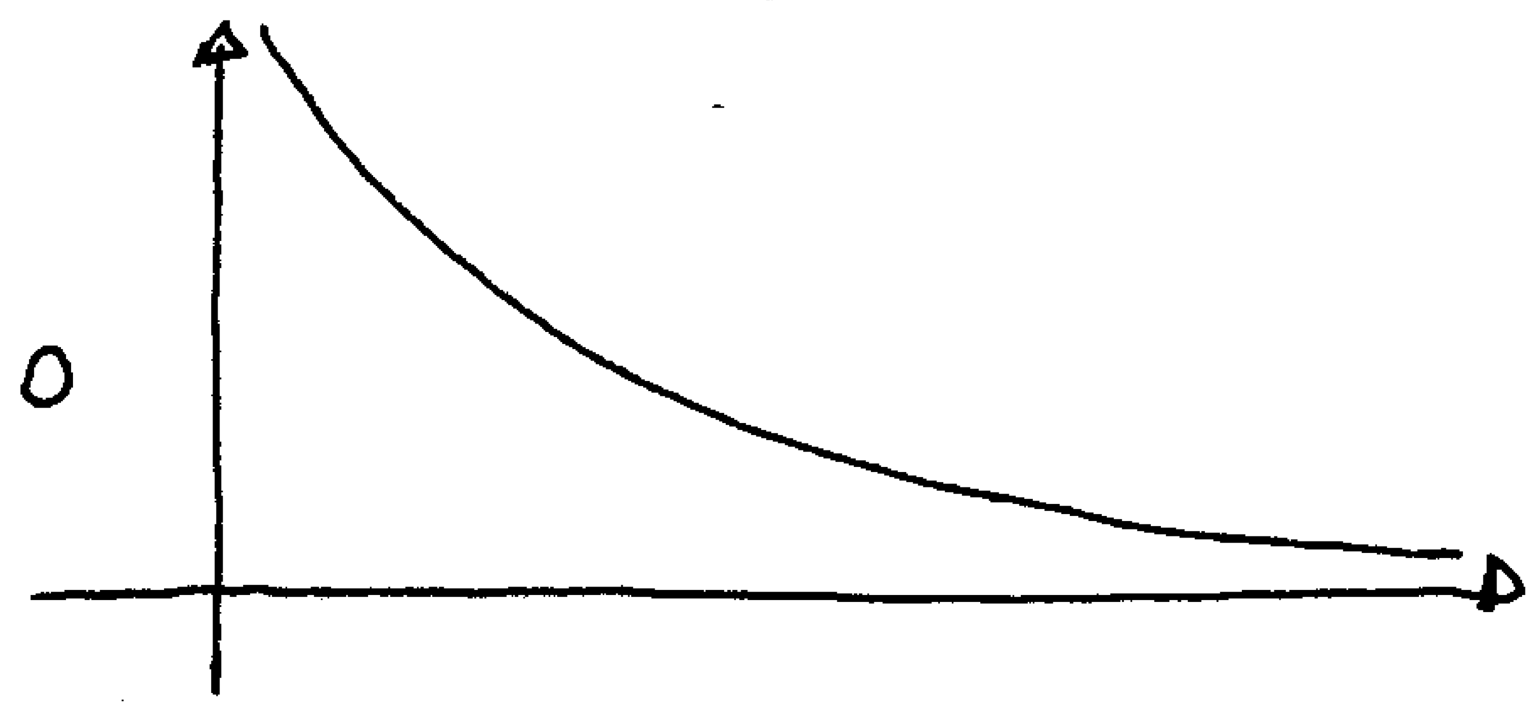
$f(x)\geq 0 \Rightarrow \frac{e^x+1}{e^x-1}\geq 1$: Vera $\forall x>0$.

$f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{e^x\cdot(-2)}{e^{2x}-1}<0\ \forall x>0$

$f''(x)=-2\cdot\frac{e^x(e^{2x}-1)-e^x\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}=-2\cdot\frac{e^x\cdot(-1-e^{2x})}{(e^{2x}-1)^2}>0\ \forall x>0$

funzione sempre convessa

Grafico



2) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac12}-1}{x}-\frac{(1+x)^{\frac13}-1}{x}=\frac12-\frac13=\frac16\quad\left(\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha\right)$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{3+2x}\right)^{\frac{1-x^2}{x}}=\left(\to\frac12\right)^{(\to-\infty)}=+\infty$.

3) $f(x)=\log(x-x^3)$. C.E.: $x-x^3=x(1-x^2)>0 \begin{cases} x>0 \\ 1-x^2>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ -1<x<1\end{cases}$

	-1		0		1	
$+$		$-$		$+$		$-$
si		NO		si		NO

C.E.: $]-\infty;-1[\ \cup\ ]0;1[$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\log(\to+\infty)=+\infty$; $\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to1^-} f(x)=\log(\to0^+)=-\infty$.

4) $\int_0^1 e^{2x-k}-3x\,dx=\left(\frac12 e^{2x-k}-\frac32x^2\right|_0^1=\frac12\left[(e^{2-k}-3)-(e^{-k}-0)\right]=\frac12\Rightarrow e^2\cdot e^{-k}-3-e^{-k}=1\Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-k}(e^2-1)=4\Rightarrow e^{-k}=\frac{4}{e^2-1}\Rightarrow -k=\log\frac{4}{e^2-1}\Rightarrow k=\log\frac{e^2-1}{4}$.

5)

A	B	non A	B ⇒ non A	A ⇒ (B ⇒ non A)	(A e B)	non B	(A ⇒ non B)	(AeB) ⇔ (A ⇒ non B)
1	1	0	0	* 0 *	1	0	0	0 *
1	0	0	1	1				
0	1	1	1	1				
0	0	1	1	1				

Si considera solo la I riga dove la proposizione A ⇒ (B ⇒ non A) è falsa. Quindi la proposizione (AeB) ⇔ (A ⇒ non B) è falsa.

6) $X\cdot Y=\|X\|\cdot\|Y\|\cdot\cos\alpha \Rightarrow$ se $\alpha=\frac{\pi}{4}$: $(1;1;1)\cdot(1;0;k)=\sqrt3\cdot\sqrt{k^2+1}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow$

$\Rightarrow 1+0+k=\sqrt3\cdot\frac{\sqrt2}{2}\cdot\sqrt{k^2+1}\Rightarrow k^2+2k+1=\frac32\cdot(k^2+1)\Rightarrow\frac12k^2-2k+\frac12=0\Rightarrow k^2-4k+1=0\Rightarrow$

$\Rightarrow K = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$. Soluzioni: $K_1 = 2-\sqrt{3}$, $K_2 = 2+\sqrt{3}$.

7) $f(x;y) = y e^{y} + 3x^2 - 2x^3$. $\nabla f(x;y) = \mathbb{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x = 6x - 6x^2 = 6x\cdot(1-x) = 0 \\ f'_y = e^y + y e^y = e^y(y+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}. \quad H(x;y) = \begin{Vmatrix} 6-12x & 0 \\ 0 & (2+y)e^y \end{Vmatrix}.$$

$$H(0;-1) = \begin{Vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e} \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6>0;\ \frac{1}{e}>0 \\ \frac{6}{e}>0 \end{cases} : \text{P. Minimo}; \quad H(1;-1) = \begin{Vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e} \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -6<0 \\ \frac{1}{e}>0 \end{cases} : \text{P. Sella}.$$

8) $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x} = e^x + \dfrac{1}{e^x} = e^x + e^{-x}$. $g(x) = 2x-1 \Rightarrow g'(x) = 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = e^x - e^{-x} = e^x - \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x} = 2 \Rightarrow e^{2x}-1 = 2e^x \Rightarrow e^{2x} - 2e^x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow e^x = 1+\sqrt{2}$ $(1-\sqrt{2} < 0 !!) \Rightarrow x_0 = \log(1+\sqrt{2})$.

9) $f(x;y;z) = e^{2x-y} - \log(x^2+y^2+1) - 3z$.

$f'_x = 2e^{2x-y} - \dfrac{2x}{x^2+y^2+1} - 0$; $f'_x(0;0;0) = 2 - 0 = 2$;

$f'_y = -e^{2x-y} - \dfrac{2y}{x^2+y^2+1} - 0$; $f'_y(0;0;0) = -1 - 0 = -1$; $\Rightarrow \nabla f(0;0;0) = (2;-1;-3)$.

$f'_z = 0 - 0 - 3$; $f'_z(0;0;0) = -3$

10) $$\|x \ y\| \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \|x \ y\| \cdot \begin{Vmatrix} x-y \\ -x+y \end{Vmatrix} = x(x-y) + y(-x+y) =$$

$= x^2 - 2xy + y^2 = f(x;y) = (x-y)^2$. Essendo $f(x;y) \geq 0 \ \forall (x;y)$,

essa risulta minima se $f(x;y) = 0 \Rightarrow (x-y)^2 = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = x$, ovvero in tutti i punti della bisettrice del I e III

quadrante.