Compito di Matematica Generale del 5/9/2016 $\boxed{MG1}$

1) $f(x) = x \cdot e^{x^2}$. C.E.: $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. $f(-x) = -f(x)$.

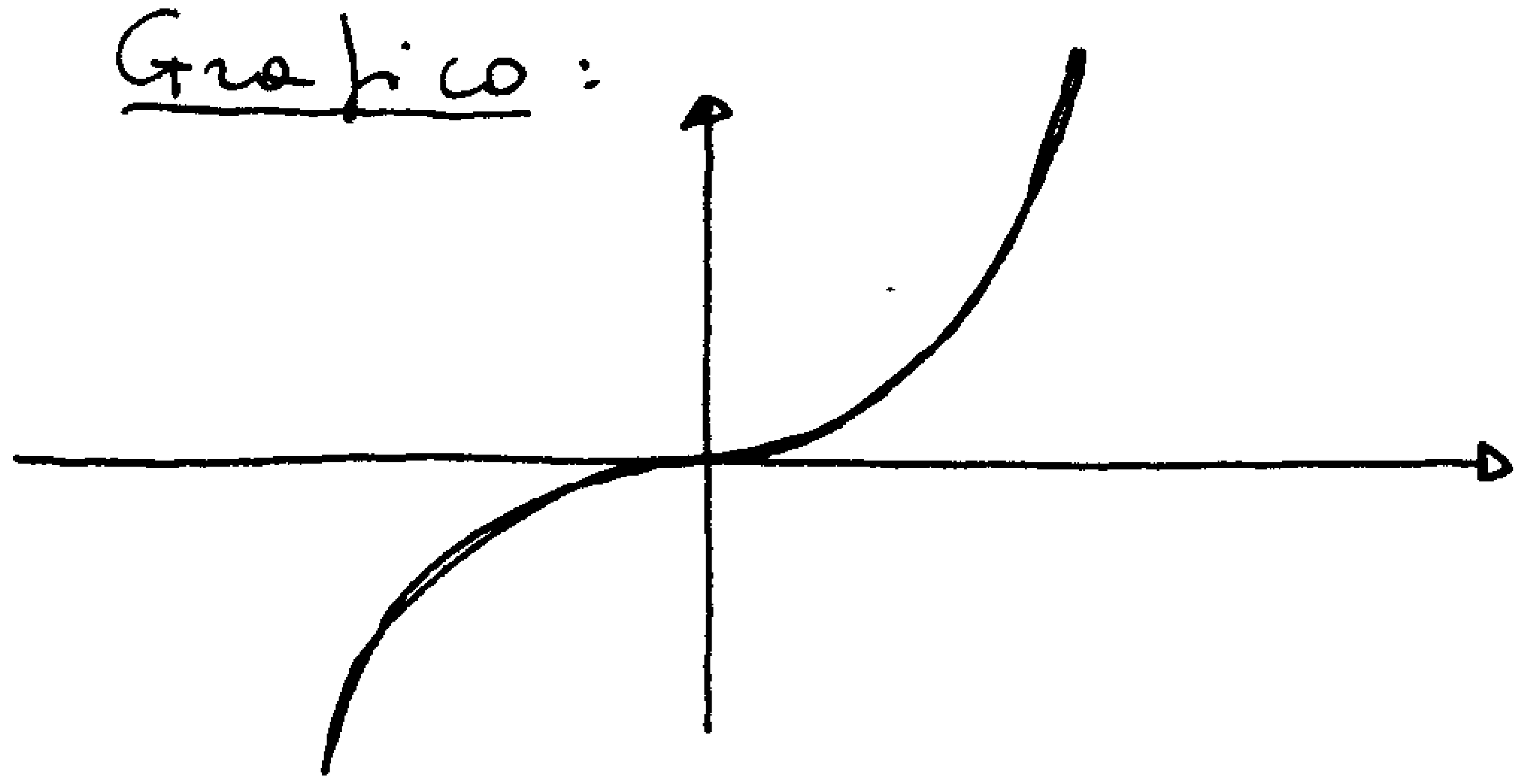
$f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$. Non ci sono asintoti.

$f'(x) = e^{x^2} + x \cdot 2x \cdot e^{x^2} = e^{x^2} \cdot (2x^2+1) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$f''(x) = 2x e^{x^2} (2x^2+1) + 4x e^{x^2} = e^{x^2} \cdot (4x^3+6x) =$

$= 2x \cdot e^{x^2} \cdot (2x^2+3) \geq 0$ per $x \geq 0$

Grafico:



2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x - x^2}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} \cdot \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 - 1 = -\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x^3 + 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \operatorname{sen} x}{3x} = \dfrac{2}{3}$. (per $x \to 0$: $x^2 = o(\operatorname{sen} x)$; $x^3 = o(\operatorname{sen} x)$; $\operatorname{sen}^2 x = o(\operatorname{sen} x)$)

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 2^x}{kx} = \dfrac{1}{k} \cdot \left( \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 1}{x} - \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 1}{x} \right) = \dfrac{1}{k} \cdot (\log 3 - \log 2) = \dfrac{1}{k} \cdot \log \dfrac{3}{2} = 1$ per $k = \log \dfrac{3}{2}$.

4) $f(x) = e^{3x-1} \Rightarrow f'(x) = 3e^{3x-1}$. $g(x) = 2e^{1-x} \Rightarrow g'(x) = -2e^{1-x} \Rightarrow g''(x) = 2e^{1-x}$.

$f'(x) = g''(x) \Rightarrow 3e^{3x-1} = 2e^{1-x} \Rightarrow \dfrac{e^{3x-1}}{e^{1-x}} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow e^{4x-2} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow 4x - 2 = \log \dfrac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x = 2 + \log \dfrac{2}{3} \Rightarrow x_0 = \dfrac{1}{4} \left( 2 + \log \dfrac{2}{3} \right)$.

5) $\displaystyle\int_0^1 e^x - x \, dx = \int_0^k e^{x+1} \, dx \Rightarrow \left( e^x - \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \left( e^{x+1} \right|_0^k \Rightarrow \left(e - \frac{1}{2}\right) - (1 - 0) = \left(e^{k+1} - e\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{k+1} = e - \dfrac{1}{2} - 1 + e = 2e - \dfrac{3}{2} \Rightarrow k+1 = \log\left(2e - \dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow k = \log\left(2e - \dfrac{3}{2}\right) - 1$.

6) $x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\alpha \Rightarrow (1;1) \cdot (1;k) = \sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1+k^2} \cdot \cos 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + k = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1+k^2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (1+k)^2 = 1 + k^2 \Rightarrow 1 + k^2 + 2k = 1 + k^2 \Rightarrow 2k = 0 \Rightarrow k = 0$.

7) $f(x;y;z) = e^{x-y} + e^{y-z} - x + z$.

$f'_x = e^{x-y} - 1$ ; $f'_y = -e^{x-y} + e^{y-z}$ ; $f'_z = -e^{y-z} + 1$.

$$\begin{cases} f'_x = e^{x-y} - 1 = 0 \\ f'_y = -e^{x-y} + e^{y-z} = 0 \\ f'_z = -e^{y-z} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x-y} = 1 \\ e^{y-z} = e^{x-y} \\ e^{y-z} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z = x-y \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ 0=0 \\ z=y \end{cases} \Rightarrow x=y=z.$$

8)

| A | B | A ⇒ B | non B | A e non B | (A ⇒ B) e (A e non B) | | | (A⇒B) ⇔ (A e non B) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Se $*$ è il connettivo "e" oppure "⇔" la proposizione è sempre falsa.

9) $f(x) = \operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x$. $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$.

$\operatorname{sen} 2x = 2x - \frac{8x^3}{3!} + o(x^3)$; $2\operatorname{sen} 2x = 4x - \frac{16}{3!}x^3 + o(x^3)$;

$\operatorname{sen} 3x = 3x - \frac{27x^3}{3!} + o(x^3)$.

$$f(x) = \cancel{x} - \frac{x^3}{6} - \cancel{4x} + \frac{16}{6}x^3 + \cancel{3x} - \frac{27}{6}x^3 + o(x^3) = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{6} - \frac{9}{2}\right)x^3 + o(x^3) = -2x^3 + o(x^3).$$

$P_3(x;0) = -2x^3$.

10) $f(x;y) = x^2 + ky^2 - 2xy$. $\nabla f(x;y) = (0;0) \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 2x - 2y = 0 \\ f'_y = 2ky - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x(k-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$. $H(x;y) = \left\| \begin{matrix} 2 & -2 \\ -2 & 2k \end{matrix} \right\| = H(0;0)$.

Essendo $2>0$, se $2k>0$ e se $4k-4>0 \Rightarrow k>1$ allora $(0;0)$ è punto di Minimo.

Se $4k-4<0 \Rightarrow k<1$ allora $(0;0)$ è punto di Sella.

Se $k=1$: $f(x;y) = x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \geq 0 \quad \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$ con $f(x;y) = 0 \quad \forall (x;y)$ tale che $y=x$. Quindi tutti i punti della bisettrice $y=x$ sono punti di minimo per la funzione.