

1 – INTRODUZIONE

La condizione di unicità per il Tasso Interno di Rendimento di un progetto fornita da C. S. Soper in [15] ha permesso la caratterizzazione di una classe di progetti che godono di notevoli proprietà.

Oltre ad una rassegna di queste, utilizzando alcuni interessanti risultati esposti in [11], si stabilisce la relazione che intercorre tra l'essere il progetto di puro investimento (o di puro finanziamento) per un valore del tasso pari al suo Tasso Interno di Rendimento e la troncabilità del progetto stesso, determinando l'intervallo dei valori del tasso d'interesse per i quali il Valore Attuale del progetto è massimo rispetto a quello di tutti i suoi possibili sottoprogetti.

Si arriva così a stabilire che nel caso di un progetto di puro investimento (o di puro finanziamento), il miglior troncamento coincide con il progetto stesso.

2 – DEFINIZIONI E RISULTATI PRELIMINARI

Premettiamo anzitutto alcune Definizioni e proprietà che saranno usati nel seguito di questa nota.

Definizione 1: Diremo progetto una sequenza di flussi di cassa netti:

$\mathbb{A}: a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$
che si rendono disponibili alle rispettive epoche $0, 1, 2, \dots, n-1, n$, con $n \geq 1$, e tali che:

$$\begin{cases} a_0 \neq 0, \\ a_n \neq 0, \\ a_j \cdot a_k < 0, \text{ per almeno una coppia } j, k \end{cases}.$$

Indicheremo il Valore Attuale del progetto $\mathbb{A}$ con $\mathbb{V}(i)$ ed il suo Montante (o Saldo) con $\mathbb{S}(i)$.

Vale come è noto la relazione:

$$\mathbb{S}(i) = (1 + i)^n \cdot \mathbb{V}(i)$$

dalla quale, derivando rispetto ad i , si deduce che se $\mathbb{V}(i)$ è positivo (negativo) e crescente (decrescente), allora $\mathbb{S}(i)$ è positivo (negativo) e crescente (decrescente).

Invece dall'analoga relazione:

$$\mathbb{V}(i) = (1 + i)^{-n} \cdot \mathbb{S}(i)$$

si può dedurre che se $\mathbb{S}(i)$ è negativo (positivo) e crescente (decrescente), allora $\mathbb{V}(i)$ è negativo (positivo) e crescente (decrescente).

Diremo sottoprogetto del progetto $\mathbb{A}$ ogni sequenza di flussi di cassa del tipo

$\mathbb{A}_j : a_0, a_1, \dots, a_{j-1}, a_j$, con $j \leq n$, che soddisfi alla Definizione 1.

Indicheremo il Valore Attuale del sottoprogetto $\mathbb{A}_j$ con:

$$\mathbb{V}_j(i) = \sum_{k=0}^j a_k \cdot (1 + i)^{-k}$$

ed il suo Montante (o Saldo) con:

$$\mathbb{S}_j(i) = \sum_{k=0}^j a_k \cdot (1+i)^{j-k}.$$

Definizione 2: Un progetto è detto semplice (di investimento se $a_0 < 0$, di finanziamento se $a_0 > 0$) quando i suoi flussi di cassa non nulli hanno tutti segno diverso da a_0 . E' detto poi di investimento (di finanziamento) in senso stretto se i flussi di cassa negativi (positivi) precedono tutti quelli positivi (negativi).

Seguendo [16] e [17] abbiamo la

Definizione 3: Un progetto si dice, al dato tasso i_0 , di puro investimento (di puro finanziamento), quando tutti i suoi sottoprogetti presentano Saldi, a quel tasso i_0 , non positivi (non negativi):

$$\mathbb{S}_j(i_0) = \sum_{k=0}^j a_k \cdot (1+i_0)^{j-k} \leq 0 \ (\geq 0), \forall j: 0 \leq j \leq n-1.$$

Si può dimostrare, vedi [16], che un progetto è di puro investimento (se $a_0 < 0$), o di puro finanziamento (se $a_0 > 0$) per qualunque valore del tasso $i > -1$ se e solo se l'ultimo flusso di cassa, a_n , ha segno diverso da quello di tutti gli altri.

Invece, se siamo interessati ai soli valori positivi del tasso, avremo che un progetto è di puro investimento (se $a_0 < 0$), o di puro finanziamento (se $a_0 > 0$) per qualunque valore $i > 0$ se e solo se la cumulata dei flussi di cassa $\sum_{k=0}^n a_k = \mathbb{S}_n(0)$, Saldo del progetto a tasso nullo, ha segno diverso (positivo nel caso dell'investimento e negativo in caso di finanziamento) da quello di tutte le altre cumulate $\sum_{k=0}^j a_k = \mathbb{S}_j(0)$, con $j: 0 \leq j \leq n-1$.

Come detto in [12], tutti i progetti semplici, anche se non sono puri per qualunque valore $i > -1$, sono sempre puri nel loro T.I.R..

La stessa proprietà, vedi anche [9], si può dimostrare che vale per i progetti in senso stretto.

3 – LA CLASSE DEI PROGETTI DI SOPER

Tra le tante condizioni di unicità del Tasso Interno di Rendimento presenti in letteratura, vedi [8], C.S. Soper ha fornito, in [15], una condizione di unicità che può essere così formulata:

Teorema 1: Dato il progetto $\mathbb{A}$: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, sia i_0 un suo Tasso Interno di Rendimento (cioè sia $\mathbb{V}(i_0) = \mathbb{S}(i_0) = 0$).

Se, $\forall j: 0 \leq j \leq n-1$, si ha che:

$$\mathbb{S}_j(i_0) = \sum_{k=0}^j a_k \cdot (1+i_0)^{j-k} \leq 0$$

allora il Tasso Interno di Rendimento i_0 è unico.

Si può esprimere la condizione fornita da Soper dicendo che se un progetto è puro nel T.I.R., allora il T.I.R. è unico.

E' opportuno dare una dimostrazione di questo Teorema diversa dall'originale, viste le procedure che svilupperemo nel seguito.

Supponiamo che sia $a_0 < 0$, potendosi trattare in modo analogo, con opportuni cambiamenti di segno, il caso $a_0 > 0$.

Nell'equazione $S(i) = 0$ poniamo $1 + i = x$, ed otteniamo:

$$a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n = 0.$$

Assicurata l'esistenza di almeno una soluzione per l'equazione $S(i) = 0$ mediante l'ipotesi $a_0 \cdot a_n < 0$, sia i_0 questa soluzione, e poniamo $1 + i_0 = x_0$.

Potremo quindi scrivere:

$$a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n = P(x) \cdot (x - x_0).$$

Per la Regola dei Segni di Cartesio, se il polinomio $P(x)$ non ammette variazioni nei suoi coefficienti, allora la radice x_0 sarà unica, e quindi sarà unico il T.I.R. trovato i_0 .

Ma si vede facilmente come i coefficienti del polinomio $P(x)$ altro non siano se non i valori $S_j(i_0)$, con $0 \leq j \leq n - 1$, ed il Teorema 1 è dimostrato.

Definizione 4: Diremo un progetto "di Soper" quando esso è puro per un valore del tasso i_0 che sia T.I.R. del progetto stesso.

Come detto in [4], [5] e [6], quando un progetto $a_0, a_1, \dots, a_n$ è di Soper, esso può essere espresso, in uno ed in un solo modo, come una successione di n operazioni uniperiodali consecutive di investimento:

$$\{B_{t,t-1}; B_{t,t}\} = \{S_{t-1}(i_0), - (1 + i_0) \cdot S_{t-1}(i_0)\}, \forall t: 1 \leq t \leq n,$$

tali che:

$$B_{1,0} = a_0,$$

$$B_{t,t} = - (1 + i_0) \cdot B_{t,t-1},$$

$$B_{t,t} + B_{t+1,t} = a_t,$$

$$B_{n,n} = a_n,$$

dove quindi, valendo la condizione di Soper, si ha:

$$B_{t+1,t} \leq 0 \text{ e } B_{t+1,t+1} \geq 0, \forall t: 0 \leq t \leq n - 1,$$

con i_0 T.I.R. unico del progetto.

Di ciò si può dare una rapida giustificazione, osservando come i termini $B_{t,t-1}$ e $B_{t,t}$ costituiscano gli elementi della riga finale e gli opposti di quella intermedia, rispettivamente, nella tabella che si costruisce per calcolare $P(x)$ usando la Regola di Ruffini.

Con facili sostituzioni si vede poi che l'imporre $B_{n,n} = a_n$ equivale ad imporre $S(i_0) = 0$, che sicuramente è vera in quanto i_0 è, per ipotesi, T.I.R. del progetto.

Una simile scomposizione è ovviamente possibile anche per quei progetti che presentino più di un T.I.R., ed è oltretutto unica per quei progetti che hanno un solo T.I.R., senza però essere di Soper.

In questi due casi, però, la successione dei $B_{t+1,t}$ presenterà delle variazioni di segno.

Con una procedura simile alla precedente possiamo ottenere, vedi [8], un'ulteriore condizione di unicità.

Considerata l'equazione $\mathbb{V}(i) = 0$, poniamo $(1 + i)^{-1} = y$, ed assicurata l'esistenza di almeno una soluzione per l'equazione data mediante le solite ipotesi, $a_0 < 0$ e $a_n > 0$, sia i_0 questa soluzione.

Posto $(1 + i_0)^{-1} = y_0$, avremo allora che:

$$a_n \cdot y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + \dots + a_1 \cdot y + a_0 = \mathbb{Q}(y) \cdot (y - y_0).$$

e se il polinomio $\mathbb{Q}(y)$ non ammette variazioni di segno nei suoi coefficienti, la radice y_0 sarà unica, e quindi sarà unico il T.I.R. i_0 .

I coefficienti del polinomio $\mathbb{Q}(y)$ sono esprimibili, nell'ordine delle potenze decrescenti al crescere di j , come:

$$\sum_{k=0}^j a_{n-k} \cdot (1 + i)^{k-j}, 0 \leq j \leq n - 1.$$

Queste quantità dovranno essere allora tutte non negative come a_n , per avere garantita l'unicità del T.I.R. trovato i_0 .

Possiamo interpretare queste quantità come l'Attualizzazione al tempo $n - j$, con $0 \leq j \leq n - 1$, dei flussi di cassa del progetto:

$$a_{n-j}, a_{n-j+1}, \dots, a_n.$$

Poniamo allora:

$$\mathcal{U}_j(i) = \sum_{k=0}^j a_{n-k} \cdot (1 + i)^{k-j}, 0 \leq j \leq n - 1.$$

La seconda condizione di unicità del T.I.R. trovata può quindi essere espressa come:

$$\mathcal{U}_j(i_0) = \sum_{k=0}^j a_{n-k} \cdot (1 + i_0)^{k-j} \geq 0, \forall j: 0 \leq j \leq n - 1.$$

Analogamente a quanto fatto in precedenza, vediamo che se un progetto $a_0, a_1, \dots, a_n$ è di Soper, allora esso può essere anche espresso, in uno ed in un solo modo, come una successione di n operazioni uniperiodali di finanziamento:

$$\{D_{t,t-1}; D_{t,t}\} = \{\mathcal{U}_{t-1}(i_0), - (1 + i_0)^{-1} \cdot \mathcal{U}_{t-1}(i_0)\}, 1 \leq t \leq n,$$

tali che:

$$D_{1,0} = a_n,$$

$$D_{t,t} = - (1 + i_0)^{-1} \cdot D_{t,t-1},$$

$$D_{t,t} + D_{t+1,t} = a_{n-t},$$

$$D_{n,n} = a_0,$$

dove quindi

$$D_{t+1,t} \geq 0 \text{ e } D_{t+1,t+1} \leq 0, \forall t: 0 \leq t \leq n - 1,$$

con i_0 T.I.R. unico del progetto.

Con facili sostituzioni si vede poi che l'imporre $D_{n,n} = a_0$ equivale alla $\mathbb{V}(i_0) = 0$, che è sicuramente verificata.

Se, esaminato "dall'inizio", il progetto di Soper si presenta come una sequenza di operazioni di investimento, esaminato invece "dalla fine" esso si presenterà come una sequenza di operazioni tutte di finanziamento.

Definiamo poi, in analogia con le $\mathcal{U}_j(i)$, anche le quantità:

$$\mathcal{S}_j(i) = \sum_{k=0}^j a_{n-k} \cdot (1+i)^k, \quad 0 \leq j \leq n-1,$$

che interpretiamo come la Capitalizzazione, a partire dal tempo $n-j$, dei flussi di cassa del progetto $a_{n-j}, a_{n-j+1}, \dots, a_n$.

Ovviamente $\mathcal{S}_n(i) = \mathcal{S}_n(i)$ e $\mathcal{V}_n(i) = \mathcal{U}_n(i)$.

Inoltre, con facili calcoli, si vede che:

$$\mathcal{V}(i) = \mathcal{V}_{j-1}(i) + (1+i)^{-j} \cdot \mathcal{U}_{n-j}(i)$$

e che:

$$\mathcal{S}(i) = (1+i)^{n-j+1} \cdot \mathcal{S}_{j-1}(i) + \mathcal{S}_{n-j}(i)$$

dalla quale, essendo $\mathcal{S}_{n-j}(i) = (1+i)^{n-j} \cdot \mathcal{U}_{n-j}(i)$

otteniamo:

$$(1+i)^{n-j} \cdot \mathcal{U}_{n-j}(i) = \mathcal{S}(i) - (1+i)^{n-j+1} \cdot \mathcal{S}_{j-1}(i)$$

per la quale, essendo $\mathcal{S}(i_0) = 0$, risulta, vedi [11], di immediata dimostrazione il

Teorema 2: Si ha che $\mathcal{S}_j(i_0) \leq 0$ (≥ 0), $\forall j: 0 \leq j \leq n-1$, se e solo se $\mathcal{U}_j(i_0) \geq 0$ (≤ 0).

5 – LE PROPRIETA' DELLA CLASSE DEI PROGETTI DI SOPER

Vediamo ora una serie di proprietà dei progetti di Soper, molte delle quali contenute in [11].

Si può dedurre anzitutto dalla $\mathcal{S}_j(i) = \mathcal{S}_{j-1}(i) \cdot (1+i) + a_j$ che se $\mathcal{S}_{j-1}(i)$ è non positiva (non negativa) e decrescente (crescente) allora $\mathcal{S}_j(i)$ è decrescente (crescente).

Come detto in [16] e [17], essendo $\lim_{i \rightarrow +\infty} \mathcal{S}_j(i) = \infty$, con il segno di a_0 , abbiamo il:

Teorema 3: Se nel progetto $\mathbb{A}$: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ è $a_0 < 0$, ($a_0 > 0$) si può sempre determinare un valore del tasso $i = i_{min}$ tale che il progetto rimanga di puro investimento (di puro finanziamento) per ogni valore $i \geq i_{min}$. Inoltre, $\forall j: 0 \leq j \leq n-1$, $\mathcal{S}_j(i)$ è funzione non positiva, decrescente e concava (non negativa, crescente e convessa) per ogni $i \in [i_{min}; +\infty[$. La funzione $\mathcal{S}(i)$, inoltre, è decrescente e concava, se $a_0 < 0$, (crescente e convessa, se $a_0 > 0$) in questo stesso intervallo.

Dimostrazione: Se $i \in [i_{min}; +\infty[$, abbiamo:

$$\mathcal{S}_0(i) = a_0 < 0;$$

$$\mathcal{S}_1(i) = a_0 \cdot (1+i) + a_1,$$

per la quale $\mathcal{S}_1(i_{min}) \leq 0$ e $\mathcal{S}'_1(i) = a_0 < 0$, quindi $\mathcal{S}_1(i)$ è funzione non-positiva e decrescente $\forall i \in [i_{min}; +\infty[$.

Per induzione, supponiamo che $\mathcal{S}_{p-1}(i)$ sia funzione non-positiva e decrescente $\forall i \in [i_{min}; +\infty[$.

Allora:

$$\mathbb{S}_p(i) = \mathbb{S}_{p-1}(i) \cdot (1 + i) + a_p, \text{ con}$$

$$\mathbb{S}_p(i_{min}) \leq 0, \text{ e}$$

$$\mathbb{S}'_p(i) = \mathbb{S}_{p-1}(i) + (1 + i) \cdot \mathbb{S}'_{p-1}(i),$$

quindi $\mathbb{S}_p(i)$ è decrescente in quanto $\mathbb{S}_{p-1}(i)$ è non-positiva e decrescente.

Ma $\mathbb{S}(i) = \mathbb{S}_{n-1}(i) \cdot (1 + i) + a_n$, per cui:

$$\mathbb{S}'(i) = \mathbb{S}_{n-1}(i) + (1 + i) \cdot \mathbb{S}'_{n-1}(i) \leq 0, \forall i \in [i_{min}; +\infty[.$$

Abbiamo poi che:

$$\mathbb{S}''_0(i) = \mathbb{S}''_1(i) = 0 \text{ e}$$

$$\mathbb{S}''_2(i) = 2 \cdot \mathbb{S}'_1(i) + (1 + i) \cdot \mathbb{S}''_1(i) = 2 a_0 < 0.$$

Per induzione, supponiamo che $\mathbb{S}_{p-1}(i)$ sia funzione concava $\forall i \in [i_{min}; +\infty[$.

Allora:

$$\mathbb{S}''_p(i) = \mathbb{S}''_{p-1}(i) \cdot (1 + i) + 2 \cdot \mathbb{S}'_{p-1}(i),$$

e quindi $\mathbb{S}_p(i)$ è concava in quanto $\mathbb{S}_{p-1}(i)$ è decrescente e concava.

Ma $\mathbb{S}(i) = \mathbb{S}_{n-1}(i) \cdot (1 + i) + a_n$, per cui:

$$\mathbb{S}''(i) = 2 \cdot \mathbb{S}'_{n-1}(i) + (1 + i) \cdot \mathbb{S}''_{n-1}(i) \leq 0, \forall i \in [i_{min}; +\infty[.$$

E' quindi dimostrato il Teorema 3.

Similmente, dalla $\mathbb{U}_j(i) = \mathbb{U}_{j-1}(i) \cdot (1 + i)^{-1} + a_{n-j}$, si ha che se $\mathbb{U}_{j-1}(i)$ è non negativa (non positiva) e decrescente (crescente) allora $\mathbb{U}_j(i)$ è decrescente (crescente).

Essendo poi $\lim_{i \rightarrow -1} \mathbb{U}_j(i) = \infty$, con il segno di a_n , con dimostrazione analoga a quella del Teorema precedente, abbiamo il:

Teorema 4: Se nel progetto $\mathbb{A}$: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ è $a_n > 0$, ($a_n < 0$) si può sempre determinare un valore del tasso $i = i_{max}$ tale che $\forall j: 0 \leq j \leq n - 1$, $\mathbb{U}_j(i)$ è funzione non negativa, decrescente e convessa (non positiva, crescente e concava) per ogni $i: i \in] - 1; i_{max}[$. La funzione $\mathbb{V}(i)$, inoltre, è decrescente e convessa, se $a_n > 0$, (crescente e concava, se $a_n < 0$) in questo stesso intervallo.

Teorema 5: Il progetto $\mathbb{A}$: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ è di Soper se e solo se vale una delle seguenti condizioni:

$$a) \mathbb{S}(i_{min}) \geq 0,$$

$$b) \mathbb{V}(i_{max}) \leq 0,$$

$$c) i_{min} \leq i_{max}, \text{ nel qual caso per il T.I.R. } i_0 \text{ si ha che:}$$

$$i_{min} \leq i_0 \leq i_{max}.$$

6 – IL TEOREMA DEL TRONCAMENTO

Supponiamo, per ipotesi, che sia possibile arrestare un dato progetto $\mathbb{A}$: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ alla fine di un qualunque periodo, ad esempio il j -esimo, $0 < j < n$, per intraprendere, in sua vece, il sottoprogetto $\mathbb{A}_j$:

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j.$$

Trascurando i problemi di natura pratica ed economica che questo comporta, per una discussione dei quali rimandiamo ai numeri [1], [2], [3], [5], [7] e [14] della Bibliografia, vediamo come l'ipotesi di troncabilità sia stata usata al fine di garantire l'unicità del T.I.R..

Una prima metodologia, proposta da P.H.Karmel in [7], suggerisce di troncare il progetto originale intraprendendo invece quel sottoprogetto che presenti il T.I.R. massimo fra tutti i T.I.R. del progetto e dei suoi sottoprogetti.

Si dimostra che, vedi [7] e [5], così procedendo, il sottoprogetto ottenuto è sicuramente dotato di T.I.R. unico e che esso appartiene alla classe di Soper.

Vale quindi il

Teorema del Troncamento (I forma): Dato un qualunque progetto, il sottoprogetto avente il T.I.R. massimo è un progetto a T.I.R. unico.

Un modo siffatto di procedere, comunque, lascia non pochi dubbi, specie per quanto riguarda la coerenza e l'applicabilità del criterio decisionale che ne scaturisce.

Si vedano, al proposito, le note critiche espresse in [2] e [3].

La seconda metodologia, originata dall'articolo di K. J. Arrow e D. Levhari [1], conferma la critica alla procedura di Karmel, in quanto i due Autori affermano che:

"... choosing a truncation period so as to maximise the internal rate of return is not using the proper criterion for the selection of a truncation period ... one should choose that investment which maximises present value, using the given rates of discount ... the aim in the choice of a truncation period should be that of maximising the present value of the investment project."

Essi quindi propongono di troncare il progetto in modo da rendere massimo il suo Valore Attuale per ogni valore del tasso d'interesse, tenendo però presente che così facendo anche la durata ottima risulterà comunque variabile al variare del tasso.

E concludono dicendo:

"... we prove that if, with a given constant rate of discount, we choose the truncation period so as to maximise the present value of the project, then the internal rate of return of the truncated project is unique. More fully, we prove that if the life of the project is optimally chosen, then the maximised present value of the project is a monotonic decreasing function of the rate of the interest."

Essi pongono quindi $\psi(i) = \max_j V_j(i)$, inviluppo superiore dei Valori Attuali del progetto e di tutti i suoi sottoprogetti, e dimostrano (vedi anche [3] e [14]), generalizzando quanto affermato in [18], il:

Teorema del Troncamento (II forma): Assegnato un qualunque progetto $\mathbb{A}$: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, con $a_0 < 0$, il suo Valore Attuale massimizzato, $\psi(i)$, è una funzione monotona decrescente del tasso i , per la quale:

$$\lim_{i \rightarrow -1} \psi(i) = +\infty \text{ e } \lim_{i \rightarrow +\infty} \psi(i) = a_0,$$

e quindi esiste un solo valore i_0 tale che $\psi(i_0) = 0$.

Come detto, tra gli altri, in [3] e [5], è molto dubbio che il valore i_0 così trovato possa essere legittimamente chiamato T.I.R. del progetto.

Si è preferito usare le parole originali degli Autori, per evidenziare il punto nel quale ci sembra di poter rilevare una certa confusione concettuale, specialmente quando essi affermano che:

"... we shall prove that $\psi(i) = \max_j \mathbb{V}_j(i)$, the present value of the best truncated project, is a decreasing monotonic function of i ."

$\psi(i)$ è l'inviluppo superiore dei Valori Attuali e non va confuso con il Valore Attuale del miglior progetto troncato, dato che in generale questa coincidenza non sussiste.

Comunque, come dimostrato in [13], la procedura di Karmel e quella di Arrow e Levhari conducono, nonostante tutto, a risultati numericamente equivalenti, ovvero il valore critico del tasso che essi determinano è sempre lo stesso.

7 – EQUIVALENZA TRA PUREZZA E TRONCABILITA'

Perfezioneremo il risultato trovato in [9], facendo vedere come, per un progetto di Soper, il Valore Attuale massimizzato e il Valore Attuale del miglior progetto ottenuto mediante il troncamento vengano a coincidere, e dimostreremo oltretutto come il miglior progetto troncato (nel senso di Karmel) sia il progetto stesso.

E' stato dimostrato in [9] che se un progetto è di Soper, allora $\mathbb{V}(i)$ è massimo (o minimo, in base al segno di a_0), rispetto a tutti i $\mathbb{V}_j(i)$, almeno fino al valore del T.I.R. i_0 .

Siamo ora in grado di riformulare quest'ultimo Teorema nella sua forma esatta, mediante il:

Teorema 6: Se il progetto $\mathbb{A}$: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ è di Soper, allora $\mathbb{V}(i)$ è massimo (se $a_0 < 0$) o minimo (se $a_0 > 0$) rispetto a tutti i $\mathbb{V}_j(i)$, per ogni $i \in]-1; i_{max}[$, $\forall j$: $0 \leq j \leq n-1$.

Dimostrazione: Facciamo vedere che $\mathbb{V}(i) - \mathbb{V}_{n-j-1}(i) \geq 0$, se $a_0 < 0$ (≤ 0 se $a_0 > 0$) per ogni j : $0 \leq j \leq n-1$.

Infatti si ha:

$$\mathbb{V}(i) - \mathbb{V}_{n-j-1}(i) = \frac{a_{n-j}}{(1+i)^{n-j}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{a_n}{(1+i)^n} = \frac{1}{(1+i)^{n-j}} \cdot \mathfrak{U}_j(i) .$$

Ma per ipotesi il progetto è di Soper, e per il Teorema 4 si ha che, $\forall j$: $0 \leq j \leq n-1$, $\mathfrak{U}_j(i)$ è funzione non negativa, se $a_0 < 0$, (non positiva, se $a_0 > 0$), per ogni valore $i \in]-1; i_{max}[$ e da questo discende la tesi.

Se un progetto è di Soper, quindi, il suo Valore Attuale è massimo rispetto a quello di tutti i suoi possibili sottoprogetti, in un intervallo all'interno del quale si trova il suo Tasso Interno di Rendimento, quindi coincide con il Valore Attuale massimizzato, ed allora è applicabile e consistente la procedura di Arrow e Levhari, ed il T.I.R. del progetto risulta massimo rispetto ai T.I.R. di tutti i suoi sottoprogetti.

Possiamo quindi affermare che:

Teorema 7: Da ogni progetto $\mathbb{A}$: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ si può sempre estrarre un sottoprogetto (che può essere anche il progetto stesso) che sia di Soper.

In analogia al Teorema 6, poi, abbiamo anche il:

Teorema 8: Se il progetto $\mathbb{A}$: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ è di Soper, allora $\mathfrak{S}(i)$ è minimo (se $a_0 < 0$) o massimo (se $a_0 > 0$) rispetto a tutti i $\mathfrak{S}_j(i)$, per ogni $i \in [i_{min}; +\infty[$, $\forall j$: $0 \leq j \leq n-1$.

Dimostrazione: Vediamo che $\mathfrak{S}(i) - \mathfrak{S}_j(i) \leq 0$, se $a_0 < 0$ (≥ 0 se $a_0 > 0$) $\forall j$: $0 \leq j \leq n-1$.

Infatti si ha:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(i) - \mathfrak{S}_{j-1}(i) &= a_{n-j} \cdot (1+i)^j + \dots + a_1 \cdot (1+i)^{n-1} + a_0 \cdot (1+i)^n = \\ &= (1+i)^j \cdot \mathfrak{S}_{n-j}(i) .\end{aligned}$$

Ma per ipotesi il progetto è di Soper, e quindi si ha che, per ogni j : $0 \leq j \leq n-1$, $\mathfrak{S}_j(i)$ è funzione non positiva, se $a_0 < 0$, (non negativa, se $a_0 > 0$), $\forall i: i \in [i_{min}; +\infty[$ e quindi la tesi.

Segnaliamo poi il fatto, vedi anche [11], che un progetto può avere Valore Attuale massimo (o minimo) rispetto a tutti i suoi sottoprogetti per qualunque valore del tasso $i \in]-1; +\infty[$ se e solo se a_0 è l'unico flusso di cassa negativo (positivo), ovvero se il progetto è semplice.

In questo caso, quindi, $i_{max} = +\infty$.

8 – UN'ULTIMA OSSERVAZIONE

Riprendiamo le funzioni:

$$\mathfrak{U}_j(i) = a_{n-j} + \dots + \frac{a_{n-1}}{(1+i)^{j-1}} + \frac{a_n}{(1+i)^j}$$

che sappiamo, per il Teorema 4, avere tutte lo stesso segno di a_n per valori del tasso i : $-1 < i < i_{max}$.

Consideriamo ora il progetto $\bar{\mathbb{A}}$: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$, ottenuto dal progetto $\mathbb{A}$ mediante una "inversione temporale" dei flussi di cassa.

Indicato ora, per comodità, il valore del tasso con k , esisterà, per il Teorema 3, un valore del tasso, k_{min} , tale che il progetto $\bar{\mathbb{A}}$ è di puro investimento (o finanziamento, a seconda del segno di a_n), per ogni valore del tasso k : $k \geq k_{min}$.

Indicati con $\bar{\mathfrak{S}}_j(k)$ i Saldi del progetto $\bar{\mathbb{A}}$, avranno quindi lo stesso segno di a_n , per ogni $k \geq k_{min}$ e per ogni j : $0 \leq j \leq n-1$, le quantità:

$$\bar{\mathfrak{S}}_j(k) = a_{n-j} + \dots + a_{n-1} \cdot (1+k)^{j-1} + a_n \cdot (1+k)^j .$$

Affinchè le $\mathfrak{U}_j(i)$ e le $\bar{\mathfrak{S}}_j(k)$ possano quindi avere lo stesso segno per uguali valori del tasso d'interesse, dovrà essere:

$$1+i = (1+k)^{-1},$$

da cui ricaviamo quindi che:

$$i_{max} = \frac{1}{1+k_{min}} - 1 ,$$

relazione che sussiste tra il tasso i_{max} "fino al quale il progetto di Soper $\mathbb{A}$ è massimo" ed il tasso k_{min} "dopo il quale il progetto invertito $\bar{\mathbb{A}}$ è puro".

Per una ricerca del valore i_{min} da effettuarsi con gli strumenti del calcolo automatico, vedasi [10].

BIBLIOGRAFIA

[1] – Arrow Kenneth J. - Levhari David

“Uniqueness of the Internal Rate of Return with Variable Life of Investment”

The Economic Journal

Settembre 1969, vol.79, pp.560-566.

[2] – Filippini C.-Filippini L.

“Nota Critica al Teorema del Troncamento”

Ricerche Economiche

Gennaio-Dicembre 1974, vol.28, pp. 3-18.

[3] – Gronchi Sandro

“On Truncation Theorems”

Quaderno n.27 dell'Istituto di Economia della Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie dell'Università degli Studi di Siena

Giugno 1984.

[4] – Gronchi Sandro

“Tasso Interno di Rendimento e Valutazione dei Progetti: una Analisi Teorica”

Collana dell'Istituto di Economia della Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie dell'Università degli Studi di Siena

Anno 1984.

[5] – Gronchi Sandro

“On Investment Criteria Based on the Internal Rate of Return”

Oxford Economic Papers

Anno 1986, vol. 38, n. 1, pp. 174-180 .

[6] – Gronchi Sandro - Lonzi Marco

“Sulla Concordanza di Alcuni Contributi in Tema di Tasso Interno di Rendimento”

Note Economiche del Monte dei Paschi di Siena

Anno 1985, n. 5/6, pp. 139-142.

[7] – Karmel P.H.

“The Marginal Efficiency of Capital”

Economic Record

Dicembre 1959, vol.35, pp.429-434.

[8] – Lonzi Marco

“Aspetti Matematici nella Ricerca di Condizioni di Unicità per il Tasso Interno di Rendimento”

Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali
Anno 1986, n.2.

[9] — Lonzi Marco

“Significatività Economica del Tasso Interno di Rendimento mediante il Valore Attuale di un Progetto e dei suoi Sottoprogetti”

Note Economiche del Monte dei Paschi di Siena

Anno 1985, n. 5/6, pp. 143-157.

[10] — Magnani Umberto

“Su certi problemi di caratterizzazione e di scelta di operazioni finanziarie”

Fascicoli dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria dell'Università degli Studi di Pavia

Anno 1971, n.36.

[11] — Manca Paolo

“Operazioni finanziarie di Soper e operazioni di puro investimento secondo Teichroew-Robichek-Montalbano”

Atti del XII^o Convegno A.M.A.S.E.S., Palermo

Settembre 1988.

[12] — Mao James C.T.

“An Analysis of Criteria for Investment and Financing Decisions under Certainty: a comment”

Management Science

Novembre 1966, vol.13, n.3.

[13] — Norstrom Carl J.

“Uniqueness of the Internal Rate of Return with Variable Life of Investment: a comment”

The Economic Journal

Dicembre 1970, vol.80, pp.983-984.

[14] — Nuti Domenico Mario

“On the Truncation of Production flows”

Kyklos

Anno 1973, vol.80, fasc. n.3, pp.485-496.

[15] — Soper C. S.

“The Marginal Efficiency of Capital: a Further Note”

The Economic Journal

Marzo 1959, vol. 69, pp. 174-177.

[16] — Teichroew Daniel - Robichek Alexander A. - Montalbano Michael

“Mathematical Analysis of Rates of Return Under Certainty”

Management Science

Gennaio 1965, vol. 11, pp. 395-403.

[17] — Teichroew Daniel - Robichek Alexander A. - Montalbano Michael

"An Analysis of Criteria for Investment and Financial Decisions under Certainty"

Management Science

Novembre 1965, vol. 12, pp. 151-179.

[18] – Wright J. F.

"The Marginal Efficiency of Capital"

The Economic Journal

Dicembre 1959, vol. 69, pp. 813-816.