Outstanding capitals e leggi finanziarie interne: un'analisi critica.

Marco Lonzi
Samuele Riccarelli

Sunto

Alcuni concetti relativi alla valutazione di un'operazione d'investimento, quali il tasso interno di rendimento e la scomposizione dell'operazione in singole operazioni uniperiodali, vengono riviste alla luce dei concetti di outstanding capitals e legge finanziaria interna e viene provato come attraverso questi ultimi si raggiungono risultati già noti in letteratura.

Parole chiave: tasso interno di rendimento; outstanding capitals; legge finanziaria interna; operazioni finanziarie pure.

JEL classificazione: C00; G31.

1 – INTRODUZIONE

La condizione di purezza del Tasso Interno di Rendimento (T.I.R.) di un dato progetto riveste un ruolo notevole nella significatività economica e finanziaria per il criterio di scelta che dal T.I.R. scaturisce.

Essa assicura infatti non solo l'unicità del T.I.R., ma pure la massimizzazione del Valore Attuale del progetto, nonché l'esistenza di un'unica scomposizione del progetto globale in progetti monoperiodali, tutti della stessa natura economica (di investimento o di finanziamento).

Sono stati recentemente introdotti nuovi concetti di natura matematico-finanziaria, al fine di migliorare la significatività e l'applicabilità dei criteri per la scelta degli investimenti; tra questi, saranno oggetto della presente nota gli "outstanding capitals" e le "leggi finanziarie interne".

Si studiano in questa nota relazioni intercorrenti tra i nuovi concetti proposti e taluni elementi, quali i saldi periodali, già utilizzati in precedenti teorie.

2 — DEFINIZIONI PRELIMINARI

Diamo di seguito le definizioni e richiamiamo quei risultati, già noti in letteratura, che saranno usati in questa nota.

Definizione1: Diremo progetto (d'investimento) una sequenza di flussi di cassa netti $a_k \in \mathbb{R}$, disponibili alle epoche k: $0 \leq k \leq n$, con $n \geq 1$, ovvero un vettore:

$\mathbb{A}_0^n = (a_0,a_1,...,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, con gli a_k tali che:

$$\begin{cases} a_0 < 0 \,, \\ a_n \neq 0 \,, \\ a_i \cdot a_j < 0, \text{ per almeno una coppia i,j} \end{cases} .$$

Considerazioni analoghe possono essere fatte per i progetti cosiddetti di finanziamento, per i quali invece $a_0 > 0$.

Quando non sia soddisfatta la Definizione 1, parleremo semplicemente di vettore (di flussi di cassa).

Diremo monoperiodale un progetto del tipo $\mathbb{A}_0^1 \in \mathbb{R}^2$: $\mathbb{A}_0^1 = (a_0,a_1)$, $a_0 \cdot a_1 < 0$, o, nel caso più generale, $\mathbb{A}_k^{k+1} \in \mathbb{R}^2$: $\mathbb{A}_k^{k+1} = (a_k,a_{k+1})$, $a_k \cdot a_{k+1} < 0$.

Supporremo che sia possibile arrestare la vita economica di un progetto $\mathbb{A}_0^n$ alla fine di un qualunque periodo, ad esempio il k-esimo, $0 < k < n$, e chiameremo troncamento $\mathbb{A}_0^k$ del progetto $\mathbb{A}_0^n$ il vettore $\mathbb{A}_0^k \in \mathbb{R}^{k+1}$: $\mathbb{A}_0^k = (a_0,a_1,...,a_{k-1},a_k)$.

Definizione 2: Diremo sottoprogetto $\mathbb{A}_0^k$ del progetto $\mathbb{A}_0^n$ ogni suo troncamento $\mathbb{A}_0^k$, $0 < k \leq n$, che soddisfi alla Definizione 1.

Il Valore Attuale di un progetto $\mathbb{A}_0^n$ al tasso i sarà dato da

$$\mathbb{V}_n(i) \;=\; \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot (1+i)^{-j} \;,$$

mentre il suo Montante (o Saldo) sarà espresso da

$$\mathbb{S}_n(i) \;=\; \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot (1+i)^{n-j} \;.$$

Indicheremo il Valore Attuale del sottoprogetto $\mathbb{A}_0^k$ con $\mathbb{V}_k(i)$ ed il suo Saldo (o Montante) con $\mathbb{S}_k(i)$.

Ricordiamo che un progetto è detto semplice quando i suoi flussi di cassa non nulli hanno tutti segno diverso da a_0, mentre è detto di investimento in senso stretto se i flussi di cassa negativi precedono temporalmente tutti quelli positivi.

3 — I PROGETTI PURI E LE LORO PROPRIETA´

Seguendo quanto fatto in [11], [12], [13] e [2], e visto quanto dimostrato in [1], [4] e [3], ricordiamo anzitutto le:

Definizione 3: Un progetto d'investimento $\mathbb{A}_0^n$ si dice puro al dato tasso i se i suoi sottoprogetti $\mathbb{A}_0^k$, $0 \leq k \leq n-1$, presentano Saldi, a quel tasso i, non positivi:

$$\mathbb{S}_k(i) \; = \; \sum_{j=0}^{k} \mathrm{a}_j \cdot (1+i)^{k-j} \; \leq 0 \;\; , \forall \, k \colon 0 \leq k \leq n-1 \; .$$

Definizione 4: Chiamasi T.I.R. del progetto un tasso i_0 per il quale $\mathbb{S}_n(i_0) \; = 0$.

Scriveremo $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{P}(i)$ per indicare che il progetto $\mathbb{A}_0$ è puro al tasso i, scriveremo $\mathbb{A}_0^n \in T(i_0)$ per indicare che il progetto $\mathbb{A}_0^n$ ammette i_0 quale suo T.I.R., scriveremo $\mathbb{A}_0^n \in T\mathcal{P}(i_0)$ per indicare che il progetto $\mathbb{A}_0^n$ è puro nel suo T.I.R. i_0.

Vale, vedi [11], [2] e [3], la seguente:

Proposizione 1: $\mathbb{A}_0^n \in T\mathcal{P}(i_0) \Rightarrow i_0$ è T.I.R. unico.

Come detto in [1], [2] e [4], se $\mathbb{A}_0^n \in T\mathcal{P}(i_0)$, allora $\mathbb{A}_0^n$ può essere decomposto in un'unico modo come una successione di n progetti uniperiodali :

$$\mathbb{A}_{k-1}^k = \{\mathbb{S}_{k-1}(i_0) \; , \; -(1+i_0) \cdot \mathbb{S}_{k-1}(i_0)\}, \forall \; k : 1 \leq k \leq n.$$

Tale scomposizione può essere riassunta nel seguente schema, nel quale per brevità si è posto $\begin{cases} \mathit{\Delta}_{k-1}^k = \mathbb{S}_{k-1}(i_0) \\ \mathit{\Delta}_k^k = \; -(1+i_0) \cdot \mathbb{S}_{k-1}(i_0) \end{cases}$ ed il simbolo $\Rightarrow$ significa prodotto per il fattore $-(1+i_0)$:

$$\begin{array}{llllll}
\mathit{\Delta}_0^1 & \Rightarrow \mathit{\Delta}_1^1 & & & & \\
= & \;\; + & & & & \\
\cdot & \mathit{\Delta}_1^2 & \Rightarrow \mathit{\Delta}_2^2 & & & \\
\cdot & = & \;\; + & & & \\
\cdot & \cdot & \mathit{\Delta}_2^3 & \Rightarrow \mathit{\Delta}_3^3 & & \\
\cdot & \cdot & = & \;\; + & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \mathit{\Delta}_3^4 & \Rightarrow \dots & \\
\cdot & \cdot & \cdot & = & \;\; \dots & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \;\; \dots & \Rightarrow \mathit{\Delta}_{n-2}^{n-2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \;\; +
\end{array}$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \Delta^{n-1}_{n-2} \Rightarrow & \Delta^{n-1}_{n-1} & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & = & + & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \Delta^{n}_{n-1} \Rightarrow & \Delta^{n}_{n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & = & = \\
\hline
\mathrm{a}_0 & \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 & \mathrm{a}_3 & \ldots & \mathrm{a}_{n-2} & \mathrm{a}_{n-1} & \mathrm{a}_n
\end{array}
$$

Essendo $\mathbb{S}_{k-1}(i_0) \leq 0$, ognuno dei progetti uniperiodali ha la natura di progetto d'investimento, e quindi non sorgono ambiguità circa l'utilizzo del T.I.R. quale strumento di valutazione dei progetti.

Essendo, $\forall k$: $0 < k \leq n$, $\lim\limits_{i \to +\infty} \mathbb{S}_k(i) = -\infty$, a causa del segno di a_0, valgono, come detto in [3] e [4], le seguenti:

Proposizione 2: Dato $\mathbb{A}_0^n = (\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, ..., \mathrm{a}_{n-1}, \mathrm{a}_n)$, esiste un valore i_- tale che:

$i \geq i_- \Rightarrow \mathbb{S}_k(i) \leq 0$, $\forall k$: $0 \leq k < n$.

Proposizione 3: $i_- = -1 \Leftrightarrow \mathrm{a}_0 \cdot \mathrm{a}_k \geq 0$, $\forall\, k$: $0 \leq k < n$.

Proposizione 4: $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{TP}(i_0) \Rightarrow \mathrm{a}_0 \cdot \mathrm{a}_n < 0$.

Come detto in [7], tutti i progetti semplici e tutti i progetti in senso stretto risultano puri nel loro T.I.R..

Definite poi, per ogni progetto $\mathbb{A}_0^n$, le quantità:

$$\mathfrak{U}_{n-k}(i) = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{a}_{n-j} \cdot (1+i)^{j-k} \ , 0 \leq k \leq n-1 \ ,$$

si ha che, vedi [4], $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{TP}(i_0) \Leftrightarrow \mathfrak{U}_{n-k}(i_0) \geq 0$, $\forall\, k$: $0 \leq k \leq n-1$, in quanto vale la seguente:

Proposizione 5: Sia $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{TP}(i_0)$, allora:

$\mathbb{S}_k(i_0) \leq 0 \Leftrightarrow \mathfrak{U}_{n-k}(i_0) \geq 0$, $\forall\, k$: $0 \leq k \leq n-1$.

Essendo poi $\lim\limits_{i \to -1} \mathfrak{U}_{n-k}(i) = \infty$, con il segno di a_n, $\forall\, k$: $0 \leq k \leq n-1$, come detto in [4] e [3], vale la:

Proposizione 6: Dato $\mathbb{A}_0^n = (\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, ..., \mathrm{a}_{n-1}, \mathrm{a}_n)$, con $\mathrm{a}_n > 0$, esiste i_+ tale che:

$i \in \,]-1; i_+[\, \Rightarrow \mathfrak{U}_{n-k}(i) \geq 0$, $\forall k$: $0 \leq k \leq n-1$.

I valori i_- e i_+ vengono denotati rispettivamente anche con i_{min} e i_{max}.

Valgono infine, vedi [4] e [3], le seguenti:

Proposizione 7: $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{TP}(i_0) \Leftrightarrow \mathbb{S}_n(i_-) \geq 0$.

Proposizione 8: $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{TP}(i_0) \Leftrightarrow \mathfrak{U}_0(i_+) \leq 0$.

Proposizione 9: $\mathbb{A}_0^n \in T\mathcal{P}(i_0) \Leftrightarrow i_- \leq i_+$ ed inoltre: $i_- \leq i_0 \leq i_+$.

Proposizione 10: $\mathbb{A}_0^n \in T\mathcal{P}(i_0) \Leftrightarrow \mathbb{V}_n(i) \geq \mathbb{V}_k(i), \forall\, i \in\,]-1; i_+[,\, 0 \leq k < n$.

Proposizione 11: $i_+ = +\infty \Leftrightarrow \mathrm{a}_0 \cdot \mathrm{a}_k \leq 0, \forall\, k > 0$.

4 — OUTSTANDING CAPITALS

Sono stati recentemente introdotti in [8] e [9] nuovi strumenti per la valutazione dei progetti, presentati come modalità nuove di esame dell'evoluzione temporale dei flussi di cassa di un progetto.

Dato un progetto d'investimento $\mathbb{A}_0^n = (\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, ..., \mathrm{a}_n)$, la quantità $w_0 = -\mathrm{a}_0$ può essere vista come credito iniziale esigibile da parte del finanziatore; analogamente, scelto il tasso i di valutazione, la quantità $w_1 = w_0 \cdot (1+i) - \mathrm{a}_1$ rappresenta il credito del finanziatore maturato dopo un anno, che sarà aumentato per effetto degli interessi e sarà aumentato/diminuito per la spesa/incasso di a_1.

Generalizzando, al termine del periodo k-esimo avremo la quantità:

$$w_k = w_{k-1} \cdot (1+i) - \mathrm{a}_k\,.$$

Le quantità w_k prendono il nome di "outstanding capitals" del progetto, e descrivono l'evoluzione temporale del capitale investito nell'operazione.

Se $\mathbb{A}_0^n \in T(i_0)$, segue subito che $w_n = 0$.

E' altrettanto immediato verificare che $w_k = -\mathbb{S}_k(i)$.

Gli outstanding possono essere utilizzati per scomporre il Montante e/o il Valore attuale di un progetto, calcolato ad un dato tasso i, mediante quote di competenza per ciascuno dei periodi di vita del progetto stesso. Seguendo quanto detto in [9] e [5], considerato il Valore attuale:

$$\mathbb{V}_n(i) = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 \cdot (1+i)^{-1} + ... + \mathrm{a}_n \cdot (1+i)^{-n}\,,$$

volendo trovare le quote di competenza relative ai vari periodi u_1, u_2,..., u_n, dovremo determinare dei fattori $v_0, v_1, ..., v_{n-1}, v_n$ per i quali sia $v_0 = -\mathrm{a}_0$ e $v_n = 0$, ed inoltre:

$$u_1 = -v_0 + (\mathrm{a}_1 + v_1) \cdot (1+i)^{-1}$$

$$u_2 = -v_1 \cdot (1+i)^{-1} + (\mathrm{a}_2 + v_2) \cdot (1+i)^{-2}$$

e quindi, in generale:

$$u_k = -v_{k-1} \cdot (1+i)^{-(k-1)} + (\mathrm{a}_k + v_k) \cdot (1+i)^{-k}\,.$$

Da queste risulta ovviamente: $\mathbb{V}_n(i) = \sum_{k=1}^{n} u_k\,.$

Se come fattori v_0, v_1,..., v_{n-1}, v_n prendiamo gli outstanding w_0, w_1,..., w_{n-1}, w_n, calcolati per il T.I.R. i_0, risulterà allora

$$\mathbb{V}_n(i_0) = \sum_{k=1}^{n} u_k = 0\,.$$

Essendo i_0 il T.I.R. del progetto mediante il quale sono stati calcolati gli outstanding w_0, w_1,..., w_{n-1}, w_n, dalla

$$w_k = w_{k-1} \cdot (1 + \; i_0) - \mathrm{a}_k$$

otteniamo:

$$\mathrm{a}_k = w_{k-1} \cdot (1 + \; i_0) - w_k$$

che, sostituita nella

$$u_k = \; - w_{k-1} \cdot (1+i)^{-(k-1)} + (\mathrm{a}_k + w_k) \cdot (1+i)^{-k}\,,$$

porta alla:

$$u_k = \; - w_{k-1} \cdot (1+i)^{-(k-1)} + (w_{k-1} \cdot (1+i_0) - w_k + w_k) \cdot (1+i)^{-k}$$

dalla quale si ha:

$$u_k = \; - w_{k-1} \cdot (1+i)^{-(k-1)} + w_{k-1}(1 + \; i_0) \cdot (1 + \; i)^{-k}$$

e quindi

$$u_k = \; - w_{k-1} \cdot (1 + \; i)^{-k} \cdot (\; i - i_0) = \mathbb{S}_{k-1}(i_0) \cdot \frac{(\; i - i_0)}{(1 + \; i)^k}\,.$$

Essendo $\mathbb{S}_k(i_0) \leq 0$, si ritrova in questo modo un risultato già noto, ovvero che per un progetto a T.I.R. puro le quote di competenza relative ai vari periodi risultano non negative per $i \leq i_0$ e non positive per $i \geq i_0$.

5 — LEGGI FINANZIARIE INTERNE

Seguendo quanto fatto in [9], supponiamo ora, per rendere la valutazione del progetto più aderente alla realtà finanziaria, che il tasso di valutazione i non rimanga costante nel tempo, ma vari, periodo per periodo.

A tal fine viene introdotto un vettore di tassi $J_{1,n} = (i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, i_n) = \Phi$, dove i_k rappresenta il tasso impiegato tra il tempo $k-1$ ed il tempo k, con $i_k \in \,]-1;\,+\infty[$.

Un tale vettore di tassi viene detto "legge finanziaria".

Siano poi $J_{j,k} = (i_j, i_{j+1}, \ldots, i_{k-1}, i_k)$ e $\Phi_{j,k} = \prod_{r=j}^{k} (1 + \; i_r)\,.$

Con queste notazioni il Saldo $\mathbb{S}_k$ del progetto viene espresso come:

$$\mathbb{S}_k(J_{1,k}) = \mathrm{a}_0 \cdot \prod_{r=1}^{k} (1 + \ i_r) + \mathrm{a}_1 \cdot \prod_{r=2}^{k} (1 + \ i_r) + ... + \mathrm{a}_{k-1} \cdot \prod_{r=k}^{k} (1 + \ i_r) + \mathrm{a}_k =$$

$$\mathbb{S}_k(J_{1,k}) = \mathrm{a}_0 \cdot \Phi_{1,k} + \mathrm{a}_1 \cdot \Phi_{2,k} + ... + \mathrm{a}_k \cdot \Phi_{k+1,k} = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{a}_j \cdot \Phi_{j+1,k} \,,$$

avendo posto, per definizione: $\Phi_{k+1,k} = 1$.

Il Saldo $\mathbb{S}_n(\Phi)$ del progetto $\mathbb{A}_0^n$ calcolato mediante la legge finanziaria Φ può essere espresso anche come prodotto scalare $< \mathbb{A}_0^n; \Omega >$, con $\Omega = (\Phi_{1,k}; \Phi_{2,k}; \ldots ; \Phi_{n+1,n})$.

Possiamo dare allora le seguenti

Definizione 5: Un progetto d'investimento $\mathbb{A}_0^n$ si dice, alla data legge finanziaria $J_{1,n}$, puro se tutti i suoi sottoprogetti $\mathbb{A}_0^k$, $0 \leq k \leq n-1$, presentano Saldi, calcolati a quella data legge $J_{1,n}$, non positivi:

$$\mathbb{S}_k(J_{1,k}) \ = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{a}_j \cdot \Phi_{j+1,k} \leq 0 \ \ , \forall\, k\colon 0 \leq k \leq n-1 \ .$$

Indicheremo allora questo scrivendo: $\mathbb{A}_0^n \in PLF(J_{1,n})$.

Definizione 6: La legge finanziaria $J_{1,n}$ è detta interna al progetto d'investimento $\mathbb{A}_0^n$ se

$$\mathbb{S}_n(J_{1,n}) \ = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{a}_j \cdot \Phi_{j+1,k} = 0 \,.$$

Indicheremo questo scrivendo: $\mathbb{A}_0^n \in ILF(J_{1,n})$.

A differenza di quanto accade per il T.I.R., è sempre garantita l'esistenza di leggi finanziarie interne per un progetto che soddisfi alla Definizione 1, anzi, ad eccezione di particolari casi, esistono sempre per un progetto infinite leggi finanziarie interne.

Come detto in [14] e [10], valgono infatti le seguenti:

Proposizione 12: Un progetto ammette almeno una legge finanziaria interna se e solo se i suoi flussi di cassa presentano almeno una variazione di segno.

Si può poi vedere, [10], come dall'esistenza di almeno una legge finanziaria interna ne discenda l'esistenza di infinite, salvo il caso particolare, espresso dalla seguente:

Proposizione 13: Un progetto ammette un numero finito di leggi finanziarie interne se e solo se il progetto è uniperiodale.

Ovviamente in questo caso tale legge risulta unica.

Analogamente a quanto visto nel caso del tasso costante nel tempo, le infinite soluzioni dell'equazione $\mathbb{S}_n(\Phi) = 0$ permettono di scomporre un progetto in una sequenza di operazioni uniperiodali, dipendenti ovviamente dalla scelta della legge finanziaria interna, del tipo:

$\Lambda_{k-1}^{k} = \{\mathbb{S}_{k-1}(J_{1,k-1}), -(1+i_k)\cdot\mathbb{S}_{k-1}(J_{1,k-1})\}$, $\forall\, k: 1 \le k \le n.$

tali che:

$\mathbb{S}_0 = \mathrm{a}_0$,

$\mathbb{S}_k(J_{1,k}) - (1+i_k)\cdot\mathbb{S}_{k-1}(J_{1,k-1}) = \mathrm{a_j}$,

$-(1+i_n)\cdot\mathbb{S}_{n-1}(J_{1,n-1}) = \mathrm{a}_n$.

L'ultima equazione garantisce che $\mathbb{S}_n(\Phi) = 0$.

La scomposizione così determinata non garantisce però che ogni singola operazione uniperiodale rappresenti un'investimento.

I segni della sequenza $\{\mathbb{S}_{k-1}(J_{1,k-1}), -(1+i_k)\cdot\mathbb{S}_{k-1}(J_{1,k-1})\}$ sono, in generale, dipendenti dalla scelta della legge finanziaria interna.

Come dimostrato in [10], valgono comunque le seguenti:

Proposizione 14: Dato un progetto $\mathbb{A}_0^n$, i termini $\mathbb{S}_{k-1}(J_{1,k-1})$ sono di segno costante per ogni legge finanziaria interna se e solo se il progetto è di investimento in senso stretto.

Proposizione 15: Un progetto $\mathbb{A}_0^n$ è puro per qualunque legge finanziaria interna se e solo se è un'investimento in senso stretto.

Ma non sono solo gli investimenti in senso stretto che ammettono legge finanziaria interna pura. Vale infatti, vedi [6], la seguente:

Proposizione 16: Un progetto $\mathbb{A}_0^n$ ammette almeno una legge finanziaria interna pura se e solo se $\mathrm{a}_n > 0$.

Concludiamo dimostrando infine che vale la seguente:

Proposizione 17: Siano $\Phi = (i_1, i_2, ..., i_k, ..., i_n)$ e $\Psi = (j_1, j_2, ..., j_k, ..., j_n)$ due leggi finanziarie e sia poi $\Psi \ge \Phi$, ovvero $j_k \ge i_k$, $\forall\, k$: $1 \le k \le n$. Se il progetto d'investimento $\mathbb{A}_0^n$ è puro alla legge finanziaria Φ, esso è puro anche alla legge finanziaria Ψ.

Ovvero: $(\mathbb{A}_0^n \in PLF(\Phi)$ e $\Psi \ge \Phi) \Rightarrow \mathbb{A}_0^n \in PLF(\Psi)$.

Dimostrazione: Essendo il progetto d'investimento, sarà $\mathrm{a}_0 < 0$.

Da $\mathrm{a}_0 < 0$ e da $j_1 \ge i_1$ segue $\mathrm{a}_0\cdot(1+j_1) \le \mathrm{a}_0\cdot(1+i_1)$ e quindi anche:

$\mathrm{a}_0\cdot(1+j_1)+\mathrm{a}_1 \le \mathrm{a}_0\cdot(1+i_1)+\mathrm{a}_1$

ed essendo $\mathrm{a}_0\cdot(1+i_1)+\mathrm{a}_1 = \mathbb{S}_1(\Phi) \le 0$, ne consegue:

$\mathrm{a}_0\cdot(1+j_1)+\mathrm{a}_1 = \mathbb{S}_1(\Psi) \le 0$.

Da $\mathrm{a}_0\cdot(1+j_1)+\mathrm{a}_1 \le \mathrm{a}_0\cdot(1+i_1)+\mathrm{a}_1 \le 0$ e da $j_2 \ge i_2$ otteniamo:

$(\mathrm{a}_0\cdot(1+j_1)+\mathrm{a}_1)\cdot(1+j_2) \le (\mathrm{a}_0\cdot(1+i_1)+\mathrm{a}_1)\cdot(1+i_2)$

e quindi anche:

$(a_0 \cdot (1 + j_1) + a_1) \cdot (1 + j_2) + a_2 \leq (a_0 \cdot (1 + i_1) + a_1) \cdot (1 + i_2) + a_2$

ed essendo $(a_0 \cdot (1 + i_1) + a_1) \cdot (1 + i_2) + a_2 = \mathbb{S}_2(\Phi) \leq 0$, ne consegue anche:

$(a_0 \cdot (1 + j_1) + a_1) \cdot (1 + j_2) + a_2 = \mathbb{S}_2(\Psi) \leq 0$.

In maniera induttiva, se $\mathbb{S}_{k-1}(\Psi) \leq \mathbb{S}_{k-1}(\Phi) \leq 0$ e se, per ipotesi, $j_k \geq i_k$, segue:

$\mathbb{S}_{k-1}(\Psi) \cdot (1 + j_k) \leq \mathbb{S}_{k-1}(\Phi) \cdot (1 + i_k)$

e quindi anche:

$\mathbb{S}_{k-1}(\Psi) \cdot (1 + j_k) + a_k \leq \mathbb{S}_{k-1}(\Phi) \cdot (1 + i_k) + a_k \leq 0$

da cui: $\mathbb{S}_k(\Psi) \leq 0$, $\forall\, k$: $1 \leq k < n$, ovvero il progetto d'investimento $\mathbb{A}_0^n$ è puro alla legge finanziaria Ψ. ■

BIBLIOGRAFIA

[1] - GRONCHI S. : *"Tasso Interno di Rendimento e Valutazione dei Progetti: un'Analisi Teorica"*.
Collana dell'istituto di Economia della Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie dell'Università di Siena, 1984.
[2] - GRONCHI S. : *"On Investment Criteria Based on the Internal Rate of Return"*.
Oxford Economic Papers, vol. 38, n. 1, pp. 1-7, 1986.
[3] - LONZI M. : *" Valore Attuale e Montante nei progetti puri "*.
Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali, n. 2, anno 1989.
[4] - MANCA P. : *"Operazioni Finanziarie di Soper e Operazioni di Puro Investimento secondo Teichroew-Robichek-Montalbano*".
Atti del XII Convegno Amases, Palermo, 1988.
[5] - MANCA P. : *"The Splitting up of a Financial Project into Uniperiodic Consecutive Projects*".
Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali, n. 1, pp. 107-117, 1989.
[6] - MANCA P. : *"Investimenti e finanziamenti generalizzati"*.
Euro-Working Group on Financial Modelling, Sirmione, 1990.
[7] - MAO J. C. T. : *"An Analysis of Criteria for Investment and Financing Decisions under Certainty : a Comment"*.
Management Science, vol. 13, n. 3, novembre 1966.
[8] - PECCATI L. : *"D.C.F. e risultati di periodo"*.
Atti dell'XI Convegno A.M.A.S.E.S. , Aosta, Settembre 1987.
[9] - PECCATI L. : *"Valutazione analitica e sintetica di attività finanziarie"*.
Rivista Milanese di Economia, Serie quaderni n.21, Milano, Settembre 1991.
[10] - RICCARELLI S. : *"Dal tasso interno puro alla legge finanziaria interna pura"*.
Tesi di Dottorato, Università di Brescia, febbraio 1999.
[11] - SOPER C. S. : *"The Marginal Efficiency of Capital: a Further Note"*.
The Economic Journal, marzo 1959, vol. 69, pp.174-177.
[12] - TEICHROEW D. , A. ROBICHEK e M. MONTALBANO : *"Mathematical Analysis of Rates of Return under Certainty"*.
Management Science, gennaio 1965, vol. 11, pp.395-403.
[13] - TEICHROEW D. , A. ROBICHECK e M. MONTALBANO : *"An Analysis of Criteria for Investment and Financial Decisions under Certainty"*.
Management Science, novembre 1965, vol.12, pp. 151-179.
[14] - VISCOLANI B. : *"The Internal Financial Law Set"* .
Rivista di matematica per le scienze economiche e sociali, n.15, vol.2, pp. 63-72. 1992.