1 — INTRODUZIONE

Viene presentata una forma compatta di rappresentazione e calcolo per derivate seconde di funzioni composte. Si applica tale forma al calcolo delle derivate successive di funzioni definite implicitamente mediante una equazione o un sistema di equazioni, nonchè al calcolo del differenziale secondo di tale tipo di funzioni.

2 — NOTAZIONI E RICHIAMI PRELIMINARI

Lettere minuscole: x indicano valori o variabili reali, lettere maiuscole: $\mathbb{X}$ indicano vettori o variabili vettoriali.

Dati i vettori $\mathbb{X} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{Y} = (y_1, y_2, ..., y_p) \in \mathbb{R}^p$, indicheremo con $(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})$ il vettore $(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_p) \in \mathbb{R}^{n+p}$.

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to y$ si indica con $\mathcal{D}(f(x)) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x)$ la derivata della funzione $y = f(x)$.

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, x \to \mathbb{Y}$ si indica con $\mathcal{D}(f(x)) = \dfrac{\mathrm{d}(\mathbb{Y})}{\mathrm{d}x} = \mathbb{Y}'(x)$ la derivata del vettore $\mathbb{Y}(x) = f(x)$.

Data $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \mathbb{X} \to y$ si indica con $\mathcal{D}(f(\mathbb{X})) = \dfrac{\partial y}{\partial(\mathbb{X})} = \nabla f(\mathbb{X})$ il vettore gradiente della funzione $y(\mathbb{X}) = f(\mathbb{X})$.

Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ si indica con $\mathcal{D}(f(\mathbb{X})) = \dfrac{\partial(\mathbb{Y})}{\partial(\mathbb{X})} = J_f(\mathbb{X})$ la matrice Jacobiana della funzione $\mathbb{Y}(\mathbb{X}) = f(\mathbb{X})$.

La matrice Jacobiana viene indicata anche con $\dfrac{\partial(\mathbb{Y})}{\partial(\mathbb{X})} = \dfrac{\partial(y_1, y_2, ..., y_p)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}$.

Si consideri una generica funzione composta:

$\mathbb{Y} = f(\mathbb{X}) = f(g(\mathbb{T}))$, $\mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p, \mathbb{T} \xrightarrow{g} \mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y}$
$\mathbb{T} = (t_1, t_2, ..., t_m); \mathbb{X} = (x_1, x_2, ..., x_n); \mathbb{Y} = (y_1, y_2, ..., y_p)$
$\mathbb{X} = g(\mathbb{T}) = (g_1(\mathbb{T}), .., g_n(\mathbb{T})) = (g_1(t_1, .., t_m), .., g_n(t_1, .., t_m))$;
$\mathbb{Y} = f(\mathbb{X}) = (f_1(\mathbb{X}), .., f_p(\mathbb{X})) = (f_1(x_1, ..., x_n), .., f_p(x_1, ..., x_n))$.

Nel caso $m = n = p = 1 \,:\, \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, t \xrightarrow{g} x \xrightarrow{f} y, y = f(g(t))$
risulta $\mathcal{D}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Nel caso $m = n = 1,\ p > 1 \,:\, \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p, t \xrightarrow{g} x \xrightarrow{f} \mathbb{Y}, \mathbb{Y} = f(g(t))$
risulta: $\mathcal{D}(f(g(t))) = \dfrac{\mathrm{d}(\mathbb{Y}(x(t)))}{\mathrm{d}t} = \mathbb{Y}'(x(t)) \cdot x'(t)$.

Nel caso $m = p = 1,\ n > 1 \,:\, \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}, t \xrightarrow{g} \mathbb{X} \xrightarrow{f} y, y = f(g(t))$
risulta: $\mathcal{D}(f(g(t))) = \dfrac{\mathrm{d}y(\mathbb{X}(t))}{\mathrm{d}t} = \nabla f(\mathbb{X}(t)) \cdot \mathbb{X}'(t)$.

Nel caso $m = 1,\ n, p > 1 \,:\, \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p, t \xrightarrow{g} \mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y}, \mathbb{Y} = f(g(t))$
risulta: $\mathcal{D}(f(g(t))) = \dfrac{\mathrm{d}(\mathbb{Y}(\mathbb{X}(t)))}{\mathrm{d}t} = J_f(\mathbb{X}(t)) \cdot \mathbb{X}'(t)$.

Nel caso $m,\ n, p > 1 \,:\, \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p, \mathbb{T} \xrightarrow{g} \mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y}, \mathbb{Y} = f(g(\mathbb{T}))$
risulta: $\mathcal{D}(f(g(\mathbb{T}))) = \dfrac{\partial(\mathbb{Y}(\mathbb{X}(\mathbb{T})))}{\partial(\mathbb{T})} = J_{f(g)}(\mathbb{T}) = J_f(\mathbb{X}(\mathbb{T})) \cdot J_g(\mathbb{T})$.

3 — DERIVATE SECONDE DELLE FUNZIONI COMPOSTE

Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, t \xrightarrow{g} \mathbb{X} = (x_1, x_2) \xrightarrow{f} y, y = f(g(t))$.
Sia g derivabile due volte e sia f differenziabile due volte.
Da $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$ risulta:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\cdot\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2}+\\ &+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\cdot\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2}=\\ &=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\right)^2+\\ &+\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2}\,.\end{aligned}$$

In notazione abbreviata l'uguaglianza precedente può essere scritta come:
$y''=f''_{11}\,(x'_1)^2+2\,f''_{12}\,x'_1\,x'_2+f''_{22}\,(x'_2)^2+f'_1\,x''_1+f'_2\,x''_2$ ed anche:
$y''=y''_{11}\,(x'_1)^2+2\,y''_{12}\,x'_1\,x'_2+y''_{22}\,(x'_2)^2+y'_1\,x''_1+y'_2\,x''_2\,.$

Da $\mathbb{X}=(x_1,x_2)$ segue $\mathbb{X}'=\dfrac{\mathrm{d}(\mathbb{X})}{\mathrm{d}t}=(x'_1,x'_2)$ e $\mathbb{X}''=\dfrac{\mathrm{d}^2(\mathbb{X})}{\mathrm{d}t^2}=(x''_1,x''_2)$,
ed essendo $\nabla f(x_1,x_2)=(f'_1,f'_2)=(y'_1,y'_2)$ e
$\mathbb{H}(f(x_1,x_2))=\begin{Vmatrix} y''_{11} & y''_{12}\\ y''_{12} & y''_{22}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} f''_{11} & f''_{12}\\ f''_{12} & f''_{22}\end{Vmatrix}$, la precedente uguaglianza può essere espressa anche come:
$y''=\mathbb{X}'(t)\cdot\mathbb{H}(f(\mathbb{X}(t)))\cdot(\mathbb{X}'(t))^{\mathrm{T}}+\nabla f(\mathbb{X}(t))\cdot\mathbb{X}''(t)\,,$
dove $\mathbb{X}'(t),\mathbb{X}''(t),\nabla f(\mathbb{X}(t))\in\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{H}(f(\mathbb{X}(t)))$ è una matrice 2×2.

Sia $\mathbb{R}\xrightarrow{g}\mathbb{R}^n\xrightarrow{f}\mathbb{R},\,t\xrightarrow{g}\mathbb{X}\xrightarrow{f}y,y=f(g(t))\,.$
Sia g derivabile due volte e sia f differenziabile due volte.
Con calcoli analoghi ai precedenti si ottiene ancora:
$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}=\mathbb{X}'(t)\cdot\mathbb{H}(f(\mathbb{X}(t)))\cdot(\mathbb{X}'(t))^{\mathrm{T}}+\nabla f(\mathbb{X}(t))\cdot\mathbb{X}''(t)\,,$
dove $\mathbb{X}'(t),\mathbb{X}''(t),\nabla f(\mathbb{X}(t))\in\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{H}(f(\mathbb{X}(t)))$ è una matrice $n\times n$.

Sia $\mathbb{R}\xrightarrow{g}\mathbb{R}^n\xrightarrow{f}\mathbb{R}^p,\,t\xrightarrow{g}\mathbb{X}\xrightarrow{f}\mathbb{Y},\mathbb{Y}=f(g(t))\,.$
Sia g derivabile due volte e sia f differenziabile due volte.
Con calcoli analoghi ai precedenti si ottengono p uguaglianze:
$\dfrac{\mathrm{d}^2 y_i}{\mathrm{d}t^2}=\mathbb{X}'(t)\cdot\mathbb{H}(f_i(\mathbb{X}(t)))\cdot(\mathbb{X}'(t))^{\mathrm{T}}+\nabla f_i(\mathbb{X}(t))\cdot\mathbb{X}''(t)\,,\ 1\le i\le p$
dove $\mathbb{X}'(t),\mathbb{X}''(t),\nabla f(\mathbb{X}(t))\in\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{H}(f_i(\mathbb{X}(t)))$ è una matrice $n\times n$.

Sia $\mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p, \mathbb{T} \xrightarrow{g} \mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y}, \mathbb{Y} = f(g(\mathbb{T}))$.

Possiamo generalizzare quanto visto con il:

Teorema 1 : Date le due funzioni:
$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, (t_1, t_2, ..., t_m) \to (x_1, x_2, ..., x_n)$,
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, (x_1, x_2, ..., x_n) \to (y_1, y_2, ..., y_p)$, ovvero:
$\mathbb{Y} = f(\mathbb{X}(\mathbb{T})) = (f_1(\mathbb{X}(\mathbb{T})), ..., f_p(\mathbb{X}(\mathbb{T}))) = f(g(\mathbb{T}))$
ambedue differenziabili due volte, vale la seguente formula generale:

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial t_j \partial t_k} = \frac{\partial \mathbb{X}(\mathbb{T})}{\partial t_j} \cdot \mathbb{H}(f_i(\mathbb{X}(\mathbb{T}))) \cdot \left(\frac{\partial \mathbb{X}(\mathbb{T})}{\partial t_k}\right)^{\mathrm{T}} + \nabla f_i(\mathbb{X}(\mathbb{T})) \cdot \frac{\partial^2 \mathbb{X}(\mathbb{T})}{\partial t_j \partial t_k},$$

$1 \le i \le p$, $1 \le j, k \le m$, costituita da $p \cdot \dfrac{m^2 + m}{2}$ uguaglianze, dove:
$\dfrac{\partial \mathbb{X}(\mathbb{T})}{\partial t_j}, \dfrac{\partial^2 \mathbb{X}(\mathbb{T})}{\partial t_j \partial t_k}, \nabla f_i(\mathbb{X}(\mathbb{T})) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{H}(f_i(\mathbb{X}(\mathbb{T})))$ è una matrice $n \times n$.

4 – DERIVATE SECONDE DELLE FUNZIONI DEFINITE IMPLICITAMENTE DA UNA EQUAZIONE

I Caso: Equazione $f(x, y) = k$: **funzione implicita** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Esistenza e proprietà della funzione implicita sono stabilite nel seguente:

Teorema 2 (U. Dini) : Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua con derivata f'_y continua in $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^2$; sia $f(x_0, y_0) = k$ e sia $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.
Allora esistono un intorno $\mathfrak{I}(x_0)$ e un'unica funzione continua $y = y(x)$, tale che $y_0 = y(x_0)$ e $f(x, y(x)) = k$, $\forall\, x \in \mathfrak{I}(x_0)$.
Se poi anche f'_x è continua in $\mathbb{A}$, allora $y(x)$ è derivabile in $\mathfrak{I}(x_0)$ e risulta:
$y'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{f'_x}{f'_y}$, $\forall\, x \in \mathfrak{I}(x_0)$.
La funzione $y'(x)$ infine è continua $\forall\, x \in \mathfrak{I}(x_0)$.

Funzione implicita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Derivata prima

Posto $w = f(x,y) = k$, sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^2$.
Nell'ipotesi $f'_y(x_0,y_0) \neq 0$ sia definita implicitamente $y = y(x)$.

Dalla composizione di funzioni:
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, x \to (x, y(x)) \xrightarrow{f} w = f(x,y) = k$ si ha:
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \nabla f(x,y).\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = f'_x \cdot 1 + f'_y \cdot y'(x) = 0\,,$$
e quindi si ricava:
$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f'_x}{f'_y}\,.$$

Funzione implicita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Derivata seconda

Nell'ipotesi $f'_y(x_0,y_0) \neq 0$, sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Dalla composizione di funzioni:
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, x \to (x, y(x)) \xrightarrow{f} w = f(x,y) = k$
e da $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = f'_x + f'_y \cdot y' = 0$, derivando ancora rispetto a x si ottiene:
$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} = f''_{xx} + 2f''_{xy} \cdot y' + f''_{yy} \cdot (y')^2 + f'_y \cdot y'' = 0 \text{ da cui:}$$
$$y'' = -\frac{f''_{xx} + 2f''_{xy}\, y' + f''_{yy}\, (y')^2}{f'_y}\,.$$

Applicando il Teorema 1, da $\mathbb{X} = \mathbb{X}(x) = (x,y)$, da cui $\mathbb{X}'(x) = (1, y')$ e $\mathbb{X}''(x) = (0, y'')$, si ha:
$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} = \mathbb{X}'(x) \cdot \mathbb{H}(f(\mathbb{X}(x))) \cdot (\mathbb{X}'(x))^{\mathrm{T}} + \nabla f(\mathbb{X}(x)) \cdot \mathbb{X}''(x) = 0 \text{ da cui:}$$
$$\|\, 1 \quad y' \,\| \cdot \left\| \begin{matrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{12} & f''_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 \\ y' \end{matrix} \right\| + \left(f'_x, f'_y\right) \cdot (0, y'') = 0 \text{ da cui si ricava:}$$
$$y'' = -\frac{f''_{xx} + 2f''_{xy}\, y' + f''_{yy}\, (y')^2}{f'_y}\,.$$

II Caso: Equazione $f(x_1, x_2, y) = k$ **: funzione implicita** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Da $f(\mathbb{X}|\, y) = k$, $k \in \mathbb{R}$, sia $f(\mathbb{X}_0|\, y_0) = k$ e $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3$, con $f_y'(\mathbb{X}_0|\, y_0) \neq 0$ per cui, per il Teorema del Dini, risulta definita implicitamente $y = y(\mathbb{X})$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $\mathfrak{I}(\mathbb{X}_0)$.

Funzione implicita $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **: Derivata prima**

Posto $w = f(\mathbb{X}|\, y) = k$, sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3$.
Nell'ipotesi $f_y'(\mathbb{X}_0|\, y_0) \neq 0$ sia definita implicitamente $y = y(\mathbb{X})$.

Dalla composizione di funzioni:
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \mathbb{X} \to (\mathbb{X}|\, y) \xrightarrow{f} w = f(\mathbb{X}|\, y) = k$,
posto $y'_{x_i} = y'_i$, $f'_{x_i} = f'_i$, risulta:

$\dfrac{\partial w}{\partial(\mathbb{X})} = \dfrac{\partial w}{\partial(\mathbb{X}|\, y)} \cdot \dfrac{\partial(\mathbb{X}|\, y)}{\partial(\mathbb{X})} = 0$ da cui otteniamo:

$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial w}{\partial x_1} & \dfrac{\partial w}{\partial x_2} \end{matrix} \right\| = \nabla f(\mathbb{X}|\, y) \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y'_1 & y'_2 \end{matrix} \right\| = 0$ ovvero:

$\dfrac{\partial w}{\partial x_1} = \left(f'_1, f'_2, f'_y\right) \cdot (1, 0, y'_1) = f'_1 + f'_y \cdot y'_1 = 0$, e

$\dfrac{\partial w}{\partial x_2} = \left(f'_1, f'_2, f'_y\right) \cdot (0, 1, y'_2) = f'_2 + f'_y \cdot y'_2 = 0$,

dalle quali otteniamo: $(y'_1, y'_2) = \left(-\dfrac{f'_1}{f'_y}, -\dfrac{f'_2}{f'_y} \right)$ e quindi:

$\nabla y(\mathbb{X}) = \left(-\dfrac{f'_1(\mathbb{X}|\, y)}{f'_y(\mathbb{X}|\, y)}, -\dfrac{f'_2(\mathbb{X}|\, y)}{f'_y(\mathbb{X}|\, y)} \right)$.

Funzione implicita $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **: Derivate seconde**

Nell'ipotesi $f_y'(\mathbb{X}_0|\, y_0) \neq 0$, sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Dalla composizione di funzioni:
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}:\ \mathbb{X} \to (\mathbb{X}|\, y) \xrightarrow{f} w = f(\mathbb{X}|\, y) = k$,
posto: $y''_{x_i x_j} = y''_{ij}$, $f''_{x_i x_j} = f''_{ij}$ ed essendo:

$$\frac{\partial(\mathbb{X}|\,y)}{\partial x_1} = (1, 0, y_1') \,, \ \frac{\partial(\mathbb{X}|\,y)}{\partial x_2} = (0, 1, y_2') \ \text{ e } \ \frac{\partial^2(\mathbb{X}|\,y)}{\partial x_i\,\partial x_j} = \big(0, 0, y_{ij}''\big)\,,$$
applicando il Teorema 1 otteniamo:
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial(\mathbb{X}|\,y)}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(f(\mathbb{X}|\,y)) \cdot \left(\frac{\partial(\mathbb{X}|\,y)}{\partial x_j}\right)^{\mathrm{T}} + \big(f_1', f_2', f_y'\big) \cdot \big(0, 0, y_{ij}''\big) = 0$$
che permette di ricavare le derivate parziali seconde:
$$y_{ij}'' = \frac{\partial^2 y}{\partial x_i\,\partial x_j} = -\frac{1}{f_y'} \cdot \frac{\partial(\mathbb{X}|\,y)}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(f(\mathbb{X}|\,y)) \cdot \left(\frac{\partial(\mathbb{X}|\,y)}{\partial x_j}\right)^{\mathrm{T}} ,\ 1 \le i, j \le 2\,.$$

Esplicitando:
$$y_{11}'' = -\frac{1}{f_y'} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & y_1' \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} f_{11}'' & f_{12}'' & f_{1y}'' \\ f_{12}'' & f_{22}'' & f_{2y}'' \\ f_{1y}'' & f_{2y}'' & f_{yy}'' \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ y_1' \end{Vmatrix} ,$$
$$y_{12}'' = -\frac{1}{f_y'} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & y_1' \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} f_{11}'' & f_{12}'' & f_{1y}'' \\ f_{12}'' & f_{22}'' & f_{2y}'' \\ f_{1y}'' & f_{2y}'' & f_{yy}'' \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ y_2' \end{Vmatrix} ,$$
$$y_{22}'' = -\frac{1}{f_y'} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 & y_2' \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} f_{11}'' & f_{12}'' & f_{1y}'' \\ f_{12}'' & f_{22}'' & f_{2y}'' \\ f_{1y}'' & f_{2y}'' & f_{yy}'' \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ y_2' \end{Vmatrix} .$$

Funzione implicita $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Differenziali I° e II°

Nell'ipotesi $f_y'(\mathbb{X}_0|\,y_0) \ne 0$, sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Dalla composizione di funzioni:
$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R} :\ \mathbb{X} \to (\mathbb{X}|\,y) \xrightarrow{f} w = f(\mathbb{X}|\,y) = k\,,$$
differenziando si ha:
$\mathrm{d}w = f_1'\,\mathrm{d}x_1 + f_2'\,\mathrm{d}x_2 + f_y'\,\mathrm{d}y = 0$, e da questa ricaviamo:
$\mathrm{d}y = -\dfrac{f_1'}{f_y'}\,\mathrm{d}x_1 - \dfrac{f_2'}{f_y'}\,\mathrm{d}x_2$, nell'ipotesi $f_y' \ne 0$.

Differenziando nuovamente otteniamo:
$\mathrm{d}^2 w = \mathrm{d}^2 f(\mathbb{X}\,|\,y) + f_y'\,\mathrm{d}^2 y = 0$, da cui ricaviamo $\mathrm{d}^2 y = -\dfrac{\mathrm{d}^2 f(\mathbb{X}\,|\,y)}{f_y'}$.

III Caso: Equazione $f(x_1, x_2, ..., x_n, y) = k$: funzione implicita $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Da $f(\mathbb{X}\,|\,y) = k$, $k \in \mathbb{R}, \mathbb{X} \in \mathbb{R}^n$, sia $f(\mathbb{X}_0|\,y_0) = k$, sia f derivabile con derivate continue con $f'_y(\mathbb{X}_0|\,y_0) \neq 0$, per cui risulta definita implicitamente $y = y(\mathbb{X}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Funzione implicita $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: Derivate prime

Posto $w = f(\mathbb{X}|\,y) = k$, sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.
Nell'ipotesi $f'_y(\mathbb{X}_0|\,y_0) \neq 0$ sia definita implicitamente $y = y(\mathbb{X})$.

Dalla composizione di funzioni:

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{f} \mathbb{R}\,,\ \mathbb{X} \to (\mathbb{X}\,|\,y) \xrightarrow{f} w = f(\mathbb{X}\,|\,y) = k\,.$$

derivando rispetto alla generica variabile x_i si ha:

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \nabla f(\mathbb{X}\,|\,y) \cdot \frac{\partial(\mathbb{X}\,|\,y)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} = f'_i + f'_y \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} = 0\,,$$

da cui ricaviamo: $\dfrac{\partial y}{\partial x_i} = -\dfrac{f'_i}{f'_y}$, $1 \leq i \leq n$.

Funzione implicita $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: Derivate seconde

Nell'ipotesi $f'_y(\mathbb{X}_0|\,y_0) \neq 0$, sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Dalla composizione di funzioni:

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{f} \mathbb{R}\ :\ \mathbb{X} \to (\mathbb{X}|\,y) \xrightarrow{f} w = f(\mathbb{X}|\,y) = k\,,$$

derivando si ha:

$$\frac{\partial(\mathbb{X}|\,y)}{\partial x_i} = (0, .., 1_i, .., 0, y'_i)\,,$$

ovvero un vettore avente le prime n componenti nulle eccettuata l'i-esima uguale a 1, e la $(n+1)$-esima uguale a y'_i, dalle quali otteniamo anche:

$$\frac{\partial^2(\mathbb{X}|\,y)}{\partial x_i\,\partial x_j} = \left(0, .., 0, y''_{ij}\right)$$, e quindi, applicando il Teorema 1, avremo:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial(\mathbb{X}|\,y)}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(f(\mathbb{X}|\,y)) \cdot \left(\frac{\partial(\mathbb{X}|\,y)}{\partial x_j}\right)^{\mathrm{T}} + \left(f'_1, .., f'_n, f'_y\right) \cdot \left(0, .., 0, y''_{ij}\right) = 0$$

che permette di ricavare le derivate parziali seconde:

$$y''_{ij} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_i\, \partial x_j} = -\frac{1}{f'_y} \cdot \frac{\partial(\mathbb{X}|\, y)}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(f(\mathbb{X}|\, y)) \cdot \left(\frac{\partial(\mathbb{X}|\, y)}{\partial x_j}\right)^{\mathrm{T}} ,\ 1 \le i, j \le n \ .$$

Funzione implicita $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: Differenziali I° e II°

Nell'ipotesi $f'_y(\mathbb{X}_0|\, y_0) \neq 0$, sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Dalla composizione di funzioni:

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{f} \mathbb{R}\ :\ \mathbb{X} \to (\mathbb{X}|\, y) \xrightarrow{f} w = f(\mathbb{X}|\, y) = k$ differenziando otteniamo: $\mathrm{d}w = f'_1\, \mathrm{d}x_1 + f'_2\, \mathrm{d}x_2 + .. + f'_n\, \mathrm{d}x_n + f'_y\, \mathrm{d}y = 0$, da cui ricaviamo d$y$, e differenziando una seconda volta, otteniamo :

$\mathrm{d}^2 f(\mathbb{X}|\, y) + f'_y\, \mathrm{d}^2 y = 0$ da cui ricaviamo $\mathrm{d}^2 y = -\dfrac{\mathrm{d}^2 f(\mathbb{X}|\, y)}{f'_y}$.

5 – DERIVATE SECONDE DELLE FUNZIONI DEFINITE IMPLICITAMENTE DA UN SISTEMA DI EQUAZIONI

I Caso: Sistema $\begin{cases} f(x, y_1, y_2) = k_1 \\ g(x, y_1, y_2) = k_2 \end{cases}$: **funzione implicita** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

Dato il sistema: $\begin{cases} f(x, \mathbb{Y}) = k_1 \\ g(x, \mathbb{Y}) = k_2 \end{cases}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, vale il:

Teorema 3 : Siano f e g, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3$, sia $(x_0|\, \mathbb{Y}_0)$ un punto che soddisfa il sistema, e risulti infine $\left|\dfrac{\partial(f, g)(x_0|\, \mathbb{Y}_0)}{\partial(\mathbb{Y})}\right| \neq 0$.

Allora esiste un intorno $\mathfrak{J}(x_0)$ nel quale è definita una funzione implicita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \to \mathbb{Y}(x)$, che risulta continua e derivabile $\forall\, x \in \mathfrak{J}(x_0)$.

Funzione implicita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$: Derivate prime

Posto $\begin{cases} w_1 = f(x, \mathbb{Y}) = k_1 \\ w_2 = g(x, \mathbb{Y}) = k_2 \end{cases}$, siano $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3$.
Nell'ipotesi $\left| \dfrac{\partial(f,g)(x_0|\,\mathbb{Y}_0)}{\partial(\mathbb{Y})} \right| \neq 0$ sia definita implicitamente $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}(x)$.

Dalle composizioni di funzioni:
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ x \to (x|\,\mathbb{Y}) \xrightarrow{f} w_1 = f(x|\,\mathbb{Y}) = k_1$, e
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R},\ x \to (x|\,\mathbb{Y}) \xrightarrow{g} w_2 = g(x|\,\mathbb{Y}) = k_2$,
derivando rispetto a x, essendo w_1 e w_2 costanti, otteniamo il sistema:
$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}x} = \nabla f(x|\,\mathbb{Y}) \cdot \dfrac{\partial(x|\,\mathbb{Y})}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}x} = \nabla g(x|\,\mathbb{Y}) \cdot \dfrac{\partial(x|\,\mathbb{Y})}{\partial x} = 0 \end{cases}$ che risulta un sistema lineare di due equazioni
nelle due incognite y_1' e y_2', e può essere scritto in forma matriciale come:
$$\left\| \begin{matrix} f'_{y_1} & f'_{y_2} \\ g'_{y_1} & g'_{y_2} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} y_1' \\ y_2' \end{matrix} \right\| = - \left\| \begin{matrix} f'_x \\ g'_x \end{matrix} \right\|,$$
ed anche, utilizzando le matrici Jacobiane, come:
$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y_1,y_2)} \cdot \frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x)} = - \frac{\partial(f,g)}{\partial(x)}.$$

Applicando il teorema di Cramer avremo la soluzione:
$$\left\| \begin{matrix} y_1' \\ y_2' \end{matrix} \right\| = \frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x)} = - \left\| \frac{\partial(f,g)}{\partial(y_1,y_2)} \right\|^{-1} \cdot \frac{\partial(f,g)}{\partial(x)} = - \left\| \begin{matrix} f'_{y_1} & f'_{y_2} \\ g'_{y_1} & g'_{y_2} \end{matrix} \right\|^{-1} \cdot \left\| \begin{matrix} f'_x \\ g'_x \end{matrix} \right\|.$$

Funzione implicita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$: Derivate seconde

Nell'ipotesi $\left| \dfrac{\partial(f,g)(x_0|\,\mathbb{Y}_0)}{\partial(\mathbb{Y})} \right| \neq 0$, siano $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Dalle composizioni di funzioni:
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ x \to (x|\,\mathbb{Y}) \xrightarrow{f} w_1 = f(x|\,\mathbb{Y}) = k_1$, e
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R},\ x \to (x|\,\mathbb{Y}) \xrightarrow{g} w_2 = g(x|\,\mathbb{Y}) = k_2$,
derivando rispetto a x si ha:
$\dfrac{\mathrm{d}(x|\,\mathbb{Y})}{\mathrm{d}x} = (1, y_1', y_2')$ e $\dfrac{\mathrm{d}^2(x|\,\mathbb{Y})}{\mathrm{d}x^2} = (0, y_1'', y_2'')$,
dalle quali otteniamo, per il Teorema 1:

$$\frac{\mathrm{d}^2 w_1}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}(x|\,\mathbb{Y})}{\mathrm{d}x} \cdot \mathbb{H}(f(x|\,\mathbb{Y})) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}(x|\,\mathbb{Y})}{\mathrm{d}x}\right)^{\mathrm{T}} + \left(f'_x, f'_{y_1}, f'_{y_2}\right) \cdot (0, y''_1, y''_2) = 0 \text{ e}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 w_2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}(x|\,\mathbb{Y})}{\mathrm{d}x} \cdot \mathbb{H}(g(x|\,\mathbb{Y})) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}(x|\,\mathbb{Y})}{\mathrm{d}x}\right)^{\mathrm{T}} + \left(g'_x, g'_{y_1}, g'_{y_2}\right) \cdot (0, y''_1, y''_2) = 0$$
ovvero il sistema, nelle incognite y''_1 e y''_2:
$$\begin{cases} f'_{y_1}\, y''_1 + f'_{y_2}\, y''_2 = \; - \dfrac{\mathrm{d}(x|\,\mathbb{Y})}{\mathrm{d}x} \cdot \mathbb{H}(f(x|\,\mathbb{Y})) \cdot \left(\dfrac{\mathrm{d}(x|\,\mathbb{Y})}{\mathrm{d}x}\right)^{\mathrm{T}} \\ g'_{y_1}\, y''_1 + g'_{y_2}\, y''_2 = \; - \dfrac{\mathrm{d}(x|\,\mathbb{Y})}{\mathrm{d}x} \cdot \mathbb{H}(g(x|\,\mathbb{Y})) \cdot \left(\dfrac{\mathrm{d}(x|\,\mathbb{Y})}{\mathrm{d}x}\right)^{\mathrm{T}} \end{cases}$$
la cui soluzione può essere formalmente espressa mediante la:
$$\left\|\begin{matrix} y''_1 \\ y''_2 \end{matrix}\right\| = \; - \left\|\frac{\partial(f,g)}{\partial(y_1,y_2)}\right\|^{-1} \cdot \left\|\begin{matrix} \dfrac{\mathrm{d}(x|\,\mathbb{Y})}{\mathrm{d}x} \cdot \mathbb{H}(f(x|\,\mathbb{Y})) \cdot \left(\dfrac{\mathrm{d}(x|\,\mathbb{Y})}{\mathrm{d}x}\right)^{\mathrm{T}} \\ \dfrac{\mathrm{d}(x|\,\mathbb{Y})}{\mathrm{d}x} \cdot \mathbb{H}(g(x|\,\mathbb{Y})) \cdot \left(\dfrac{\mathrm{d}(x|\,\mathbb{Y})}{\mathrm{d}x}\right)^{\mathrm{T}} \end{matrix}\right\|.$$

Funzione implicita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$: Differenziali I° e II°

Nell'ipotesi $\left|\dfrac{\partial(f,g)(x_0|\,\mathbb{Y}_0)}{\partial(\mathbb{Y})}\right| \neq 0$, siano $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Dalle composizioni di funzioni:
$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R},\; x \to (x|\,\mathbb{Y}) \xrightarrow{f} w_1 = f(x|\,\mathbb{Y}) = k_1 \text{, e}$$
$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R},\; x \to (x|\,\mathbb{Y}) \xrightarrow{g} w_2 = g(x|\,\mathbb{Y}) = k_2 \text{,}$$
differenziando una prima volta otteniamo:
$\begin{cases} \mathrm{d}w_1 = f'_x\,\mathrm{d}x + f'_{y_1}\mathrm{d}y_1 + f'_{y_2}\mathrm{d}y_2 = 0 \\ \mathrm{d}w_2 = g'_x\,\mathrm{d}x + g'_{y_1}\mathrm{d}y_1 + g'_{y_2}\mathrm{d}y_2 = 0 \end{cases}$, ovvero un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite $\mathrm{d}y_1$ e $\mathrm{d}y_2$ che ha per soluzione:
$$\left\|\begin{matrix} \mathrm{d}y_1 \\ \mathrm{d}y_2 \end{matrix}\right\| = \; - \left\|\frac{\partial(f,g)}{\partial(y_1,y_2)}\right\|^{-1} \cdot \left\|\begin{matrix} f'_x\,\mathrm{d}x \\ g'_x\,\mathrm{d}x \end{matrix}\right\|.$$

Differenziando ancora, analogamente al caso di una sola equazione, avremo:
$$\begin{cases} \mathrm{d}^2 w_1 = \mathrm{d}^2 f(x, y_1, y_2) + f'_{y_1}\mathrm{d}^2 y_1 + f'_{y_2}\mathrm{d}^2 y_2 = 0 \\ \mathrm{d}^2 w_2 = \mathrm{d}^2 g(x, y_1, y_2) + g'_{y_1}\mathrm{d}^2 y_1 + g'_{y_2}\mathrm{d}^2 y_2 = 0 \end{cases},$$

ovvero un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite d^2y_1 e d^2y_2 che ha per soluzione:

$$\left\|\begin{matrix}\mathrm{d}^2y_1\\ \mathrm{d}^2y_2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}y_1''(\mathrm{d}x)^2\\ y_2''(\mathrm{d}x)^2\end{matrix}\right\| = -\left\|\frac{\partial(f,g)}{\partial(y_1,y_2)}\right\|^{-1}\cdot\left\|\begin{matrix}\mathrm{d}^2f(x|\,\mathbb{Y})\\ \mathrm{d}^2g(x|\,\mathbb{Y})\end{matrix}\right\|.$$

II Caso: Sistema $\begin{cases} f(x_1,x_2,y_1,y_2)=k_1\\ g(x_1,x_2,y_1,y_2)=k_2\end{cases}$ **: funzione implicita** $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

Dato il sistema $\begin{cases} f(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})=k_1\\ g(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})=k_2\end{cases}$, $k_1,k_2\in\mathbb{R}$, se il punto $(\mathbb{X}_0|\,\mathbb{Y}_0)$ lo soddisfa, se f e g sono entrambi derivabili con derivate continue, se $\left|\dfrac{\partial(f,g)(\mathbb{X}_0|\,\mathbb{Y}_0)}{\partial(\mathbb{Y})}\right|\neq 0$ il Teorema del Dini assicura l'esistenza, in un intorno del punto $\mathbb{X}_0$, di una funzione implicita $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, \mathbb{X}\to\mathbb{Y}(\mathbb{X})$.

Funzione implicita $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ **: Derivate prime**

Posto $\begin{cases} w_1=f(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})=k_1\\ w_2=g(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})=k_2\end{cases}$, siano $f,g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{A})$, $\mathbb{A}\subseteq\mathbb{R}^4$.

Nell'ipotesi $\left|\dfrac{\partial(f,g)(\mathbb{X}_0|\,\mathbb{Y}_0)}{\partial(\mathbb{Y})}\right|\neq 0$ sia definita implicitamente $\mathbb{Y}=\mathbb{Y}(\mathbb{X})$.

Dalle composizioni di funzioni:

$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4\xrightarrow{f}\mathbb{R},\ \mathbb{X}\to(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})\xrightarrow{f} w_1=f(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})=k_1$, e

$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4\xrightarrow{g}\mathbb{R},\ \mathbb{X}\to(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})\xrightarrow{g} w_2=g(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})=k_2$

derivando rispetto a x_1 e x_2, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial x_1}=\nabla f(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})\cdot\dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_1}=0\\ \dfrac{\partial w_2}{\partial x_1}=\nabla g(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})\cdot\dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_1}=0\\ \dfrac{\partial w_1}{\partial x_2}=\nabla f(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})\cdot\dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_2}=0\\ \dfrac{\partial w_2}{\partial x_2}=\nabla g(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})\cdot\dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_2}=0\end{cases}$$ che può essere scritto come:

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g}{\partial y_2} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{matrix} \right\| = - \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} \end{matrix} \right\|$$ e, mediante le matrici Jacobiane, come: $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(y_1,y_2)} \cdot \dfrac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)} = - \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x_1,x_2)}$, che ha per soluzione:
$\dfrac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)} = - \left\| \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(y_1,y_2)} \right\|^{-1} \cdot \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x_1,x_2)}$.

Funzione implicita $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: Derivate seconde

Nell'ipotesi $\left| \dfrac{\partial(f,g)(\mathbb{X}_0|\,\mathbb{Y}_0)}{\partial(\mathbb{Y})} \right| \neq 0$, siano $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Dalle composizioni di funzioni:
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ \mathbb{X} \to (\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) \xrightarrow{f} w_1 = f(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) = k_1$, e
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{R},\ \mathbb{X} \to (\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) \xrightarrow{g} w_2 = g(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) = k_2$,
essendo $\dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_1} = \left(1, 0, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)$ e $\dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_2} = \left(0, 1, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)$,
derivando nuovamente si ha:
$\dfrac{\partial^2(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_i\,\partial x_j} = \dfrac{\partial^2(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_j\,\partial x_i} = \left(0, 0, \dfrac{\partial^2 y_1}{\partial x_i\,\partial x_j}, \dfrac{\partial^2 y_2}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)$, dalle quali, applicando il Teorema 1, otteniamo 4 sistemi di 2 equazioni in 2 incognite, che si riducono a 3 sistemi di 2 equazioni in 2 incognite dato che $\dfrac{\partial^2 y_k}{\partial x_i\,\partial x_j} = \dfrac{\partial^2 y_k}{\partial x_j\,\partial x_i}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x_i\,\partial x_j} = \dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(f(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})) \cdot \left(\dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_j}\right)^{\mathrm{T}} + \nabla f(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) \cdot \dfrac{\partial^2(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_i\,\partial x_j} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w_2}{\partial x_i\,\partial x_j} = \dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(g(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})) \cdot \left(\dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_j}\right)^{\mathrm{T}} + \nabla g(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) \cdot \dfrac{\partial^2(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_i\,\partial x_j} = 0 \end{cases},$$

$1 \le i, j \le 2$, le cui soluzioni sono esprimibili in forma compatta come:

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 y_1}{\partial x_i\,\partial x_j} \\ \dfrac{\partial^2 y_2}{\partial x_i\,\partial x_j} \end{matrix} \right\| = - \left\| \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(y_1,y_2)} \right\|^{-1} \cdot \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(f(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})) \cdot \left(\dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_j}\right)^{\mathrm{T}} \\ \dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(g(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})) \cdot \left(\dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_j}\right)^{\mathrm{T}} \end{matrix} \right\|,$$

$1 \le i, j \le 2$.

Funzione implicita $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: Differenziali I° e II°

Nell'ipotesi $\left|\dfrac{\partial(f,g)(\mathbb{X}_0|\,\mathbb{Y}_0)}{\partial(\mathbb{Y})}\right| \neq 0$, siano $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Dalle composizioni di funzioni:

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ \mathbb{X} \to (\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) \xrightarrow{f} w_1 = f(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) = k_1$, e

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{R},\ \mathbb{X} \to (\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) \xrightarrow{g} w_2 = g(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) = k_2$,

differenziando una volta si ha:

$$\begin{cases} \mathrm{d}w_1 = f'_{x_1}\,\mathrm{d}x_1 + f'_{x_2}\,\mathrm{d}x_2 + f'_{y_1}\mathrm{d}y_1 + f'_{y_2}\mathrm{d}y_2 = 0 \\ \mathrm{d}w_2 = g'_{x_1}\,\mathrm{d}x_1 + g'_{x_2}\,\mathrm{d}x_2 + g'_{y_1}\mathrm{d}y_1 + g'_{y_2}\mathrm{d}y_2 = 0 \end{cases},$$

ovvero un sistema lineare nelle due incognite $\mathrm{d}y_1$ e $\mathrm{d}y_2$ che ha per soluzione:

$$\left\|\begin{matrix} \mathrm{d}y_1 \\ \mathrm{d}y_2 \end{matrix}\right\| = -\left\|\frac{\partial(f,g)}{\partial(y_1,y_2)}\right\|^{-1} \cdot \left\|\begin{matrix} f'_{x_1}\,\mathrm{d}x_1 + f'_{x_2}\,\mathrm{d}x_2 \\ g'_{x_1}\,\mathrm{d}x_1 + g'_{x_2}\,\mathrm{d}x_2 \end{matrix}\right\|.$$

Differenziando una seconda volta avremo:

$$\begin{cases} \mathrm{d}^2 w_1 = \mathrm{d}^2 f(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) + f'_{y_1}\mathrm{d}^2 y_1 + f'_{y_2}\mathrm{d}^2 y_2 = 0 \\ \mathrm{d}^2 w_2 = \mathrm{d}^2 g(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) + g'_{y_1}\mathrm{d}^2 y_1 + g'_{y_2}\mathrm{d}^2 y_2 = 0 \end{cases},$$

ovvero un sistema lineare nelle due incognite $\mathrm{d}^2 y_1$ e $\mathrm{d}^2 y_2$ che ha per soluzione:

$$\left\|\begin{matrix} \mathrm{d}^2 y_1 \\ \mathrm{d}^2 y_2 \end{matrix}\right\| = -\left\|\frac{\partial(f,g)}{\partial(y_1,y_2)}\right\|^{-1} \cdot \left\|\begin{matrix} \mathrm{d}^2 f(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) \\ \mathrm{d}^2 g(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) \end{matrix}\right\|.$$

6 – DERIVATE SECONDE DELLE FUNZIONI DEFINITE IMPLICITAMENTE DA UN SISTEMA DI EQUAZIONI - CASO GENERALE

Sistema di m equazioni in $n+m$ incognite: funzione implicita $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Sia dato il sistema: $\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = k_1 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = k_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = k_m \end{cases}$. Vale il:

Teorema 4 : Sia $\mathrm{P}_0 = (\mathbb{X}_0|\mathbb{Y}_0)$ un punto che soddisfa tale sistema, siano le funzioni f_i derivabili con derivate continue in un intorno di P_0, e sia inoltre $\left|\dfrac{\partial(\mathbb{W})(\mathrm{P}_0)}{\partial(\mathbb{Y})}\right| \neq 0$.

Allora il sistema definisce, in un intorno di $\mathbb{X}_0$, una funzione implicita, continua con derivate continue: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, con $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}(\mathbb{X})$, la cui matrice Jacobiana è data da:

$$\frac{\partial(\mathbb{Y})}{\partial(\mathbb{X})} = -\left\| \frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{Y})} \right\|^{-1} \cdot \frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{X})} .$$

Funzione implicita $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: Derivate prime

Posto $\begin{cases} w_1 = f_1(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) = k_1 \\ w_2 = f_2(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) = k_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ w_m = f_m(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) = k_m \end{cases}$, siano $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$.

Nell'ipotesi $\left| \dfrac{\partial(\mathbb{W})(\mathbb{X}_0|\,\mathbb{Y}_0)}{\partial(\mathbb{Y})} \right| \neq 0$ sia definita implicitamente $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}(\mathbb{X})$.

Dalla composizione di funzioni:

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$, $\mathbb{X} \to (\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) \xrightarrow{f} \mathbb{W} = f(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) =$ cost., otteniamo:

$$\frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{X})} = \frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})} \cdot \frac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial(\mathbb{X})} = 0 .$$

Il secondo termine può essere riscritto come:

$$\left\| \frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{X})} \quad \middle| \quad \frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{Y})} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \dfrac{\partial(\mathbb{X})}{\partial(\mathbb{X})} \\ - \; - \\ \dfrac{\partial(\mathbb{Y})}{\partial(\mathbb{X})} \end{array} \right\| = 0 .$$

La matrice di sinistra è una matrice $(m, n+m)$ divisa in due blocchi, il primo (m, n) ed il secondo (m, m); la matrice di destra è una matrice $(n+m, n)$ divisa in due blocchi, il superiore (n, n) e l'inferiore (m, n).

Operando per blocchi, dall'uguaglianza otteniamo:

$$\frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{X})} \cdot \mathbb{I}_n + \frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{Y})} \cdot \frac{\partial(\mathbb{Y})}{\partial(\mathbb{X})} = 0$$

da cui poi:

$$\frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{Y})} \cdot \frac{\partial(\mathbb{Y})}{\partial(\mathbb{X})} = -\frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{X})}$$

e quindi:

$$\frac{\partial(\mathbb{Y})}{\partial(\mathbb{X})} = -\left\|\frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{Y})}\right\|^{-1} \cdot \frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{X})}.$$

Funzione implicita $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: **Derivate seconde**

Nell'ipotesi $\left|\dfrac{\partial(\mathbb{W})(\mathbb{X}_0|\,\mathbb{Y}_0)}{\partial(\mathbb{Y})}\right| \neq 0$, siano $f_i \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$.

Dalla composizione di funzioni:

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$, $\mathbb{X} \to (\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) \xrightarrow{f} \mathbb{W} = f(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) = \text{cost.}$,

generalizzando quanto visto nei casi precedenti, applicando il Teorema 1, otteniamo $\dfrac{n^2+n}{2}$ sistemi di m equazioni in m incognite, le cui soluzioni sono esprimibili in forma compatta mediante le:

$$\frac{\partial^2(\mathbb{Y})}{\partial x_i\,\partial x_j} = -\left\|\frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{Y})}\right\|^{-1} \cdot \left\|\begin{array}{c} \dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(f_1(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})) \cdot \left(\dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_j}\right)^{\mathrm{T}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(f_m(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})) \cdot \left(\dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_j}\right)^{\mathrm{T}} \end{array}\right\|,$$

$1 \le i, j \le n$,

dove $\dfrac{\partial^2(\mathbb{Y})}{\partial x_i\,\partial x_j}$ e $\left\|\begin{array}{c} \dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(f_1(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})) \cdot \left(\dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_j}\right)^{\mathrm{T}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(f_m(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})) \cdot \left(\dfrac{\partial(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y})}{\partial x_j}\right)^{\mathrm{T}} \end{array}\right\|$ sono vettori colonna ad m componenti, mentre $\left\|\dfrac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{Y})}\right\|^{-1}$ è una matrice $m \times m$.

Funzione implicita $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: **Differenziali I° e II°**

Nell'ipotesi $\left|\dfrac{\partial(\mathbb{W})(\mathbb{X}_0|\,\mathbb{Y}_0)}{\partial(\mathbb{Y})}\right| \neq 0$, siano $f_i \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$.

Da $\begin{cases} w_1 = f_1(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) = k_1 \\ w_2 = f_2(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) = k_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_m = f_m(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) = k_m \end{cases}$ e dalla composizione di funzioni:

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m,\ \mathbb{X} \to (\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) \xrightarrow{f} \mathbb{W} = f(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) = \text{cost.},$
differenziando si ottiene un sistema di m equazioni nelle m incognite $\mathrm{d}y_1, ..., \mathrm{d}y_m$ esprimibile come:

$$\left\|\begin{matrix} \mathrm{d}w_1 \\ ... \\ \mathrm{d}w_m \end{matrix}\right\| = \left\|\frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{X})}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} \mathrm{d}x_1 \\ ... \\ \mathrm{d}x_n \end{matrix}\right\| + \left\|\frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{Y})}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} \mathrm{d}y_1 \\ ... \\ \mathrm{d}y_m \end{matrix}\right\| = \mathbb{O}$$

che ha soluzione: $\left\|\begin{matrix} \mathrm{d}y_1 \\ ... \\ \mathrm{d}y_m \end{matrix}\right\| = -\left\|\frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{Y})}\right\|^{-1} \cdot \left\|\frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{X})}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} \mathrm{d}x_1 \\ ... \\ \mathrm{d}x_n \end{matrix}\right\|.$

Differenziando una seconda volta si ottiene un sistema di m equazioni nelle m incognite $\mathrm{d}^2y_1, ..., \mathrm{d}^2y_m$, esprimibile come:

$$\left\|\begin{matrix} \mathrm{d}^2w_1 \\ ... \\ \mathrm{d}^2w_m \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \mathrm{d}^2 f_1(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) \\ ... \\ \mathrm{d}^2 f_m(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) \end{matrix}\right\| + \left\|\frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{Y})}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} \mathrm{d}^2y_1 \\ ... \\ \mathrm{d}^2y_m \end{matrix}\right\| = \mathbb{O}$$

che ha per soluzione:

$$\left\|\begin{matrix} \mathrm{d}^2y_1 \\ ... \\ \mathrm{d}^2y_m \end{matrix}\right\| = -\left\|\frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{Y})}\right\|^{-1} \cdot \left\|\begin{matrix} \mathrm{d}^2 f_1(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) \\ ... \\ \mathrm{d}^2 f_m(\mathbb{X}|\,\mathbb{Y}) \end{matrix}\right\|.$$