# Una nota sulla formula di Stoodley:
# un modello descrittivo della forza d'interesse.

Quaderno n. 28
Istituto di Matematica
Facoltà di Scienze
Economiche e Bancarie
Università degli Studi
Siena

Sunto: Si propone, in alternativa a quanto fatto da C.L. Stoodley in [1], un modello descrittivo della forza d'interesse $\delta(t)$, a tre parametri, che consente di calcolare capitalizzazione ed attualizzazione mediante una media ponderata a tre pesi, invece che a due, e, in analogia con quanto fatto da J. J. McCoutcheon in [2], si studia poi il modello più generale, a quattro parametri, di cui il precedente è un caso particolare.

## 1 – INTRODUZIONE

In un recente lavoro, [2], J. J. McCoutcheon ha fornito un modello piu generale, a quattro parametri, di quello a suo tempo fornito da C. L. Stoodley, [1], a tre parametri, relativo alla descrizione dell'andamento della forza d'interesse $\delta(t)$, nel caso che questo andamento sia monotòno crescente o decrescente.

Esponiamo brevemente i risultati ottenuti in precedenza dai due Autori.

La formula di Stoodley originaria utilizza un modello a tre parametri per descrivere l'andamento di $i_t$, tasso annuo d'interesse al tempo $t$, ma si può fare riferimento anche al modello che descrive l'andamento di $\delta(t)$, forza d'interesse al tempo $t$, come espressa dalla formula:

$$(1) \qquad \delta(t) = p + \frac{s}{1 + r\,e^{st}} \ .$$

Questa è una funzione del tempo $t$, monotòna crescente per $r < 0$ e decrescente per $r > 0$, per cui la sua utilizzazione è valida solo nel caso di comportamento monotòno da parte di $\delta(t)$.

Dato che la $(1)$ si può scrivere anche

$$\delta(t) = (p+s) - \frac{r\,s\,e^{st}}{1 + r\,e^{st}} = (p+s) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\log\left(1 + r\,e^{st}\right)\right\}$$

segue che, chiamato $\nu(t)$ il Valore Attuale di 1 al tempo $t$, da

$$\nu(t) = e^{-\int_0^t \delta(t)\,\mathrm{d}t}$$

allora

$$\nu(t) = e^{-(p+s)\,t} \cdot \frac{1 + r\,e^{st}}{1+r} = \frac{1}{1+r} \cdot e^{-(p+s)\,t} + \frac{r}{1+r} \cdot e^{-pt} =$$

$$(2) \qquad \nu(t) = \frac{1}{1+r} \cdot (1+i_1)^{-t} + \frac{r}{1+r} \cdot (1+i_2)^{-t} \,,$$

avendo posto $1 + i_1 = e^{p+s}$ e $1 + i_2 = e^{p}$.

La $(2)$ mostra il vantaggio pratico della formula di Stoodley: se si riesce con un modello a descrivere l'andamento di $\delta(t)$ mediante valori di $p$ ed $s$ tali che $i_1$ e $i_2$ siano tassi annui d'interesse noti, allora il Valore Attuale di 1 dovuto al tempo $t$ è ottenuto come media ponderata dei Valori Attuali corrispondenti ai due tassi noti $i_1$ e $i_2$.

Anche se fosse necessario usare valori di $p$ ed $s$ che non corrispondono a tassi noti, la formula rimane pur sempre di facile applicazione.

Similmente, la Capitalizzazione di 1 da $t_1$ a $t_2$ si ottiene come:

$$\mathbb{A}(t_1,t_2) = e^{\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)\,\mathrm{d}t} = \frac{e^{-\int_0^{t_1}\delta(t)\,\mathrm{d}t}}{e^{-\int_0^{t_2}\delta(t)\,\mathrm{d}t}} = \frac{\nu(t_1)}{\nu(t_2)} =$$

$$(3) \qquad \mathbb{A}(t_1,t_2) = \frac{(1+i_1)^{-t_1} + r\,(1+i_2)^{-t_1}}{(1+i_1)^{-t_2} + r\,(1+i_2)^{-t_2}}\,.$$

L'Autore prosegue poi con una descrizione del calcolo dei parametri $p$, $r$ ed $s$, mediante le tre condizioni:

$\delta(0) = \delta_0$ ,

$\delta(t_1) = \delta_1$ , con $t_1 > 0$ tempo assegnato, e

$\lim\limits_{t \to \infty} \delta(t) = \delta_\infty$ , valore a cui tende $\delta(t)$ asintoticamente al crescere di $t$.

Esistenza ed unicità del modello vengono ricondotte all'esistenza ed unicità della soluzione positiva per l'equazione:

$$g(s) = \left[ s \cdot \frac{\delta_1 - \delta_\infty}{\delta_0 - \delta_\infty} - \delta_1 + \delta_\infty \right] \cdot e^{st_1} - s + \delta_1 - \delta_\infty = 0$$

che si hanno sotto la condizione:

$$(4) \qquad (\delta_\infty - \delta_1)\,t_1 < \frac{\delta_0 - \delta_1}{\delta_0 - \delta_\infty}$$

la quale è sempre verificata nel caso di $\delta(t)$ decrescente.

Se la $\delta(t)$ è invece crescente, la (4) non è sempre verificata, ma si dimostra che il modello è realizzabile ed unico se valgono le condizioni, equivalenti alla (4):

$$t_1 < \frac{\delta_1 - \delta_0}{(\delta_\infty - \delta_0)\,(\delta_\infty - \delta_1)} \quad \text{e}$$

$$\delta_1 > \delta_\infty - \frac{\delta_\infty - \delta_0}{1 + t_1\,(\delta_\infty - \delta_0)}$$

che forniscono, rispettivamente, un confine superiore per $t_1$ ed un confine inferiore per $\delta_1$.

Determinati quindi i valori dei tre parametri corrispondenti a $\delta_0$, $\delta_1$ e $\delta_\infty$ si possono considerare questi come la base di partenza per ulteriori esperimenti al fine di ottenere nella (2) e nella (3) tassi annui d'interesse noti.

In questo caso, anche se i $\delta_0$, $\delta_1$ e $\delta_\infty$ ottenuti dalla (1) non corrispondessero a quelli scelti inizialmente, se le differenze sono abbastanza piccole, il vantaggio pratico di avere nella (2) e nella (3) i tassi noti supera lo svantaggio derivante dalle piccole differenze sui $\delta_i$.

Recentemente, in [2], J. J. McCoutcheon ha presentato la (1) come un caso particolare di:

$$(5) \qquad \delta(t) = p + \frac{q}{1 + r\,e^{st}}$$

modello a quattro parametri, crescente se $q\,r < 0$ e decrescente se $q\,r > 0$.

Considerando ancora

$$\nu(t) = e^{-\int_0^t \delta(t)\,\mathrm{d}t}$$

si ottiene ora:

$$(6) \qquad \nu(t) = e^{-(p+q)\,t} \cdot \left[ \frac{1 + r\,e^{st}}{1 + r} \right]^{\frac{q}{s}} \quad \text{e}$$

$$(7) \qquad \mathbb{A}(t_1,t_2) = e^{(p+q)(t_2-t_1)} \cdot \left[\frac{1+r\,e^{st_1}}{1+r\,e^{st_2}}\right]^{\frac{q}{s}}$$

nelle quali, pur restando semplice il calcolo di $\nu(t)$ e di $\mathbb{A}(t_1,t_2)$, si perde pur sempre la convenienza pratica che veniva garantita da (2) e (3).

L'Autore descrive poi la determinazione dei parametri $p$, $q$, $r$ ed $s$ mediante l'aggiunta di una quarta condizione:
$\delta(t_2) = \delta_2$, con $t_2 > t_1$ tempo assegnato.

Si perviene, usando lo stesso procedimento del lavoro precedente, e posto $\delta_0 - \delta_1 = \alpha$, $\delta_0 - \delta_2 = \beta$, $\delta_0 - \delta_\infty = \gamma$, ad una equazione:

$$h(s) = \frac{\alpha\,(\gamma-\beta)}{\gamma^2} \cdot e^{st_2} - \frac{\beta\,(\gamma-\alpha)}{\gamma^2} \cdot e^{st_1} + \frac{\beta-\alpha}{\gamma} = 0$$

che l'Autore dimostra avere una ed una sola soluzione positiva per $s$, nel caso di $\delta(t)$ monotòna, sotto la condizione, necessaria e sufficiente:

$$(8) \qquad \frac{t_1}{t_2} > \frac{(\delta_0-\delta_1)\,(\delta_\infty-\delta_2)}{(\delta_0-\delta_2)\,(\delta_\infty-\delta_1)} \ .$$

Il modello suggerito dalla (5) consente una maggiore aderenza per l'aumentato numero dei parametri (e quindi delle condizioni), con la perdita, però, della praticità che, per la (1), avevamo da (2) e (3).

## 2 – IL NUOVO MODELLO

Mentre nel caso del modello di Stoodley vengono calcolate Capitalizzazione ed Attualizzazione mediante medie ponderate a due pesi, il modello proposto nella seguente nota permette il calcolo degli stessi valori come media ponderata a tre pesi, quindi suscettibile di una maggiore esattezza.

Precisamente, consideriamo il modello:

$$(9) \qquad \delta(t) = p + s \cdot \frac{1-r\,e^{st}}{1+r\,e^{st}} \ .$$

Ora:

$$\delta(t) = p + s \cdot \frac{1-r\,e^{st}}{1+r\,e^{st}} = (p+s) - \frac{2rs\,e^{st}}{1+r\,e^{st}} =$$
$$= (p+s) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\log\left(1+r\,e^{st}\right)^2\right\}$$

per cui

$$\nu(t) = e^{-\int_0^t \delta(t)\,\mathrm{d}t} = e^{-\int_0^t \left\{(\mathrm{p+s}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\log\,(1+re^{st})^2\right]\right\}\mathrm{d}t} =$$
$$= \frac{e^{-(p+s)t}\,(1+re^{st})^2}{(1+r)^2} =$$
$$= \frac{1}{(1+r)^2} \cdot \left[e^{-(p+s)t} + 2re^{-pt} + r^2\,e^{-(p-s)t}\right]$$

da cui, ponendo $e^{p+s} = 1+i_1$, $e^p = 1+i_2$, $e^{p-s} = 1+i_3$, abbiamo la

$$(10) \quad \nu(t) = \frac{1}{(1+r)^2} \cdot (1+i_1)^{-t} + \frac{2\mathrm{r}}{(1+r)^2} \cdot (1+i_2)^{-t} + \frac{\mathrm{r}^2}{(1+r)^2} \cdot (1+i_3)^{-t}$$

e la

$$\mathbb{A}(t_1,t_2) = e^{\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)\,\mathrm{d}t} = \frac{e^{-\int_0^{t_1}\delta(t)\,\mathrm{d}t}}{e^{-\int_0^{t_2}\delta(t)\,\mathrm{d}t}} = \frac{\nu(\mathrm{t}_1)}{\nu(\mathrm{t}_2)} =$$

$$(11)\quad \mathbb{A}(t_1,t_2) = \frac{(1+i_1)^{-t_1} + 2r\,(1+i_2)^{-t_1} + r^2\,(1+i_3)^{-t_1}}{(1+i_1)^{-t_2} + 2r\,(1+i_2)^{-t_2} + r^2\,(1+i_3)^{-t_2}}\ .$$

Sulla convenienza pratica di (10) e (11) valgono, chiaramente, considerazioni analoghe a quelle fatte per la (2) e la (3).

## 3 – ANALISI DEL MODELLO

Avendosi:

$$\delta(t) = p + s\cdot\frac{1-r\,e^{st}}{1+r\,e^{st}} = p - s\cdot\frac{1-\dfrac{1}{r}\,e^{-st}}{1+\dfrac{1}{r}\,e^{-st}}\ ,$$

senza perdere in generalità possiamo limitarci al caso $s>0$.

Avremo quindi:

$$(12)\quad \lim_{t\to\infty}\delta(t) = p - s\,.$$

Calcolata poi $\delta'(t)$, avremo:

$$\delta'(t) = -\frac{2r\,s^2\,e^{st}}{(1+r\,e^{st})^2}$$

e quindi $\delta(t)$ è funzione crescente per $r<0$ e decrescente per $r>0$.

## 4 – DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI

Useremo delle condizioni analoghe a quelle date in [1] e [2]; supporremo quindi noti i valori:

$\delta(0) = \delta_0$,

$\delta(t_1) = \delta_1$, con $t_1>0$ tempo assegnato,

e il comportamento di $\delta(t)$ al crescere del tempo $t$:

$$\lim_{t\to\infty}\delta(t) = \delta_\infty\,.$$

Dalla (12) abbiamo:

$\delta_\infty = p - s$, da cui poi

$$(13)\quad p = \delta_\infty + s\,.$$

Calcolando $\delta(0)$:

$\delta_0 = p + s\cdot\dfrac{1-r}{1+r}$, e sostituendo mediante la (13):

$\delta_0 - \delta_\infty = \dfrac{2s}{1+r}$, da cui, posto $\alpha = \delta_0 - \delta_\infty$, abbiamo la

$$(14)\quad r = \frac{2s-\alpha}{\alpha}\,.$$

Calcolando infine $\delta(t_1)$ otteniamo:

$$\delta_1 = p + s \cdot \frac{1 - r\,e^{st_1}}{1 + r\,e^{st_1}}\,,$$

che, per le (13) e (14), e posto $\beta = \delta_1 - \delta_\infty$, ci dà:

(15) $H(s) = \beta\,(2s - \alpha) \cdot e^{st_1} - 2\alpha s + \alpha\beta = 0\,.$

Distinguiamo ora i due casi di $\{\delta_0, \delta_1, \delta_\infty\}$ successione decrescente o crescente.

Avendo, mediante $\delta_\infty$, imposto l'asintoticità, nel primo caso avremo $\alpha > \beta > 0$ e nel secondo $\alpha < \beta < 0$.

Anzitutto, dalla (15):

(16) $H(0) = -\alpha\beta + \alpha\beta = 0\,.$

Essendo, come primo caso, $\{\delta_0, \delta_1, \delta_\infty\}$ successione decrescente, avremo:

(17) $\lim_{s \to \infty} H(s) = +\infty$ (in quanto $\beta > 0$)

e calcolata $H'(s)$, abbiamo:

$$H'(s) = [2\beta + (2\beta s - \alpha\beta)\,t_1] \cdot e^{st_1} - 2\alpha\,,$$

per cui $H(s)$ sarà funzione crescente quando:

(18) $2\beta t_1 s - \alpha\beta t_1 + 2\beta > 2\alpha\,e^{-st_1}\,.$

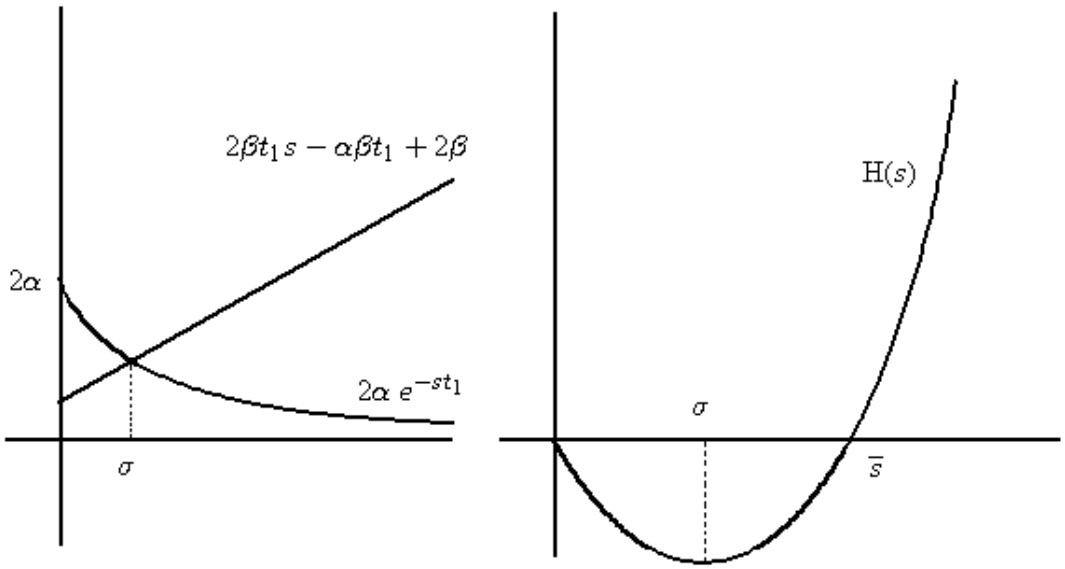
Il termine di sinistra, come funzione di $s$, è una retta, con $2\beta t_1 > 0$, che taglia l'asse delle ordinate nel punto $(0, 2\beta - \alpha\beta t_1)$; l'esponenziale $2\alpha\,e^{-st_1}$ taglia lo stesso asse nel punto $(0, 2\alpha)$ e l'intercetta della retta è sempre minore di quella dell'esponenziale; infatti

$$2\beta - \alpha\beta t_1 < 2\alpha \;\Rightarrow\; -\alpha\beta t_1 < 2(\alpha - \beta)$$

che è sempre verificata, in quanto $\alpha > \beta$ e $-\alpha\beta t_1 < 0$.

Quindi $H'(s)$ è negativa da $s = 0$ fino ad un certo valore $s = \sigma$, dopo il quale rimarrà sempre positiva.

Viste allora le (16), (17) e (18), la situazione è illustrata dalle figure:



ovvero $H(s)$ passa per l'origine, raggiunge il suo minimo negativo in $\sigma$, dopodichè cresce sempre fino all'infinito, e non può che tagliare l'asse $s$ in un sol punto $\overline{s} > 0$ che è la soluzione unica cercata.

Se $\{\delta_0, \delta_1, \delta_\infty\}$ è invece una successione crescente, allora $\alpha < \beta < 0$ ed avremo:

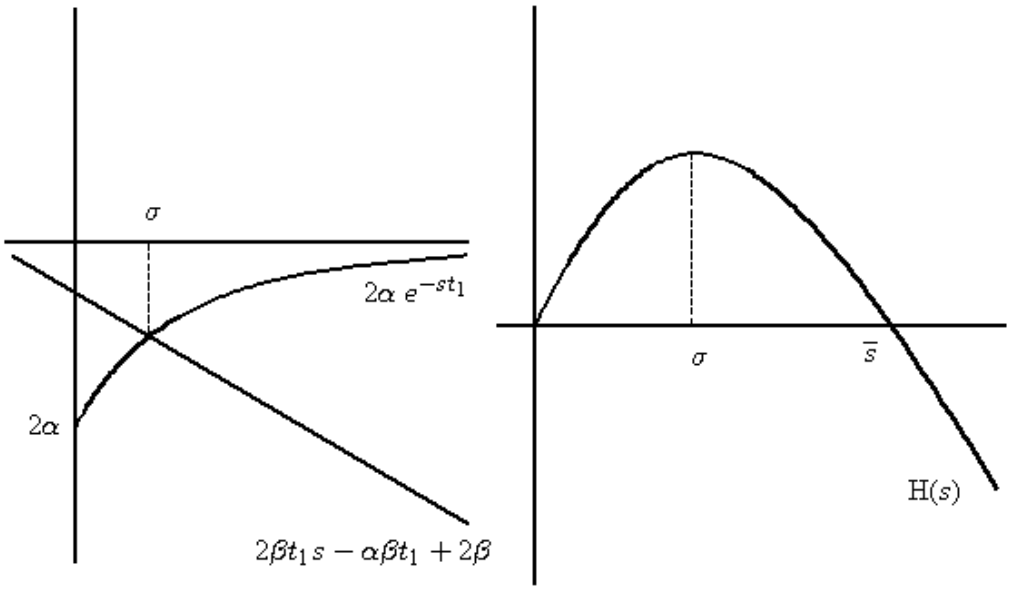
(19) $\lim_{s \to \infty} H(s) = -\infty$ (in quanto $(\beta < 0)$)

ed ancora

(18) $H'(s) > 0$ per $2\beta t_1 s - \alpha\beta t_1 + 2\beta > 2\alpha\, e^{-st_1}$.

Il termine di sinistra, come funzione di $s$, è ancora una retta, ma con $2\beta t_1 < 0$.

Viste le (18) e (19), se l'intercetta della retta con l'asse delle ordinate è maggiore di quella dell'esponenziale, avremo, come illustrato in figura:




e questo accade se:

$2\beta - \alpha\beta t_1 > 2\alpha$

cioè se

(20) $t_1 < 2\,\dfrac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}$

nel qual caso, viste le (16), (18) e (19), $H(s)$ passa per l'origine, raggiunge il suo massimo positivo nel punto $s = \sigma$, dopodichè decresce sempre e non può che tagliare l'asse $s$ in un unico punto $\overline{s} > 0$ che è la soluzione cercata.

Se $t_1 = 2\,\dfrac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}$, allora l'unica soluzione della $H(s) = 0$ è la $\overline{s} = \sigma = 0$, ma questa soluzione non è accettabile in quanto, per la (14), $r = -1$, ed il modello (9) perde di significato.

Giova infine osservare la maggiore ampiezza della (20) rispetto alla (4).

## 5 – IL MODELLO PIU' GENERALE A QUATTRO PARAMETRI

In analogia con quanto fatto da J. J. McCoutcheon in [2] con la (5), possiamo considerare la (9) come caso particolare di:

$$(21) \quad \delta(t) = p + q \cdot \frac{1 - r\,e^{st}}{1 + r\,e^{st}}\,,$$

modello a quattro parametri, da cui si ottiene la (9) per $q = s$.

Per quanto riguarda Capitalizzazione ed Attualizzazione, avendosi:

$$\delta(t) = p + q \cdot \frac{1 - r\,e^{st}}{1 + r\,e^{st}} = (p+q) - \frac{2qr\,e^{st}}{1 + r\,e^{st}} =$$
$$= (p+q) - \frac{2q}{s} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\log\left(1 + r\,e^{st}\right)\right\},$$

dalla

$$\nu(t) = e^{-\int_0^t \delta(t)\,\mathrm{d}t}$$

otterremo

$$(22) \quad \nu(t) = e^{-(p+q)\,t} \cdot \left[\frac{1 + r\,e^{st}}{1 + r}\right]^{\frac{2q}{s}}$$

e, similmente, avendosi

$$\mathbb{A}(t_1, t_2) = \frac{\nu(t_1)}{\nu(t_2)}$$

otteniamo

$$(23) \quad \mathbb{A}(t_1, t_2) = e^{(p+q)(t_1 - t_2)} \cdot \left[\frac{1 + r\,e^{st_1}}{1 + r\,e^{st_2}}\right]^{\frac{2q}{s}}.$$

E' opportuno rilevare l'analogia di (22) e (23) con (6) e (7).

Essendo poi:

$$\delta'(t) = -\frac{2qrs\,e^{st}}{(1 + r\,e^{st})^2}$$

$\delta(t)$ è crescente o decrescente a seconda che $qrs < 0$ o $qrs > 0$.

Avendosi infine

$$\delta(t) = p + q \cdot \frac{1 - r\,e^{st}}{1 + r\,e^{st}} = p - q \cdot \frac{1 - \frac{1}{r}\,e^{-st}}{1 + \frac{1}{r}\,e^{-st}}$$

senza perdere in generalità possiamo considerare $s > 0$, per cui $\delta(t)$ sarà crescente o decrescente a seconda che $qr < 0$ o $qr > 0$.

## 6 – DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI

L'aumentato numero dei parametri richiede l'introduzione di un'ulteriore condizione, e quindi useremo, oltre le tre già note, anche la:

$\delta(t_2) = \delta_2$, con $t_2 > t_1$.

Data la successione $\{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_\infty\}$, siano ora $\alpha = \delta_0 - \delta_\infty$, $\beta = \delta_1 - \delta_\infty$, $\gamma = \delta_2 - \delta_\infty$.

Essendo $s > 0$, avremo:

$$\lim_{t \to \infty} \delta(t) = p - q = \delta_\infty$$
e quindi
(24) $p = \delta_\infty + q$ .

Mediante il calcolo di $\delta(0)$ avremo:
$$\delta_0 = p + q \cdot \frac{1-r}{1+r}$$
da cui, per la (24):
(25) $q = \frac{\alpha}{2}(1+r)$ .

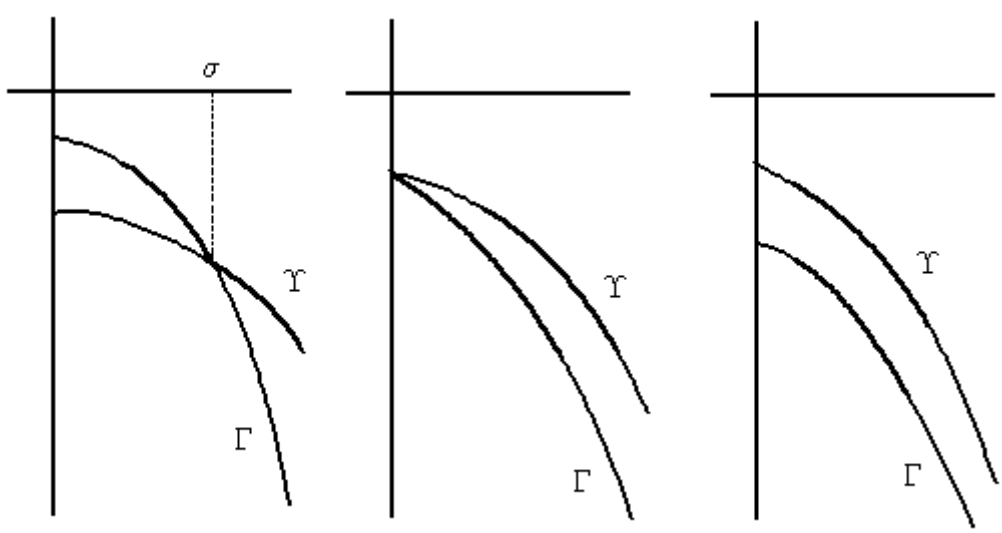
Calcolato $\delta(t_1) = \delta_1$ , per le (24) e (25) sarà:
(26) $r = \frac{\beta - \alpha}{\alpha - \beta\, e^{st_1}}$
e, calcolato infine $\delta(t_2) = \delta_2$ , per le (24), (25) e (26) si perviene all'equazione in $s$:
$$G(s) = \gamma(\beta - \alpha) \cdot e^{st_2} + \beta(\alpha - \gamma) \cdot e^{st_1} + \alpha(\gamma - \beta) = 0 .$$

Occorre, al solito, ricercare le condizioni sotto le quali la $G(s) = 0$ ha una sola soluzione positiva.

Avremo:
(27) $G(0) = \gamma(\beta - \alpha) + \beta(\alpha - \gamma) + \alpha(\gamma - \beta) = 0$
e
(28) $\lim_{s \to \infty} G(s) = -\infty$ .

Inoltre
$$G'(s) = \gamma(\beta - \alpha)\, t_2\, e^{st_2} + \beta(\alpha - \gamma)\, t_1\, e^{st_1}$$
dalla quale
(29) $G'(s) > 0$ se $\gamma(\beta - \alpha)\, t_2\, e^{st_2} > \beta(\gamma - \alpha)\, t_1\, e^{st_1}$ .

Come si vede dalle figure, facendo il confronto tra l'esponenziale di sinistra $(\Gamma)$ e quella di destra $(\Upsilon)$




$G(s) = 0$ ha una sola soluzione positiva solo nel caso (1), ovvero se:
$$\gamma(\beta - \alpha)\, t_2 > \beta(\gamma - \alpha)\, t_1$$
cioè se:

(30) $\dfrac{t_2}{t_1} < \dfrac{\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma(\beta-\alpha)}$

e la condizione (30), è facile verificarlo, altro non è se non la (8).

Le (27), (28) e (29) sono valide sia nel caso di $\{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_\infty\}$ successione crescente, per la quale $\alpha < \beta < \gamma < 0$, sia decrescente, per la quale ora $\alpha > \beta > \gamma > 0$.

Sotto la (30) il modello è realizzabile, avendosi una sola soluzione per i suoi parametri.

Se nella (30) vale l'uguaglianza (caso 2 in figura), troviamo ancora, come caso particolare la soluzione non accettabile $s = 0$.

Rimane infine da notare l'equivalenza dei modelli (5) e (21), potendosi l'uno ricavare dall'altro mediante la trasformazione, da (5) in (21):

$r \to r$
$s \to s$
$q \to 2q$
$p \to p - q$.

Nelle tavole che seguono vengono calcolati $\nu(t)$ e $\delta(t)$, per $0 \le t \le 20$, relativamente ai dati riportati in ogni tavola, usando, nell'ordine, la (1), la (5) e la (9).

Le prime tre colonne si riferiscono a $\nu(t)$, le rimanenti a $\delta(t)$.

Al di sopra delle varie colonne vengono riportati i valori assunti dai parametri dei vari modelli.

Indicheremo con $s_1$, $r_1$ e $p_1$ i parametri del modello (1), con $s_5$, $r_5$, $p_5$ e $q_5$ quelli del modello (5), e con $s_9$, $r_9$ e $p_9$ quelli del modello (9).

Analogamente, indicheremo con $\nu_1(t)$, $\nu_5(t)$, $\nu_9(t)$ e con $\delta_1(t)$, $\delta_5(t)$, $\delta_9(t)$ i valori delle funzioni $\nu(t)$ e $\delta(t)$ ottenuti con i rispettivi modelli.

$\delta_0 = 0.16 \;\; \delta_1 = 0.12 \;\; \delta_2 = 0.106 \;\; \delta_\infty = 0.08 \;\; t_1 = 5 \;\; t_2 = 10$

| | | |
|---|---|---|
| $s_1 = 0.197309$ | $s_5 = 0.01482$ | $s_9 = 0.167724$ |
| $r_1 = 1.466367$ | $r_5 = -1.083325$ | $r_9 = 3.1931$ |
| $p_1 = 0.08$ | $p_5 = 0.08$ | $p_9 = 0.247724$ |
| | $q_5 = -0.006666$ | |

| $t$ | $\nu_1(t)$ | $\nu_5(t)$ | $\nu_9(t)$ | $\delta_1(t)$ | $\delta_5(t)$ | $\delta_9(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0.16 | 0.16 | 0.16 |
| 1 | 0.85609 | 0.85801 | 0.85637 | 0.15081 | 0.147 | 0.15023 |
| 2 | 0.73948 | 0.74441 | 0.74024 | 0.14212 | 0.1375 | 0.14137 |
| 3 | 0.64414 | 0.65123 | 0.64527 | 0.13405 | 0.13028 | 0.1334 |
| 4 | 0.56545 | 0.57337 | 0.56673 | 0.12666 | 0.12459 | 0.12629 |
| 5 | 0.49987 | 0.5074 | 0.5011 | 0.12 | 0.12 | 0.12 |
| 6 | 0.44469 | 0.4509 | 0.44569 | 0.11407 | 0.11621 | 0.11445 |
| 7 | 0.3978 | 0.40209 | 0.39848 | 0.10886 | 0.11304 | 0.1096 |
| 8 | 0.3576 | 0.35961 | 0.35788 | 0.10433 | 0.11034 | 0.10538 |
| 9 | 0.32281 | 0.32242 | 0.32269 | 0.10042 | 0.10802 | 0.10171 |
| 10 | 0.29247 | 0.28971 | 0.29196 | 0.09708 | 0.106 | 0.09854 |
| 11 | 0.2658 | 0.2608 | 0.26493 | 0.09424 | 0.10422 | 0.09581 |
| 12 | 0.24219 | 0.23518 | 0.24101 | 0.09185 | 0.10265 | 0.09347 |
| 13 | 0.22116 | 0.21238 | 0.21973 | 0.08983 | 0.10126 | 0.09146 |
| 14 | 0.20234 | 0.19205 | 0.2007 | 0.08814 | 0.10001 | 0.08974 |
| 15 | 0.1854 | 0.17387 | 0.18361 | 0.08673 | 0.09888 | 0.08827 |
| 16 | 0.1701 | 0.15758 | 0.1682 | 0.08556 | 0.09786 | 0.08702 |
| 17 | 0.15623 | 0.14296 | 0.15427 | 0.08459 | 0.09693 | 0.08596 |
| 18 | 0.14361 | 0.12981 | 0.14163 | 0.08378 | 0.09608 | 0.08505 |
| 19 | 0.13212 | 0.11796 | 0.13013 | 0.08311 | 0.0953 | 0.08428 |
| 20 | 0.12161 | 0.10728 | 0.11965 | 0.08256 | 0.09458 | 0.08362 |

$\delta_0 = 0.16 \;\; \delta_1 = 0.12 \;\; \delta_2 = 0.09 \;\; \delta_\infty = 0.08 \;\; t_1 = 5 \;\; t_2 = 10$

| | | |
|---|---|---|
| $s_1 = 0.197309$ | $s_5 = 0.358352$ | $s_9 = 0.167724$ |
| $r_1 = 1.466367$ | $r_5 = 0.25$ | $r_9 = 3.1931$ |
| $p_1 = 0.08$ | $p_5 = 0.08$ | $p_9 = 0.247724$ |
| | $q_5 = 0.10$ | |

| $t$ | $\nu_1(t)$ | $\nu_5(t)$ | $\nu_9(t)$ | $\delta_1(t)$ | $\delta_5(t)$ | $\delta_9(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0.16 | 0.16 | 0.16 |
| 1 | 0.85609 | 0.85476 | 0.85637 | 0.15081 | 0.15365 | 0.15023 |
| 2 | 0.73948 | 0.73571 | 0.74024 | 0.14212 | 0.14614 | 0.14137 |
| 3 | 0.64414 | 0.63832 | 0.64527 | 0.13405 | 0.13771 | 0.1334 |
| 4 | 0.56545 | 0.55867 | 0.56673 | 0.12666 | 0.12882 | 0.12629 |
| 5 | 0.49987 | 0.49333 | 0.5011 | 0.12 | 0.12 | 0.12 |
| 6 | 0.44469 | 0.43937 | 0.44569 | 0.11407 | 0.11178 | 0.11445 |
| 7 | 0.3978 | 0.39436 | 0.39848 | 0.10886 | 0.10456 | 0.1096 |
| 8 | 0.3576 | 0.35632 | 0.35788 | 0.10433 | 0.09853 | 0.10538 |
| 9 | 0.32281 | 0.32369 | 0.32269 | 0.10042 | 0.09371 | 0.10171 |
| 10 | 0.29247 | 0.29531 | 0.29196 | 0.09708 | 0.09 | 0.09854 |
| 11 | 0.2658 | 0.27029 | 0.26493 | 0.09424 | 0.0872 | 0.09581 |
| 12 | 0.24219 | 0.24798 | 0.24101 | 0.09185 | 0.08514 | 0.09347 |
| 13 | 0.22116 | 0.22792 | 0.21973 | 0.08983 | 0.08365 | 0.09146 |
| 14 | 0.20234 | 0.20975 | 0.2007 | 0.08814 | 0.08258 | 0.08974 |
| 15 | 0.1854 | 0.1932 | 0.18361 | 0.08673 | 0.08181 | 0.08827 |
| 16 | 0.1701 | 0.17807 | 0.1682 | 0.08556 | 0.08127 | 0.08702 |
| 17 | 0.15623 | 0.1642 | 0.15427 | 0.08459 | 0.08089 | 0.08596 |
| 18 | 0.14361 | 0.15147 | 0.14163 | 0.08378 | 0.08062 | 0.08505 |
| 19 | 0.13212 | 0.13975 | 0.13013 | 0.08311 | 0.08043 | 0.08428 |
| 20 | 0.12161 | 0.12895 | 0.11965 | 0.08256 | 0.0803 | 0.08362 |

$\delta_0 = 0.16 \;\; \delta_1 = 0.14 \;\; \delta_2 = 0.106 \;\; \delta_\infty = 0.08 \;\; t_1 = 5 \;\; t_2 = 10$

| | | |
|---|---|---|
| $s_1 = 0.127641$ | $s_5 = 0.330912$ | $s_9 = 0.092442$ |
| $r_1 = 0.59551$ | $r_5 = 0.085526$ | $r_9 = 1.311053$ |
| $p_1 = 0.08$ | $p_5 = 0.08$ | $p_9 = 0.172442$ |
| | $q_5 = 0.086842$ | |

| $t$ | $\nu_1(t)$ | $\nu_5(t)$ | $\nu_9(t)$ | $\delta_1(t)$ | $\delta_5(t)$ | $\delta_9(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0.16 | 0.16 | 0.16 |
| 1 | 0.85378 | 0.85312 | 0.85392 | 0.15613 | 0.1576 | 0.15583 |
| 2 | 0.73181 | 0.72981 | 0.7322 | 0.15216 | 0.15449 | 0.15173 |
| 3 | 0.62977 | 0.62652 | 0.63039 | 0.14813 | 0.15055 | 0.14772 |
| 4 | 0.54417 | 0.54021 | 0.54489 | 0.14406 | 0.14572 | 0.1438 |
| 5 | 0.47212 | 0.46826 | 0.47281 | 0.14 | 0.14 | 0.14 |
| 6 | 0.41127 | 0.40839 | 0.4118 | 0.13596 | 0.13351 | 0.13631 |
| 7 | 0.3597 | 0.35859 | 0.35997 | 0.13198 | 0.12651 | 0.13276 |
| 8 | 0.31584 | 0.31711 | 0.31575 | 0.1281 | 0.11934 | 0.12934 |
| 9 | 0.27839 | 0.28242 | 0.2779 | 0.12434 | 0.11239 | 0.12607 |
| 10 | 0.24629 | 0.25322 | 0.24537 | 0.12072 | 0.106 | 0.12295 |
| 11 | 0.21866 | 0.22841 | 0.2173 | 0.11727 | 0.10039 | 0.11997 |
| 12 | 0.19478 | 0.20709 | 0.19301 | 0.114 | 0.09568 | 0.11715 |
| 13 | 0.17407 | 0.18857 | 0.1719 | 0.1109 | 0.09187 | 0.11449 |
| 14 | 0.15602 | 0.17229 | 0.1535 | 0.10801 | 0.08886 | 0.11197 |
| 15 | 0.14024 | 0.15783 | 0.1374 | 0.10532 | 0.08655 | 0.1096 |
| 16 | 0.12638 | 0.14487 | 0.12328 | 0.10283 | 0.08481 | 0.10737 |
| 17 | 0.11416 | 0.13318 | 0.11084 | 0.10053 | 0.08351 | 0.10528 |
| 18 | 0.10335 | 0.12257 | 0.09986 | 0.09843 | 0.08255 | 0.10333 |
| 19 | 0.09375 | 0.1129 | 0.09014 | 0.0965 | 0.08184 | 0.10151 |
| 20 | 0.0852 | 0.10406 | 0.08151 | 0.09475 | 0.08133 | 0.09981 |

$\delta_0 = 0.16 \;\; \delta_1 = 0.14 \;\; \delta_2 = 0.09 \;\; \delta_\infty = 0.08 \;\; t_1 = 5 \;\; t_2 = 10$

| | | |
|---|---|---|
| $s_1 = 0.127641$ | $s_5 = 0.599146$ | $s_9 = 0.092442$ |
| $r_1 = 0.59551$ | $r_5 = 0.017857$ | $r_9 = 1.311053$ |
| $p_1 = 0.08$ | $p_5 = 0.08$ | $p_9 = 0.172442$ |
| | $q_5 = 0.081429$ | |

| $t$ | $\nu_1(t)$ | $\nu_5(t)$ | $\nu_9(t)$ | $\delta_1(t)$ | $\delta_5(t)$ | $\delta_9(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0.16 | 0.16 | 0.16 |
| 1 | 0.85378 | 0.85258 | 0.85392 | 0.15613 | 0.15886 | 0.15583 |
| 2 | 0.73181 | 0.728 | 0.7322 | 0.15216 | 0.15687 | 0.15173 |
| 3 | 0.62977 | 0.62326 | 0.63039 | 0.14813 | 0.1535 | 0.14772 |
| 4 | 0.54417 | 0.53591 | 0.54489 | 0.14406 | 0.14807 | 0.1438 |
| 5 | 0.47212 | 0.46391 | 0.47281 | 0.14 | 0.14 | 0.14 |
| 6 | 0.41127 | 0.40539 | 0.4118 | 0.13596 | 0.12934 | 0.13631 |
| 7 | 0.3597 | 0.35834 | 0.35997 | 0.13198 | 0.11728 | 0.13276 |
| 8 | 0.31584 | 0.32056 | 0.31575 | 0.1281 | 0.1058 | 0.12934 |
| 9 | 0.27839 | 0.28978 | 0.2779 | 0.12434 | 0.09653 | 0.12607 |
| 10 | 0.24629 | 0.26403 | 0.24537 | 0.12072 | 0.09 | 0.12295 |
| 11 | 0.21866 | 0.24185 | 0.2173 | 0.11727 | 0.08581 | 0.11997 |
| 12 | 0.19478 | 0.22227 | 0.19301 | 0.114 | 0.0833 | 0.11715 |
| 13 | 0.17407 | 0.20466 | 0.1719 | 0.1109 | 0.08184 | 0.11449 |
| 14 | 0.15602 | 0.18866 | 0.1535 | 0.10801 | 0.08102 | 0.11197 |
| 15 | 0.14024 | 0.17402 | 0.1374 | 0.10532 | 0.08056 | 0.1096 |
| 16 | 0.12638 | 0.16058 | 0.12328 | 0.10283 | 0.08031 | 0.10737 |
| 17 | 0.11416 | 0.14819 | 0.11084 | 0.10053 | 0.08017 | 0.10528 |
| 18 | 0.10335 | 0.13678 | 0.09986 | 0.09843 | 0.08009 | 0.10333 |
| 19 | 0.09375 | 0.12626 | 0.09014 | 0.0965 | 0.08005 | 0.10151 |
| 20 | 0.0852 | 0.11655 | 0.08151 | 0.09475 | 0.08002 | 0.09981 |

$\delta_0 = 0.16 \;\; \delta_1 = 0.12 \;\; \delta_2 = 0.106 \;\; \delta_\infty = 0.08 \;\; t_1 = 10 \;\; t_2 = 15$

| | | |
|---|---|---|
| $s_1 = 0.128998$ | $s_5 = 0.107017$ | $s_9 = 0.098655$ |
| $r_1 = 0.612476$ | $r_5 = 1.091861$ | $r_9 = 1.466368$ |
| $p_1 = 0.08$ | $p_5 = 0.08$ | $p_9 = 0.178655$ |
| | $q_5 = 0.167349$ | |

| $t$ | $\nu_1(t)$ | $\nu_5(t)$ | $\nu_9(t)$ | $\delta_1(t)$ | $\delta_5(t)$ | $\delta_9(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0.16 | 0.16 | 0.16 |
| 1 | 0.85383 | 0.85404 | 0.85413 | 0.15602 | 0.15554 | 0.15535 |
| 2 | 0.73196 | 0.73263 | 0.7329 | 0.15195 | 0.15113 | 0.15081 |
| 3 | 0.63007 | 0.63123 | 0.63169 | 0.14782 | 0.1468 | 0.1464 |
| 4 | 0.54462 | 0.54621 | 0.54684 | 0.14366 | 0.14255 | 0.14212 |
| 5 | 0.47272 | 0.47463 | 0.47537 | 0.13951 | 0.13842 | 0.138 |
| 6 | 0.412 | 0.4141 | 0.41492 | 0.1354 | 0.13442 | 0.13405 |
| 7 | 0.36056 | 0.36272 | 0.36355 | 0.13137 | 0.13056 | 0.13026 |
| 8 | 0.31679 | 0.31891 | 0.31973 | 0.12744 | 0.12687 | 0.12666 |
| 9 | 0.27942 | 0.28141 | 0.28218 | 0.12364 | 0.12334 | 0.12323 |
| 10 | 0.24737 | 0.24918 | 0.24987 | 0.12 | 0.12 | 0.12 |
| 11 | 0.21978 | 0.22135 | 0.22196 | 0.11652 | 0.11683 | 0.11694 |
| 12 | 0.19593 | 0.19724 | 0.19774 | 0.11324 | 0.11385 | 0.11407 |
| 13 | 0.17523 | 0.17627 | 0.17667 | 0.11016 | 0.11105 | 0.11138 |
| 14 | 0.15718 | 0.15795 | 0.15825 | 0.10728 | 0.10843 | 0.10886 |
| 15 | 0.14138 | 0.14189 | 0.14209 | 0.10461 | 0.106 | 0.10651 |
| 16 | 0.12749 | 0.12776 | 0.12787 | 0.10214 | 0.10373 | 0.10433 |
| 17 | 0.11525 | 0.1153 | 0.11532 | 0.09987 | 0.10163 | 0.1023 |
| 18 | 0.1044 | 0.10426 | 0.10421 | 0.0978 | 0.0997 | 0.10042 |
| 19 | 0.09476 | 0.09445 | 0.09433 | 0.09591 | 0.09791 | 0.09869 |
| 20 | 0.08617 | 0.08571 | 0.08554 | 0.0942 | 0.09627 | 0.09708 |

$\delta_0 = 0.16 \;\; \delta_1 = 0.12 \;\; \delta_2 = 0.09 \;\; \delta_\infty = 0.08 \;\; t_1 = 10 \;\; t_2 = 15$

| | | |
|---|---|---|
| $s_1 = 0.128998$ | $s_5 = 0.38552$ | $s_9 = 0.098655$ |
| $r_1 = 0.612476$ | $r_5 = 0.022105$ | $r_9 = 1.466368$ |
| $p_1 = 0.08$ | $p_5 = 0.08$ | $p_9 = 0.178655$ |
| | $q_5 = 0.081768$ | |

| $t$ | $\nu_1(t)$ | $\nu_5(t)$ | $\nu_9(t)$ | $\delta_1(t)$ | $\delta_5(t)$ | $\delta_9(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0.16 | 0.16 | 0.16 |
| 1 | 0.85383 | 0.85246 | 0.85413 | 0.15602 | 0.15919 | 0.15535 |
| 2 | 0.73196 | 0.7274 | 0.7329 | 0.15195 | 0.15803 | 0.15081 |
| 3 | 0.63007 | 0.62155 | 0.63169 | 0.14782 | 0.15639 | 0.1464 |
| 4 | 0.54462 | 0.53213 | 0.54684 | 0.14366 | 0.15411 | 0.14212 |
| 5 | 0.47272 | 0.45681 | 0.47537 | 0.13951 | 0.15098 | 0.138 |
| 6 | 0.412 | 0.39357 | 0.41492 | 0.1354 | 0.14683 | 0.13405 |
| 7 | 0.36056 | 0.34069 | 0.36355 | 0.13137 | 0.14155 | 0.13026 |
| 8 | 0.31679 | 0.29664 | 0.31973 | 0.12744 | 0.13513 | 0.12666 |
| 9 | 0.27942 | 0.26008 | 0.28218 | 0.12364 | 0.12781 | 0.12323 |
| 10 | 0.24737 | 0.22977 | 0.24987 | 0.12 | 0.12 | 0.12 |
| 11 | 0.21978 | 0.20458 | 0.22196 | 0.11652 | 0.11225 | 0.11694 |
| 12 | 0.19593 | 0.18353 | 0.19774 | 0.11324 | 0.1051 | 0.11407 |
| 13 | 0.17523 | 0.16574 | 0.17667 | 0.11016 | 0.09892 | 0.11138 |
| 14 | 0.15718 | 0.15052 | 0.15825 | 0.10728 | 0.0939 | 0.10886 |
| 15 | 0.14138 | 0.13731 | 0.14209 | 0.10461 | 0.09 | 0.10651 |
| 16 | 0.12749 | 0.12568 | 0.12787 | 0.10214 | 0.08707 | 0.10433 |
| 17 | 0.11525 | 0.11533 | 0.11532 | 0.09987 | 0.08495 | 0.1023 |
| 18 | 0.1044 | 0.10602 | 0.10421 | 0.0978 | 0.08343 | 0.10042 |
| 19 | 0.09476 | 0.09759 | 0.09433 | 0.09591 | 0.08236 | 0.09869 |
| 20 | 0.08617 | 0.08991 | 0.08554 | 0.0942 | 0.08162 | 0.09708 |

$\delta_0 = 0.16 \;\; \delta_1 = 0.14 \;\; \delta_2 = 0.106 \;\; \delta_\infty = 0.08 \;\; t_1 = 10 \;\; t_2 = 15$

| | | |
|---|---|---|
| $s_1 = 0.09946$ | $s_5 = 0.36132$ | $s_9 = 0.06382$ |
| $r_1 = 0.243254$ | $r_5 = 0.009324$ | $r_9 = 0.5955$ |
| $p_1 = 0.08$ | $p_5 = 0.08$ | $p_9 = 0.14382$ |
| | $q_5 = 0.080746$ | |

| $t$ | $\nu_1(t)$ | $\nu_5(t)$ | $\nu_9(t)$ | $\delta_1(t)$ | $\delta_5(t)$ | $\delta_9(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0.16 | 0.16 | 0.16 |
| 1 | 0.85282 | 0.85227 | 0.85296 | 0.15839 | 0.15967 | 0.15807 |
| 2 | 0.7285 | 0.72664 | 0.72895 | 0.15669 | 0.15922 | 0.15613 |
| 3 | 0.62339 | 0.61987 | 0.62419 | 0.1549 | 0.15857 | 0.15415 |
| 4 | 0.53443 | 0.5292 | 0.53554 | 0.15301 | 0.15767 | 0.15216 |
| 5 | 0.45905 | 0.45227 | 0.46041 | 0.15104 | 0.1564 | 0.15015 |
| 6 | 0.3951 | 0.38711 | 0.39662 | 0.14898 | 0.15466 | 0.14813 |
| 7 | 0.34078 | 0.33201 | 0.34236 | 0.14684 | 0.15229 | 0.1461 |
| 8 | 0.29456 | 0.28554 | 0.29612 | 0.14462 | 0.14914 | 0.14406 |
| 9 | 0.25519 | 0.24646 | 0.25665 | 0.14234 | 0.14506 | 0.14203 |
| 10 | 0.22159 | 0.2137 | 0.22289 | 0.14 | 0.14 | 0.14 |
| 11 | 0.19287 | 0.18633 | 0.19397 | 0.1376 | 0.13396 | 0.13797 |
| 12 | 0.16827 | 0.16351 | 0.16914 | 0.13518 | 0.12715 | 0.13596 |
| 13 | 0.14718 | 0.14451 | 0.14778 | 0.13272 | 0.11992 | 0.13396 |
| 14 | 0.12904 | 0.12864 | 0.12938 | 0.13025 | 0.11272 | 0.13198 |
| 15 | 0.11342 | 0.11532 | 0.1135 | 0.12778 | 0.106 | 0.13003 |
| 16 | 0.09994 | 0.10404 | 0.09975 | 0.12532 | 0.10007 | 0.1281 |
| 17 | 0.08827 | 0.09437 | 0.08784 | 0.12288 | 0.09512 | 0.1262 |
| 18 | 0.07816 | 0.08598 | 0.0775 | 0.12047 | 0.09117 | 0.12434 |
| 19 | 0.06937 | 0.07861 | 0.0685 | 0.11811 | 0.08812 | 0.12251 |
| 20 | 0.06171 | 0.07207 | 0.06065 | 0.1158 | 0.08584 | 0.12072 |

$\delta_0 = 0.16 \;\; \delta_1 = 0.14 \;\; \delta_2 = 0.09 \;\; \delta_\infty = 0.08 \;\; t_1 = 10 \;\; t_2 = 15$

| | | |
|---|---|---|
| $s_1 = 0.09946$ | $s_5 = 0.60847$ | $s_9 = 0.06382$ |
| $r_1 = 0.243254$ | $r_5 = 0.000761$ | $r_9 = 0.5955$ |
| $p_1 = 0.08$ | $p_5 = 0.08$ | $p_9 = 0.14382$ |
| | $q_5 = 0.00861$ | |

| $t$ | $\nu_1(t)$ | $\nu_5(t)$ | $\nu_9(t)$ | $\delta_1(t)$ | $\delta_5(t)$ | $\delta_9(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0.16 | 0.16 | 0.16 |
| 1 | 0.85282 | 0.85216 | 0.85296 | 0.15839 | 0.15994 | 0.15807 |
| 2 | 0.7285 | 0.72623 | 0.72895 | 0.15669 | 0.15985 | 0.15613 |
| 3 | 0.62339 | 0.61899 | 0.62419 | 0.1549 | 0.15968 | 0.15415 |
| 4 | 0.53443 | 0.52771 | 0.53554 | 0.15301 | 0.15937 | 0.15216 |
| 5 | 0.45905 | 0.45008 | 0.46041 | 0.15104 | 0.1588 | 0.15015 |
| 6 | 0.3951 | 0.38417 | 0.39662 | 0.14898 | 0.15778 | 0.14813 |
| 7 | 0.34078 | 0.32836 | 0.34236 | 0.14684 | 0.15596 | 0.1461 |
| 8 | 0.29456 | 0.28134 | 0.29612 | 0.14462 | 0.15284 | 0.14406 |
| 9 | 0.25519 | 0.24203 | 0.25665 | 0.14234 | 0.14773 | 0.14203 |
| 10 | 0.22159 | 0.20955 | 0.22289 | 0.14 | 0.14 | 0.14 |
| 11 | 0.19287 | 0.18309 | 0.19397 | 0.1376 | 0.12959 | 0.13797 |
| 12 | 0.16827 | 0.16179 | 0.16914 | 0.13518 | 0.1176 | 0.13596 |
| 13 | 0.14718 | 0.14469 | 0.14778 | 0.13272 | 0.10603 | 0.13396 |
| 14 | 0.12904 | 0.13078 | 0.12938 | 0.13025 | 0.09663 | 0.13198 |
| 15 | 0.11342 | 0.11915 | 0.1135 | 0.12778 | 0.09 | 0.13003 |
| 16 | 0.09994 | 0.10915 | 0.09975 | 0.12532 | 0.08577 | 0.1281 |
| 17 | 0.08827 | 0.10031 | 0.08784 | 0.12288 | 0.08324 | 0.1262 |
| 18 | 0.07816 | 0.09237 | 0.0775 | 0.12047 | 0.0818 | 0.12434 |
| 19 | 0.06937 | 0.08515 | 0.0685 | 0.11811 | 0.08098 | 0.12251 |
| 20 | 0.06171 | 0.07855 | 0.06065 | 0.1158 | 0.08054 | 0.12072 |

$\delta_0 = 0.16 \;\; \delta_1 = 0.12 \;\; \delta_2 = 0.106 \;\; \delta_\infty = 0.08 \;\; t_1 = 10 \;\; t_2 = 20$

| | | |
|---|---|---|
| $s_1 = 0.128998$ | $s_5 = 0.00741$ | $s_9 = 0.098655$ |
| $r_1 = 0.612476$ | $r_5 = -1.083325$ | $r_9 = 1.466368$ |
| $p_1 = 0.08$ | $p_5 = 0.08$ | $p_9 = 0.178655$ |
| | $q_5 = -0.006666$ | |

| $t$ | $\nu_1(t)$ | $\nu_5(t)$ | $\nu_9(t)$ | $\delta_1(t)$ | $\delta_5(t)$ | $\delta_9(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0.16 | 0.16 | 0.16 |
| 1 | 0.85383 | 0.85524 | 0.85413 | 0.15602 | 0.15294 | 0.15535 |
| 2 | 0.73196 | 0.73619 | 0.7329 | 0.15195 | 0.147 | 0.15081 |
| 3 | 0.63007 | 0.63721 | 0.63169 | 0.14782 | 0.1419 | 0.1464 |
| 4 | 0.54462 | 0.55415 | 0.54684 | 0.14366 | 0.1375 | 0.14212 |
| 5 | 0.47272 | 0.48391 | 0.47537 | 0.13951 | 0.13366 | 0.138 |
| 6 | 0.412 | 0.4241 | 0.41492 | 0.1354 | 0.13028 | 0.13405 |
| 7 | 0.36056 | 0.37286 | 0.36355 | 0.13137 | 0.12727 | 0.13026 |
| 8 | 0.31679 | 0.32875 | 0.31973 | 0.12744 | 0.12459 | 0.12666 |
| 9 | 0.27942 | 0.29059 | 0.28218 | 0.12364 | 0.12218 | 0.12323 |
| 10 | 0.24737 | 0.25746 | 0.24987 | 0.12 | 0.12 | 0.12 |
| 11 | 0.21978 | 0.22857 | 0.22196 | 0.11652 | 0.11802 | 0.11694 |
| 12 | 0.19593 | 0.20331 | 0.19774 | 0.11324 | 0.11621 | 0.11407 |
| 13 | 0.17523 | 0.18116 | 0.17667 | 0.11016 | 0.11456 | 0.11138 |
| 14 | 0.15718 | 0.16167 | 0.15825 | 0.10728 | 0.11304 | 0.10886 |
| 15 | 0.14138 | 0.14449 | 0.14209 | 0.10461 | 0.11163 | 0.10651 |
| 16 | 0.12749 | 0.12932 | 0.12787 | 0.10214 | 0.11034 | 0.10433 |
| 17 | 0.11525 | 0.11588 | 0.11532 | 0.09987 | 0.10913 | 0.1023 |
| 18 | 0.1044 | 0.10395 | 0.10421 | 0.0978 | 0.10802 | 0.10042 |
| 19 | 0.09476 | 0.09336 | 0.09433 | 0.09591 | 0.10697 | 0.09869 |
| 20 | 0.08617 | 0.08393 | 0.08554 | 0.0942 | 0.106 | 0.09708 |

$\delta_0 = 0.16 \;\; \delta_1 = 0.12 \;\; \delta_2 = 0.09 \;\; \delta_\infty = 0.08 \;\; t_1 = 10 \;\; t_2 = 20$

| | | |
|---|---|---|
| $s_1 = 0.128998$ | $s_5 = 0.179176$ | $s_9 = 0.098655$ |
| $r_1 = 0.612476$ | $r_5 = 0.25$ | $r_9 = 1.466368$ |
| $p_1 = 0.08$ | $p_5 = 0.08$ | $p_9 = 0.178655$ |
| | $q_5 = 0.10$ | |

| $t$ | $\nu_1(t)$ | $\nu_5(t)$ | $\nu_9(t)$ | $\delta_1(t)$ | $\delta_5(t)$ | $\delta_9(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0.16 | 0.16 | 0.16 |
| 1 | 0.85383 | 0.85341 | 0.85413 | 0.15602 | 0.15697 | 0.15535 |
| 2 | 0.73196 | 0.73062 | 0.7329 | 0.15195 | 0.15365 | 0.15081 |
| 3 | 0.63007 | 0.62768 | 0.63169 | 0.14782 | 0.15003 | 0.1464 |
| 4 | 0.54462 | 0.54127 | 0.54684 | 0.14366 | 0.14614 | 0.14212 |
| 5 | 0.47272 | 0.46863 | 0.47537 | 0.13951 | 0.14202 | 0.138 |
| 6 | 0.412 | 0.40746 | 0.41492 | 0.1354 | 0.13771 | 0.13405 |
| 7 | 0.36056 | 0.35582 | 0.36355 | 0.13137 | 0.13329 | 0.13026 |
| 8 | 0.31679 | 0.31211 | 0.31973 | 0.12744 | 0.12882 | 0.12666 |
| 9 | 0.27942 | 0.275 | 0.28218 | 0.12364 | 0.12436 | 0.12323 |
| 10 | 0.24737 | 0.24337 | 0.24987 | 0.12 | 0.12 | 0.12 |
| 11 | 0.21978 | 0.21631 | 0.22196 | 0.11652 | 0.11578 | 0.11694 |
| 12 | 0.19593 | 0.19305 | 0.19774 | 0.11324 | 0.11178 | 0.11407 |
| 13 | 0.17523 | 0.17296 | 0.17667 | 0.11016 | 0.10802 | 0.11138 |
| 14 | 0.15718 | 0.15552 | 0.15825 | 0.10728 | 0.10456 | 0.10886 |
| 15 | 0.14138 | 0.14031 | 0.14209 | 0.10461 | 0.10139 | 0.10651 |
| 16 | 0.12749 | 0.12696 | 0.12787 | 0.10214 | 0.09853 | 0.10433 |
| 17 | 0.11525 | 0.1152 | 0.11532 | 0.09987 | 0.09598 | 0.1023 |
| 18 | 0.1044 | 0.10477 | 0.10421 | 0.0978 | 0.09371 | 0.10042 |
| 19 | 0.09476 | 0.0955 | 0.09433 | 0.09591 | 0.09173 | 0.09869 |
| 20 | 0.08617 | 0.0872 | 0.08554 | 0.0942 | 0.09 | 0.09708 |

$\delta_0 = 0.16 \;\; \delta_1 = 0.14 \;\; \delta_2 = 0.106 \;\; \delta_\infty = 0.08 \;\; t_1 = 10 \;\; t_2 = 20$

| | | |
|---|---|---|
| $s_1 = 0.09946$ | $s_5 = 0.165456$ | $s_9 = 0.06382$ |
| $r_1 = 0.243254$ | $r_5 = 0.085526$ | $r_9 = 0.5955$ |
| $p_1 = 0.08$ | $p_5 = 0.08$ | $p_9 = 0.14382$ |
| | $q_5 = 0.086842$ | |

| $t$ | $\nu_1(t)$ | $\nu_5(t)$ | $\nu_9(t)$ | $\delta_1(t)$ | $\delta_5(t)$ | $\delta_9(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0.16 | 0.16 | 0.16 |
| 1 | 0.85282 | 0.8526 | 0.85296 | 0.15839 | 0.15888 | 0.15807 |
| 2 | 0.7285 | 0.72781 | 0.72895 | 0.15669 | 0.1576 | 0.15613 |
| 3 | 0.62339 | 0.62213 | 0.62419 | 0.1549 | 0.15614 | 0.15415 |
| 4 | 0.53443 | 0.53262 | 0.53554 | 0.15301 | 0.15449 | 0.15216 |
| 5 | 0.45905 | 0.45679 | 0.46041 | 0.15104 | 0.15263 | 0.15015 |
| 6 | 0.3951 | 0.39253 | 0.39662 | 0.14898 | 0.15055 | 0.14813 |
| 7 | 0.34078 | 0.33805 | 0.34236 | 0.14684 | 0.14825 | 0.1461 |
| 8 | 0.29456 | 0.29183 | 0.29612 | 0.14462 | 0.14572 | 0.14406 |
| 9 | 0.25519 | 0.2526 | 0.25665 | 0.14234 | 0.14296 | 0.14203 |
| 10 | 0.22159 | 0.21927 | 0.22289 | 0.14 | 0.14 | 0.14 |
| 11 | 0.19287 | 0.19092 | 0.19397 | 0.1376 | 0.13683 | 0.13797 |
| 12 | 0.16827 | 0.16678 | 0.16914 | 0.13518 | 0.13351 | 0.13596 |
| 13 | 0.14718 | 0.14619 | 0.14778 | 0.13272 | 0.13005 | 0.13396 |
| 14 | 0.12904 | 0.12858 | 0.12938 | 0.13025 | 0.12651 | 0.13198 |
| 15 | 0.11342 | 0.11351 | 0.1135 | 0.12778 | 0.12292 | 0.13003 |
| 16 | 0.09994 | 0.10056 | 0.09975 | 0.12532 | 0.11934 | 0.1281 |
| 17 | 0.08827 | 0.0894 | 0.08784 | 0.12288 | 0.11581 | 0.1262 |
| 18 | 0.07816 | 0.07976 | 0.0775 | 0.12047 | 0.11239 | 0.12434 |
| 19 | 0.06937 | 0.0714 | 0.0685 | 0.11811 | 0.10911 | 0.12251 |
| 20 | 0.06171 | 0.06412 | 0.06065 | 0.1158 | 0.106 | 0.12072 |

$\delta_0 = 0.16 \;\; \delta_1 = 0.14 \;\; \delta_2 = 0.09 \;\; \delta_\infty = 0.08 \;\; t_1 = 10 \;\; t_2 = 20$

| | | |
|---|---|---|
| $s_1 = 0.09946$ | $s_5 = 0.299573$ | $s_9 = 0.06382$ |
| $r_1 = 0.243254$ | $r_5 = 0.017857$ | $r_9 = 0.5955$ |
| $p_1 = 0.08$ | $p_5 = 0.08$ | $p_9 = 0.14382$ |
| | $q_5 = 0.081429$ | |

| $t$ | $\nu_1(t)$ | $\nu_5(t)$ | $\nu_9(t)$ | $\delta_1(t)$ | $\delta_5(t)$ | $\delta_9(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0.16 | 0.16 | 0.16 |
| 1 | 0.85282 | 0.85234 | 0.85296 | 0.15839 | 0.15951 | 0.15807 |
| 2 | 0.7285 | 0.72689 | 0.72895 | 0.15669 | 0.15886 | 0.15613 |
| 3 | 0.62339 | 0.62037 | 0.62419 | 0.1549 | 0.158 | 0.15415 |
| 4 | 0.53443 | 0.52999 | 0.53554 | 0.15301 | 0.15687 | 0.15216 |
| 5 | 0.45905 | 0.45335 | 0.46041 | 0.15104 | 0.1554 | 0.15015 |
| 6 | 0.3951 | 0.38845 | 0.39662 | 0.14898 | 0.1535 | 0.14813 |
| 7 | 0.34078 | 0.33356 | 0.34236 | 0.14684 | 0.15109 | 0.1461 |
| 8 | 0.29456 | 0.2872 | 0.29612 | 0.14462 | 0.14807 | 0.14406 |
| 9 | 0.25519 | 0.24812 | 0.25665 | 0.14234 | 0.14438 | 0.14203 |
| 10 | 0.22159 | 0.21522 | 0.22289 | 0.14 | 0.14 | 0.14 |
| 11 | 0.19287 | 0.18756 | 0.19397 | 0.1376 | 0.13494 | 0.13797 |
| 12 | 0.16827 | 0.16434 | 0.16914 | 0.13518 | 0.12934 | 0.13596 |
| 13 | 0.14718 | 0.14483 | 0.14778 | 0.13272 | 0.12337 | 0.13396 |
| 14 | 0.12904 | 0.12841 | 0.12938 | 0.13025 | 0.11728 | 0.13198 |
| 15 | 0.11342 | 0.11454 | 0.1135 | 0.12778 | 0.11135 | 0.13003 |
| 16 | 0.09994 | 0.10276 | 0.09975 | 0.12532 | 0.1058 | 0.1281 |
| 17 | 0.08827 | 0.09267 | 0.08784 | 0.12288 | 0.10083 | 0.1262 |
| 18 | 0.07816 | 0.08397 | 0.0775 | 0.12047 | 0.09653 | 0.12434 |
| 19 | 0.06937 | 0.07638 | 0.0685 | 0.11811 | 0.09293 | 0.12251 |
| 20 | 0.06171 | 0.06971 | 0.06065 | 0.1158 | 0.09 | 0.12072 |

# BIBLIOGRAFIA

[1] – Stoodley C. L.
*“The effects of a falling interest rate on the values of certain actuarial functions"*
Transactions of the Faculty of the Actuaries
1934, vol.14, pp.137-175.

[2] – McCoutcheon J. J.
*“Some remarks relating to Stoodley's Formula"*
Transactions of the Faculty of the Actuaries
1982, vol.38, pp.182-191.