Unicità del Tasso Interno di Rendimento mediante il Computer

Quaderno n. 35
Istituto di Matematica
Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie
Università degli Studi
Siena

1 – INTRODUZIONE.

Tre sono gli argomenti della presente nota.

Il primo consiste, alla luce di quanto detto in [5], e visti i vari tentativi già presentati in letteratura di utilizzazione del calcolo automatico per problemi di questo tipo (vedi [1], [2], [3], [6], [7] e [8]), nel fornire un programma di calcolo per la forma più generale di utilizzazione del Teorema di Vincent nello studio degli zeri e del segno della D.P.V.:

$$\mathrm{V}(r) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (1+r)^{-i}$$

relativa ad un dato progetto

$$\mathbb{A} : (a_0, a_1, a_2, ..., a_n)\,,$$

con gli $a_i \in \mathbb{R}$ e tali che :

$$\begin{cases} a_0 \neq 0 \\ a_i \cdot a_j < 0, \ \text{per almeno una coppia } i,\, j \end{cases}.$$

Questo programma è stato abilitato alla scelta tra varie opzioni, in modo da consentire tipi di indagine diversi a seconda delle necessità dell'utente.

Secondariamente verranno presentate altre due trasformazioni, che consentono, relativamente al solito problema, un'indagine spesso più spedita.

Infine viene formulata in forma matriciale tutta la procedura relativa alla forma più generale di utilizzazione del Teorema di Vincent.

2 – IL TEOREMA DI VINCENT .

Lo strumento più semplice di indagine sul numero degli zeri positivi di un polinomio a coefficienti reali consiste nella ben nota Regola dei Segni di Cartesio.

Uno strumento più sofisticato di analisi viene fornito dal Teorema di Vincent che, nella sua espressione originale, come data in [10], afferma :

– Siano dati dei valori interi $\mathrm{c}_i \in \mathbb{Z}$; se un polinomio di grado n nella variabile x ammette solo radici semplici, operando sulla variabile x una serie di sostituzioni del tipo :

$$x_{i+1} = \mathrm{c}_i + \frac{1}{x_i} \ , \ \text{avendo posto } x_0 = x \ ,$$

dopo un numero finito di queste sostituzioni, indipendente dalla scelta dei valori interi c_i, si perviene ad una equazione trasformata i cui coefficienti presentano, al più, una variazione.

Il criterio operativo che questo Teorema suggerisce può essere articolato in vari punti.

Operando nella D.P.V. $V(r)$ la sostituzione $\dfrac{1}{(1+r)} = x$, otteniamo la:

$$V(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \ .$$

La presenza di soluzioni $x > 0$ per la $V(x) = 0$ implicherà, per la $V(r) = 0$, l'esistenza di soluzioni $r > -1$, ovvero di Tassi Interni di Rendimento economicamente accettabili per il progetto $\mathbb{A} : (a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$, e, più precisamente, radici $r : -1 < r < 0$ se $x > 1$ e radici $r : 0 < r < +\infty$ se $0 < x < 1$.

Definiamo poi le due trasformazioni, Ω_0 e Ω_1, del polinomio $V(x)$, ottenute mediante i seguenti cambiamenti di variabile :

$\Omega_0 : x = x_0 = 1 + x_1$ e

$\Omega_1 : x = x_0 = \dfrac{1}{1+x_1}$,

avendo posto $x = x_0$.

Le radici positive del polinomio ottenuto mediante la prima trasformazione corrispondono a radici di $V(x)$ situate nell'intervallo $x : 1 < x < +\infty$, mentre quelle del polinomio ottenuto mediante la seconda trasformazione corrispondono a radici di $V(x)$ appartenenti all'intervallo $x : 0 < x < 1$.

Ovviamente l'indagine sul numero delle radici sarà condotta basandosi sulla Regola dei Segni di Cartesio.

Ove non si fosse ancora ottenuta una risposta (in presenza cioè di un numero di variazioni maggiore di uno) si può iterare il procedimento, componendo, mediante uno schema ripetitivo ad albero, quante trasformazioni, Ω_0 e/o Ω_1, si vogliano.

Vedasi, per questo, [4] e [5] .

Possiamo formalizzare il procedimento nel seguente modo:
osserviamo anzitutto come ogni composizione di quante si vogliano trasformazioni (in numero, ad esempio, di k) Ω_0 e/o Ω_1 consista in un cambiamento di variabile del tipo:

$x_0 = \dfrac{\alpha + \beta\, x_k}{\gamma + \delta\, x_k}$, con $\alpha, \beta,\ \gamma$ e δ numeri naturali,

che noi identifichiamo con la:

$$(\alpha, \gamma\, ; \beta, \delta) \ \simeq \ \frac{\alpha + \beta\, x}{\gamma + \delta\, x} \ .$$

Avremo quindi che:

$x = x_0 \ \simeq \ (0, 1; 1, 0)$

$\Omega_0 : x_0 = 1 + x_1 \ \simeq \ (1, 1; 1, 0)$

$\Omega_1 : x_0 = \dfrac{1}{1+x_1} \;\simeq\; (1,1;0,1)$.

E' facile poi vedere come :

$\Omega_0\,[(\alpha,\gamma\,;\beta,\delta)] \;\simeq\; (\alpha+\beta,\gamma+\delta;\beta,\delta)$, e

$\Omega_1\,[(\alpha,\gamma\,;\beta,\delta)] \;\simeq\; (\alpha+\beta,\gamma+\delta;\alpha,\gamma)$.

Se, componendo un numero k qualsivoglia di trasformazioni Ω_0 e/o Ω_1, abbiamo operato la sostituzione:

$$x_0 = \frac{\alpha+\beta\,x_k}{\gamma+\delta\,x_k} \ ,$$

calcolando i due limiti:

$$\lim_{x_k \to 0^+} x_0 \ \text{ e } \lim_{x_k \to +\infty} x_0$$

avremo gli estremi dell'intervallo in cui cadono le radici di $\mathrm{V}(x)$ corrispondenti alle radici positive del polinomio avente per variabile x_k, e gli intervalli saranno:

$$\frac{\alpha}{\gamma} < x_0 < \frac{\beta}{\delta} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{\beta}{\delta} < x_0 < \frac{\alpha}{\gamma} \ ,$$

a seconda che il numero delle trasformazioni Ω_1 operate sia pari o dispari.

Tutti gli estremi degli intervalli che si ottengono seguendo questa procedura sono numeri razionali.

Se uno di essi è radice del polinomio trasformato, sia semplice che multipla, questo comporta l'annullamento di un numero di coefficienti del polinomio trasformato, a partire dal termine noto, pari alla molteplicità di detta radice.

Il calcolo dei coefficienti del polinomio trasformato può essere effettuato in modo molto semplice mediante il calcolo di opportune tabelle, la cui costruzione richiede esclusivamente operazioni di somma.

Se la trasformazione da operare è la Ω_0 , la prima riga della tabella è formata dai coefficienti del polinomio $\mathrm{V}(x)$ in ordine di indice decrescente:

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$.

Il primo elemento della seconda e di ogni altra riga successiva è a_n, ed ogni elemento della tabella è dato dalla somma dei due elementi che si trovano, rispettivamente, a sinistra e sopra nella tabella stessa.

Se, con notazione matriciale, denotiamo con $a_{i,j}$ l'elemento della tabella che si trova sulla i-esima riga e j-esima colonna, quanto detto può essere formalizzato mediante le:

$$\begin{cases} a_{0,j} = a_{n-j} & : 0 \le j \le n; \\ a_{i,0} = a_n & : 0 \le i \le n+1; \\ a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1} & : 1 \le i \le n\,;\, 1 \le j \le n \end{cases} .$$

I coefficienti del polinomio trasformato sono dati dagli elementi della diagonale:

$\{a_{n+1,0},\ a_{n,1}, a_{n-1,2}, \ldots, a_{2,n-1}, a_{1,n}\}$

ovvero dagli elementi $a_{i,j}$ della tabella tali che :

$i + j = n + 1\,,\ 0 \le i \le n + 1\,,\ 0 \ \le\ j \ \le\ n\,.$

Analoga procedura per la formazione della tabella relativa alla trasformazione Ω_1, con l'inversione però degli elementi della prima riga, ovvero si dispongono i coefficienti del polinomio in ordine di indice crescente:

$a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$.

La formalizzazione è data dalle:

$$\begin{cases} a_{0,j} = a_j & : 0 \leq j \leq n; \\ a_{i,0} = a_0 & : 0 \leq i \leq n+1; \\ a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1} & : 1 \leq i \leq n \; ; 1 \leq j \leq n \end{cases} .$$

I coefficienti del polinomio trasformato sono dati dagli elementi della stessa diagonale del caso precedente.

Per iterare quante si vogliono trasformazioni del tipo Ω_0 e/o Ω_1 basta prendere come prima riga della tabella i coefficienti del polinomio ottenuto mediante l'ultima trasformazione e disporli in ordine decrescente (rispetto alle potenze della x) se la trasformazione da eseguire è la Ω_0 o nell'ordine inverso se essa è la Ω_1 .

Molte proprietà consentono un'indagine abbreviata ed un risparmio nei calcoli atti a stabilire il numero di variazioni nella diagonale finale, e quindi delle radici.

Vedasi per questo [5] ed i lavori originali ivi citati.

3 – ILLUSTRAZIONE DEL PROGRAMMA.

Il programma è stato redatto in linguaggio Basic MS-DOS utilizzando un PC IBM.

I passi da 10 a 200 consentono, una volta immessi i dati, di scegliere tra le varie opzioni di programma che vengono illustrate sul video, così come i passi finali (1550-1700) consentono di proseguire con ulteriori analisi utilizzando il progetto già in memoria.

Nei passi 220-480 vengono generati tutti i numeri binari di un dato numero di cifre, oppure l'utente fornisce una ben precisa sequenza di "0" e "1", per rappresentare la sequenza di trasformazioni Ω_0 e Ω_1 che si intendono effettuare.

Le istruzioni fino alla riga 1020 consentono la stampa in video e su carta dei vari dati, compresi gli estremi dell'intervallo in cui si esamina la eventuale presenza di radici.

Nei successivi passi (fino alla riga 1540) viene effettuato il calcolo delle tabelle e presentata la loro diagonale, ovvero i coefficienti del polinomio trasformato, con indicazione del numero delle variazioni presenti in essa.

E' prevista un'opzione che arresta il programma quando i coefficienti del polinomio trasformato non presentano variazioni.

Sono infine inserite istruzioni per una evidenziazione nel video dei risultati mediante l'uso del colore.

4-LISTATO DEL PROGRAMMA.

```
10 REM VINCENT
```

```
20 PRINT "Quale grado ha il polinomio ?"
30 INPUT H
40 DIM A(H + 2, H + 1): DIM C(H): DIM M(H): DIM G(H)
50 PRINT "Dare i coefficienti partendo dal termine noto."
60 FOR I = 0 TO H
70 PRINT "Coefficiente di x alla";I
80 INPUT C(I)
90 NEXT I
100 PRINT "Vuoi fare un esame completo di tutte le possibili composizioni, o solo di una particolare sequenza ?"
110 PRINT "Premi, tra virgolette, T per l'esame completo, e P per una particolare sequenza."
120 INPUT S$
130 PRINT "Quante sono le trasformazioni da comporre ?"
140 INPUT L: DIM X(L)
150 PRINT "Vuoi una stampa completa dei dati o solo di quelli significativi?"
160 PRINT "Premi, tra virgolette, N se vuoi solo i significativi."
170 INPUT N$
180 PRINT "Vuoi che il programma si arresti quando il trasformato non presenta variazioni ? Premi C per l'esecuzione completa."
190 INPUT C$
200 IF S$ = "P" THEN GOTO 440
210 G1 = 2: DIM V1$(2): X$ = "1": Y$ = "0"
220 LET V1$(1) = "1": V1$(2) = "0"
230 IF L = 1 THEN GOTO 490
240 FOR I = 2 TO L
250 LET G1 = 2^I: G2 = G1/2
260 DIM W1$(G1): DIM W2$(G1)
270 FOR J = 1 TO G2
280 LET W1$(J) = V1$(J) + X$
290 NEXT J
300 FOR J = G2 + 1 TO G1
310 LET W1$(J) = V1$(J – G2) + Y$
320 NEXT J
330 FOR J = 1 TO G1
340 LET W2$(J) = W1$(J)
350 NEXT J
360 ERASE W1$: ERASE V1$
370 DIM V1$(G1)
380 FOR J = 1 TO G1
390 LET V1$(J) = W2$(J)
```

```
400 NEXT J
410 ERASE W2$
420 NEXT I: PRINT: LPRINT
430 GOTO 490
440 PRINT "Dare nell'ordine le";L;"trasformazioni."
450 FOR I = 1 TO L
460 INPUT X(I)
470 NEXT I
480 GOTO 560
490 FOR E = 1 TO G1
500 DIM Q$(L)
510 FOR J = 1 TO L
520 LET Q$(J) = MID$(V1$(E), J, 1)
530 LET X(J) = VAL(Q$(J))
540 NEXT J
550 ERASE Q$
560 IF T = 1 THEN GOTO 590
570 LET N1 = 0: N2 = 1: D1 = 1: D2 = 0: Z = 0
580 LET I1 = 0: I2 = 1: J1 = 1: J2 = 0
590 FOR I = 1 TO L
600 COLOR 4, 8: PRINT X(I);
610 LPRINT CHR$(14);X(I);
620 NEXT I
630 LPRINT CHR$(20);: COLOR 2, 8
640 PRINT: PRINT: LPRINT: LPRINT
650 FOR I = 0 TO H
660 PRINT C(I);: LPRINT C(I);
670 NEXT I
680 COLOR 4, 8: PRINT: LPRINT
690 FOR I = 0 TO H
700 LET M(I) = C(I)
710 NEXT I
720 FOR Y = 1 TO L
730 LET N1 = I1 + I2: D1 = J1 + J2
740 LET Z = Z + X(Y): DIM K(H + 1)
750 IF X(Y) = 1 THEN GOTO 810
760 LET N2 = I2: D2 = J2
770 FOR I = 0 TO H
780 LET K(I) = M(H - I)
790 NEXT I
```

```
800 GOTO 850
810 LET N2 = I1: D2 = J1
820 FOR I = 0 TO H
830 LET K(I) = M(I)
840 NEXT I
850 FOR I = 0 TO H
860 COLOR 4, 8: PRINT K(I);
870 NEXT I
880 IF N$ = "N" THEN GOTO 930
890 FOR I = 0 TO H
900 LPRINT K(I);
910 NEXT I
920 PRINT: LPRINT
930 COLOR 2, 8: PRINT: LPRINT
940 IF ( – 1)^Z > 0 THEN GOTO 980
950 PRINT N2;"/";D2;" – ";N1;"/";D1
960 LPRINT CHR$(27);CHR$(69);N2;"/";D2;" – ";N1;"/";D1
970 GOTO 1000
980 PRINT N1;"/";D1;" – ";N2;"/";D2
990 LPRINT CHR$(27);CHR$(69);N1;"/";D1;" – ";N2;"/";D2
1000 LPRINT CHR$(27);CHR$(70);: COLOR 7, 0
1010 FOR R = 0 TO H + 1
1020 LET A(R, 0) = K(0)
1030 NEXT R
1040 FOR S = 1 TO H
1050 LET A(0, S) = K(S)
1060 NEXT S
1070 FOR R = 1 TO H + 1
1080 FOR S = 1 TO H – R + 1
1090 LET A(R, S) = A(R – 1, S) + A(R, S – 1)
1100 NEXT S: NEXT R: ERASE K
1110 FOR R = 0 TO H + 1
1120 FOR S = 0 TO H – R + 1
1130 PRINT TAB(7*S + 1) A(R, S);
1140 NEXT S: PRINT
1150 NEXT R
1160 IF N$ = "N" THEN GOTO 1220
1170 FOR R = 0 TO H + 1
1180 FOR S = 0 TO H – R + 1
1190 LPRINT TAB(7*S + 2) A(R, S);
```

```
1200 NEXT S: LPRINT
1210 NEXT R
1220 FOR I = 0 TO H
1230 LET M(I) = A(H - I + 1, I)
1240 COLOR 2, 8: PRINT M(I);
1250 LPRINT CHR$(27);CHR$(69);M(I);
1260 NEXT I: PRINT
1270 LPRINT CHR$(27);CHR$(70);: LPRINT
1280 IF C$ = "C" THEN GOTO 1460
1290 FOR I = 0 TO H
1300 LET G(I) = M(I)
1310 NEXT I
1320 FOR I = 0 TO H - 1
1330 FOR J = I + 1 TO H
1340 IF G(I) < > 0 THEN GOTO 1360
1350 SWAP G(J), G(I)
1360 NEXT J: NEXT I: D = 0
1370 FOR I = 0 TO H - 1
1380 IF SGN(G(I)*G(I + 1)) = - 1 THEN LET D = D + 1
1390 NEXT I
1400 PRINT D;"Variazioni": PRINT
1410 LPRINT D;"Variazioni": LPRINT
1420 IF D > 0 THEN GOTO 1460
1430 PRINT "Nessuna Variazione"
1440 IF S$ = "T" THEN GOTO 1480
1450 IF C$ < > "C" THEN ERASE X: GOTO 1530
1460 LET I1 = N1: I2 = N2: J1 = D1: J2 = D2
1470 COLOR 7, 0: NEXT Y
1480 PRINT: LPRINT
1490 ERASE X
1500 IF S$ = "P" THEN GOTO 1530
1510 NEXT E
1520 ERASE V1$
1530 COLOR 7, 0
1540 PRINT "Vuoi usare lo stesso polinomio iniziale ?"
1550 FOR I = 0 TO H: PRINT C(I);: NEXT I: PRINT
1560 PRINT "Premi, tra virgolette, S per SI e N per NO"
1570 INPUT R$: LET T = 0
1580 IF R$ = "S" THEN PRINT: LPRINT: GOTO 100
1590 PRINT "Vuoi usare l'ultimo polinomio ottenuto ?"
```

```
1600 FOR I = 0 TO H: PRINT M(I);: NEXT I: PRINT
1610 PRINT "Premi, tra virgolette, S per SI e N per NO"
1620 INPUT B$
1630 IF B$ = "N" THEN GOTO 1690
1640 FOR I = 0 TO H
1650 LET C(I) = M(I)
1660 NEXT I
1670 LET T = 1
1680 GOTO 100
1690 PRINT "Premi F2 per continuare."
1700 PRINT: LPRINT: END
```

5 – ALTRE TRASFORMAZIONI.

Scelto $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 1$, possiamo operare nella

$$\mathrm{V}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = 0$$

anzitutto i due seguenti cambiamenti di variabile:

$\Omega_\sigma^\infty \quad : x_0 = \sigma + x_1$ e/o

$\Omega_0^{\frac{1}{\sigma}} \quad : x_0 = \dfrac{1}{\sigma + x_1}$

avendo al solito posto $x_0 = x$.

Le radici positive del polinomio ottenuto mediante la trasformazione Ω_σ^∞ corrispondono a radici di $\mathrm{V}(x)$ maggiori di σ, mentre quelle del polinomio ottenuto mediante la $\Omega_0^{\frac{1}{\sigma}}$ a radici di $\mathrm{V}(x)$ comprese tra 0 e $\dfrac{1}{\sigma}$.

Come fatto per le precedenti trasformazioni Ω_0 e Ω_1, formalizzando, avremo:

$x = x_0 \simeq (0, 1; 1, 0)$

$\Omega_\sigma^\infty \quad : x_0 = \sigma + x_1 \simeq (\sigma, 1; 1, 0)$

$\Omega_0^{\frac{1}{\sigma}} \quad : x_0 = \dfrac{1}{\sigma + x_1} \simeq (1, \sigma; 0, 1)$.

ed inoltre si ha che :

$\Omega_\sigma^\infty \, [(\alpha, \gamma\,; \beta, \delta)] \simeq (\alpha + \beta \cdot \sigma, \gamma + \delta \cdot \sigma; \beta, \delta)$, e

$\Omega_0^{\frac{1}{\sigma}} \, [(\alpha, \gamma\,; \beta, \delta)] \simeq (\alpha \cdot \sigma + \beta, \gamma \cdot \sigma + \delta; \alpha, \gamma)$.

I coefficienti del polinomio trasformato possono essere calcolati utilizzando tabelle simili, nella loro realizzazione, alle precedenti.

Se la trasformazione da operare è la Ω_σ^∞, i coefficienti del trasformato sono gli elementi $c_{i,j}$, con $i + j = n + 1$, della diagonale della tabella data da:

$$\begin{cases} c_{0,j} = a_{n-j} & : 0 \leq j \leq n; \\ c_{i,0} = a_n & : 0 \leq i \leq n+1; \\ c_{i,j} = c_{i-1,j} + \sigma \cdot c_{i,j-1} & : 1 \leq i \leq n \, ; 1 \leq j \leq n \end{cases} .$$

Per la trasformazione $\Omega_0^{\frac{1}{\sigma}}$ avremo invece:

$$\begin{cases} c_{0,j} = a_j & : 0 \leq j \leq n; \\ c_{i,0} = a_0 & : 0 \leq i \leq n+1; \\ c_{i,j} = c_{i-1,j} + \sigma \cdot c_{i,j-1} & : 1 \leq i \leq n \, ; 1 \leq j \leq n \end{cases} .$$

6 – FORMA MATRICIALE DELLE TRASFORMAZIONI.

Proseguendo quanto fatto in [9], possiamo operare sul polinomio $\mathrm{V}(x)$ una qualunque sequenza di trasformazioni Ω_0 e/o Ω_1 usando gli strumenti del calcolo matriciale.

Sia $\mathbb{A}_{n+1,1}$ la matrice trasposta del vettore $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$.

Consideriamo la matrice $\Theta^1_{n+1,n+1} = \Theta^1 = \{\alpha_{i,j}\}$, dove

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{per } i > n-j \\ \binom{n-j}{n-i-j} & \text{per } i \leq n-j \end{cases} \ , \ 0 \leq i \leq n \, ; 0 \leq j \leq n \ .$$

E' facile vedere come gli elementi del vettore $[(n+1) \cdot 1]$ risultante dal prodotto $\Theta^1 \cdot \mathbb{A}$ altro non siano se non i coefficienti del polinomio $\mathrm{V}(x)$ trasformato mediante la Ω_1.

Similmente, consideriamo la matrice $\Theta^0_{n+1,n+1} = \Theta^0 = \{\beta_{i,j}\}$, dove:

$\beta_{i,j} = \alpha_{i,n-j} \ : \ 0 \leq i \leq n \, ; 0 \leq j \leq n$.

Gli elementi del vettore $[(n+1) \cdot 1]$ risultante dal prodotto $\Theta^0 \cdot \mathbb{A}$ sono i coefficienti del polinomio $\mathrm{V}(x)$ trasformato mediante la Ω_0.

Qualunque composizione di k trasformazioni Ω_0 e/o Ω_1 può quindi esprimersi in forma di prodotto matriciale come:

$\Phi_k \cdot (\Phi_{k-1} \cdot (... \cdot (\Phi_1 \cdot \mathbb{A})))$

dove

$$\Phi_i = \begin{cases} \Theta^1 & \text{se } i = 1 \\ \Theta^0 & \text{se } i = 0 \end{cases} : \ 1 \leq i \leq k \, .$$

Anche le trasformazioni Ω^∞_σ e $\Omega_0^{\frac{1}{\sigma}}$ possono essere effettuate mediante il prodotto di una opportuna matrice per il vettore $\mathbb{A}$.

A tale scopo basta definire le due matrici :

$\mathfrak{M}^1 : \{\gamma_{i,j}\}$, con $\gamma_{i,j} = \sigma^{i-j} \cdot \alpha_{i,j}$ e

$\mathfrak{M}^0 : \{\delta_{i,j}\}$, con $\delta_{i,j} = \sigma^{i+j-n} \cdot \beta_{i,j}$,

$0 \leq i \leq n \, ; 0 \leq j \leq n$,

dove $\alpha_{i,j}$ e $\beta_{i,j}$ sono ancora gli elementi delle matrici Θ^1 e Θ^0 , per ottenere procedure simili alle precedenti .

BIBLIOGRAFIA

[1] Fisher Lawrence
"An Algorithm for finding exact Rates of Return" .
Journal of Business
Anno 1966, vol. 39, pp. 111-118 .

[2] Herbst Anthony F.
"A Fortran IV procedure for determining Return on Invested Capital" .
Management Science
Anno 1974, vol. 20, pp. 1022 .

[3] Kaplan Seymour
"Computer Algorithms for finding exact Rates of Return" .
Journal of Business
Anno 1967, vol. 40, pp. 389-392 .

[4] Lazzar Francesco
"Condizioni Sufficienti per l'Unicità del Tasso Interno di Rendimento" .
Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari
Luglio - Dicembre 1980, vol. 43, pp. 81-104 .

[5] Lonzi Marco
"Aspetti matematici nella ricerca di condizioni di unicità per il Tasso Interno di Rendimento" .
Rivista di Matematica applicata alle Scienze Economiche e Sociali
Anno 1986.

[6] Magnani Umberto
"Sul Criterio T.R.M. per la scelta di progetti" .
Atti del Convegno sulle applicazioni della Matematica alla Ricerca Operativa ed alle Scienze Attuariali, a cura dell'Istituto di Statistica, Salerno
Ottobre 1972.

[7] Panton Don B. e Verdini William A.
"A Fortran IV Program for applying Sturm's Theorem in counting Internal Rates of Return" .

Journal of Financial and Quantitative Analysis
anno 1981, vol. 16, pp. 381-388 .

[8] Pistoia Angelo e Forte E.
"Personal computers e valutazioni finanziarie" .
Nota inviata al Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari
Anno 1983 .

[9] Roony Robert F.
"Descartes Rule and multiple I.R.R. " .
Western Economist Journal
Giugno 1973, pp. 241 .

[10] Uspensky J. V.
Theory of Equations
Mc Graw-Hill, New York
Anno 1948 .