

Unicità del T.I.R. e Interessi
Cumulati: un Commento

Quaderno n. 36
Istituto di Matematica
Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie
Università degli Studi
Siena

SUMMARY : In riferimento agli Articoli [2], [3] e [10], apparsi sulla Rivista Economie et Societ , di E. M. Bezza e M. Jegers concernenti l'utilizzazione del concetto degli Interessi cumulati al fine di ottenere l'unicit  del Tasso Interno di Rendimento (T.I.R.) di un dato progetto, si stabiliscono criteri di dominanza tra la condizione fornita da E. M. Bezza ed altre a suo tempo presentate in letteratura, al fine di una chiarificazione e dei concetti e delle procedure adottate dai vari Autori .

Si illustra in modo generale la procedura a cui sono riconducibili queste come gran parte delle condizioni sufficienti di unicit  del T.I.R. oggi note e si ribadisce anche la validit  di una condizione non solo di unicit  ma anche di significativit  economica a cui il Tasso Interno di Rendimento deve soddisfare per poter fornire un criterio di valutazione coerente e privo di ambiguit .

La versione in francese di questo Articolo   stata pubblicata sulla Rivista Economie et Societ , n.7 - anno 1988 .

1 – INTRODUZIONE

Molti Autori si sono negli anni occupati della ricerca di sempre più ampie condizioni sufficienti a garantire l'unicità del T.I.R. di un dato progetto, con cash-flows assegnati:

$F_0, F_1, \dots, F_n$
problema facilmente riconducibile a quello della ricerca delle radici dell'equazione:

$$(1) \sum_{t=0}^n F_t \cdot (1+r)^{n-t} = 0 \text{ , sotto le condizioni}$$

$$(2) F_0 < 0 \text{ e } \sum_{t=0}^n F_t > 0 \text{ ,}$$

condizioni queste sufficienti a garantire la presenza di almeno una soluzione positiva per l'equazione considerata.

Lo scopo di questa nota è quello di far vedere come la condizione fornita da E. M. Bezza in [2] sia dominata dalla condizione di unicità, sempre per T.I.R. positivi, fornita da R. Bernhard in [1], e quindi costituisca solo una condizione sufficiente a soddisfare un'altra condizione sufficiente, già nota in letteratura.

Il metodo di analisi che ci permetterà di raggiungere rapidamente il nostro scopo è quello fornito dal cosiddetto Teorema di Vincent (vedi [18]), che qui ci limitiamo brevemente a richiamare .

2 – IL TEOREMA DI VINCENT

Questo Teorema può essere così formulato:

– Sia dato il polinomio di grado n nell'incognita x :

$$(3) \sum_{i=0}^n F_i \cdot x^{n-i} .$$

Se esso ammette solo radici distinte, allora, dopo un numero finito di trasformazioni sulla incognita x del tipo :

$$x_{i+1} = c_i + \frac{1}{x_i} \text{ , con } x_0 = x \text{ , con } c_i \in \mathbb{Z} \text{ ,}$$

si perviene ad una equazione trasformata i cui coefficienti presentano al più una variazione.

Da questo Teorema possiamo ricavare un metodo di indagine per la ricerca del numero delle soluzioni positive della (3) nonchè per la determinazione di un intervallo in cui ogni radice è contenuta .

Consideriamo anzitutto le due sostituzioni :

$$\Omega_0 : x = x_0 = 1 + x_1 \quad \text{e}$$

$$\Omega_1 : x = x_0 = \frac{1}{1 + x_1} .$$

Se il polinomio ottenuto mediante la prima sostituzione presenta nessuna o una sola variazione nei coefficienti della nuova incognita x_1 , allora per il polinomio (3) ci saranno nessuna o una sola soluzione x nell'intervallo $x : 1 < x < +\infty$; similmente, se i coefficienti del polinomio ottenuto mediante la seconda trasformazione presentano nessuna o una sola variazione, ci sarà un ugual numero di soluzioni per il polinomio (3) nell'intervallo $x : 0 < x < 1$.

Se una trasformazione conduce ad un polinomio con un numero di variazioni maggiore od uguale a due, in base alla Regola dei Segni di Cartesio, non siamo ancora in grado di trarre una conclusione definitiva .

In questo caso si può proseguire componendo, mediante uno schema ripetitivo ad albero, in tutti i possibili modi, quante si vogliano trasformazioni del tipo Ω_0 e Ω_1 .

Componendo, ad esempio, due trasformazioni, si presentano le seguenti quattro possibilità :

$$\Omega_{11} : x = \frac{1 + x_2}{2 + x_2} ;$$

$$\Omega_{01} : x = \frac{1}{2 + x_2} ;$$

$$\Omega_{10} : x = \frac{2 + x_2}{1 + x_2} ;$$

$$\Omega_{00} : x = 2 + x_2 ;$$

mediante le quali, per $0 < x_2 < +\infty$, in base al numero delle variazioni nei coefficienti dei polinomi ottenuti con queste trasformazioni, potremo avere indicazioni sulla presenza di radici positive del polinomio (3), rispettivamente, negli intervalli:

$$\frac{1}{2} < x < 1 \quad ; \quad 0 < x < \frac{1}{2} \quad ; \quad 1 < x < 2 \quad \text{e} \quad 2 < x < +\infty .$$

Se il polinomio (3) non ha soluzioni multiple, comunque, per il Teorema di Vincent, dopo un numero finito di queste trasformazioni, otterremo dei polinomi trasformati i cui coefficienti presentano al più una variazione .

Come detto da vari Autori (vedere ad esempio [9], [11] e [14]), la laboriosità dei calcoli necessari ad eseguire le varie trasformazioni è fortemente diminuita dal calcolo di particolari tabelle, per realizzare le quali si richiedono solamente addizioni.

Se la trasformazione da operare è la Ω_0 , la prima riga della tabella è data dai coefficienti del polinomio, in ordine di indice crescente:

$$F_0, F_1, F_2, \dots, F_{n-1}, F_n.$$

Il primo elemento della seconda e di ogni altra riga successiva è F_0 , ed ogni elemento della tabella si ottiene mediante la somma dei due elementi che gli stanno, rispettivamente, a sinistra e sopra nella tabella.

Se, con notazione matriciale, denotiamo con $A_{i,j}$ l'elemento della tabella situato sulla i -esima riga e j -esima colonna, possiamo formalizzare quanto precedentemente detto nel seguente modo:

$$\begin{cases} A_{0,j} = F_j & : 0 \leq j \leq n; \\ A_{i,0} = F_0 & : 0 \leq i \leq n+1; \\ A_{i,j} = A_{i-1,j} + A_{i,j-1} & : 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

I coefficienti del polinomio trasformato sono dati dagli elementi della diagonale :

$$\{A_{n+1,0}, A_{n,1}, A_{n-1,2}, \dots, A_{2,n-1}, A_{1,n}\}$$

ovvero dagli elementi $A_{i,j}$ per cui $i+j = n+1$, $0 \leq i \leq n+1$, $0 \leq j \leq n$.

Similmente per la trasformazione Ω_1 , invertendo però gli elementi della prima riga, ovvero disponendo in essa i coefficienti del polinomio (3) in ordine di indice decrescente :

$$F_n, F_{n-1}, \dots, F_1, F_0.$$

In questo secondo caso il procedimento può essere formalizzato mediante le :

$$\begin{cases} A_{0,j} = F_{n-j} & : 0 \leq j \leq n; \\ A_{i,0} = F_n & : 0 \leq i \leq n+1; \\ A_{i,j} = A_{i-1,j} + A_{i,j-1} & : 0 \leq i \leq n; 0 \leq j \leq n. \end{cases}$$

I coefficienti del polinomio trasformato sono ancora dati dagli elementi $A_{i,j}$ della diagonale tali che $i+j = n+1$, $0 \leq i \leq n+1$, $0 \leq j \leq n$.

Per iterare quante si vogliono trasformazioni del tipo Ω_0 e/o Ω_1 basta prendere come prima riga della tabella i coefficienti del polinomio ottenuto mediante l'ultima trasformazione e disporli in ordine crescente se la trasformazione da eseguire è la Ω_0 o nell'ordine inverso se essa è la Ω_1 .

4 – GENERALIZZAZIONE DELLA PROCEDURA

Come detto in [11] e [13] , il procedimento più generale di utilizzazione del Teorema di Vincent può essere opportunamente formalizzato.

Osserviamo anzitutto come ogni composizione di quante si vogliano trasformazioni (in numero, ad esempio, di k) Ω_0 e/o Ω_1 possa essere espressa nella forma:

$$x_0 = \frac{\alpha + \beta x_k}{\gamma + \delta x_k} , \text{ con } \alpha, \beta, \gamma \text{ e } \delta \text{ numeri naturali,}$$

che noi identifichiamo con la :

$$(\alpha, \gamma; \beta, \delta) \simeq \frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x} .$$

Avremo quindi che :

$$x = x_0 \simeq (0, 1; 1, 0)$$

$$\Omega_0 : x_0 = 1 + x_1 \simeq (1, 1; 1, 0)$$

$$\Omega_1 : x_0 = \frac{1}{1 + x_1} \simeq (1, 1; 0, 1)$$

ed inoltre :

$$\Omega_0 [(\alpha, \gamma; \beta, \delta)] \simeq (\alpha + \beta, \gamma + \delta; \beta, \delta) , \text{ e}$$

$$\Omega_1 [(\alpha, \gamma; \beta, \delta)] \simeq (\alpha + \beta, \gamma + \delta; \alpha, \gamma) .$$

Se, componendo un numero k qualsivoglia di trasformazioni Ω_0 e/o Ω_1 , abbiamo ottenuto la :

$$x_0 = \frac{\alpha + \beta x_k}{\gamma + \delta x_k} ,$$

calcolando i limiti, rispettivamente per $x_k \rightarrow 0^+$ e per $x_k \rightarrow +\infty$, della variabile x_0 , avremo l'intervallo :

$$(4) \quad \frac{\alpha}{\gamma} < x_0 < \frac{\beta}{\delta} \quad \text{oppure} \quad \frac{\beta}{\delta} < x_0 < \frac{\alpha}{\gamma} ,$$

a seconda che il numero delle trasformazioni Ω_1 operate sia pari o dispari, ed il numero di variazioni nella diagonale della tabella corrispondente sarà una limitazione superiore al numero delle radici del polinomio (3) in questo intervallo.

Tutti gli estremi degli intervalli che si ottengono seguendo questa procedura sono numeri razionali.

Se uno degli estremi è radice del polinomio trasformato, sia semplice che multipla, questo comporta l'annullamento di un numero di coefficienti della diagonale finale, a partire dal termine noto, pari alla molteplicità di detta radice.

Come detto anche in [9], [11] e [14], molte sono le proprietà di cui godono queste tabelle. Elenchiamo le principali :

P1 – Ogni riga ha un numero di variazioni di segno minore o uguale a quello della precedente;

P2 – Non occorre calcolare tutti gli elementi di una riga, basta arrestarsi a quello sulla diagonale;

P3 – Se gli elementi della i -esima riga, da $A_{i,0}$ fino ad $A_{i,n+1-i}$, non presentano variazioni, allora il numero delle variazioni degli elementi della diagonale coincide con quello della sequenza:

$$\{A_{i,n+1-i}; A_{i-1,n+2-i}; \dots; A_{2,n-1}; A_{1,n}\};$$

P4 – Considerando le variazioni di segno negli elementi che si trovano su di un cammino che parta da un qualunque elemento nella prima colonna e termini all'ultimo elemento della seconda riga, il loro numero è ancora una limitazione superiore al numero delle radici positive del polinomio. I cammini più utili, in vista di un risparmio nel numero dei calcoli, sono quelli costituiti da spostamenti orizzontali - da sinistra a destra - e diagonali - dal basso verso l'alto;

P5 – Considerando anche cammini come nella P4, se da un cammino ad un altro vi è un decremento nel numero delle variazioni di segno, questo è sempre per un numero pari. Incontrando cammini con una sola o nessuna variazione di segno, otteniamo delle limitazioni esatte al numero delle radici del polinomio. Questo però non è vero se il termine noto del polinomio è nullo. In questo caso il polinomio trasformato ammette tra le sue radici quella nulla, e le variazioni di segno, da un cammino ad un altro, possono diminuire anche di un numero dispari, per cui, se in un cammino avessimo una sola variazione di segno, non è detto che questo fornisca una indicazione esatta del numero delle radici.

5 – APPLICAZIONI

Esplicitamente o implicitamente, la maggior parte degli Autori che hanno formulato condizioni sufficienti per l'unicità del T.I.R. hanno attinto a questa procedura che consente, mediante la composizione di quante trasformazioni si vogliano, ed imponendo poi condizioni sugli elementi di un qualunque cammino in una qualunque tabella, di formulare un numero pressochè illimitato di condizioni sufficienti per l'unicità del T.I.R. .

Per un lungo, anche se non completo, elenco di questi lavori, si veda [11] .

Non appartiene invece a questo filone, tra le altre, la condizione di Soper [15] , che riprenderemo nel seguito .

Componendo k trasformazioni Ω_0 e/o Ω_1 , otterremo 2^k polinomi, le soluzioni positive di ciascuno dei quali sono le soluzioni positive del polinomio (3) in uno dei 2^k intervalli in cui viene suddiviso il semiasse reale positivo, ottenibili mediante le (4).

Basta imporre condizioni che garantiscano una sola variazione di segno nella diagonale finale di una sola delle 2^k tabelle e nessuna variazione in tutte le rimanenti per avere una condizione sufficiente per un T.I.R. positivo ed unico .

6 – RELAZIONE TRA LA CONDIZIONE DI R. BERNHARDE QUELLA DI
E. M. BEZZA

Nell'articolo [1] R. Bernhard definisce le quantità :

$$B_t = \sum_{i=0}^t \binom{n-i}{t-i} \cdot F_i, \quad 0 \leq t \leq n,$$

e dimostra che se queste presentano una sola variazione di segno, allora il polinomio (1) ammette una sola radice r positiva.

I coefficienti B_t altro non sono se non la nuova espressione del polinomio (1), ottenuta dopo aver effettuato il calcolo delle potenze $(1+r)^{n-i}$.

Essi possono essere considerati anche come il risultato di una trasformazione del tipo Ω_0 effettuata sul polinomio (1), prendendo come sua incognita il binomio $(1+r)$, e quindi coincidono con la diagonale finale della corrispondente tabella.

Faremo ora vedere come i coefficienti dei polinomi D_t che costituiscono gli Interessi cumulati di E. M. Bezza altro non siano se non gli elementi che formano le diagonali di questa tabella precedenti la diagonale finale, ovvero gli elementi $A_{t+1-h,h}$, fissato t , $t: 0 < t \leq n$, al variare di $h: 0 \leq h \leq t-1$.

Quindi, se essi sono tutti negativi, e se la cumulata dei flussi di cassa, come supposto nelle (2), è positiva, la diagonale finale, per le proprietà P1 e P4, presenterà una sola variazione di segno ed il polinomio (1) avrà allora una sola soluzione $r: 1 < 1+r < +\infty$, ovvero una sola soluzione r positiva.

Abbiamo allora che :

$$\begin{aligned} D_t &= \sum_{i=0}^t F_i \cdot ((1+r)^{t-i} - 1) = \sum_{i=0}^t F_i \cdot (1+r)^{t-i} - \sum_{i=0}^t F_i = \\ &= \sum_{i=0}^t F_i \cdot \sum_{k=0}^{t-i} \binom{k}{t-i} \cdot r^k - \sum_{i=0}^t F_i = \sum_{i=0}^t \sum_{k=0}^{t-i} \binom{k}{t-i} \cdot F_i \cdot r^k - \sum_{i=0}^t F_i = \\ &= \sum_{k=0}^t \sum_{i=0}^{t-k} \binom{t-i}{k} \cdot F_i \cdot r^k - \sum_{i=0}^t F_i, \end{aligned}$$

dalla quale, isolando nella prima sommatoria il valore $k=0$, otteniamo :

$$D_t = \sum_{k=1}^t \sum_{i=0}^{t-k} \binom{t-i}{k} \cdot F_i \cdot r^k + \sum_{i=0}^t \binom{t-i}{0} \cdot F_i \cdot r^0 - \sum_{i=0}^t F_i,$$

e quindi :

$$(5) \quad D_t = \sum_{k=1}^t \sum_{i=0}^{t-k} \binom{t-i}{k} \cdot F_i \cdot r^k.$$

Facciamo ora vedere che :

$$(6) \quad D_t = \sum_{h=0}^{t-1} A_{t+1-h,h} \cdot r^{t-h}, \quad 0 \leq t \leq n.$$

Dato che, come detto in [4],

$$A_{i,j} = \sum_{k=0}^j \binom{i+j-k-1}{j-k} \cdot F_k,$$

sostituendo, avremo :

$$A_{t+1-h,h} = \sum_{i=0}^h \binom{t-i}{h-i} \cdot F_i,$$

da cui, sostituendo nella (5), si ha :

$$D_t = \sum_{h=0}^{t-1} \sum_{i=0}^h \binom{t-i}{h-i} \cdot F_i \cdot r^{t-h}$$

e ponendo $t-h=k$, otteniamo:

$$D_t = \sum_{k=1}^t \sum_{i=0}^{t-k} \binom{t-i}{k} \cdot F_i \cdot r^k,$$

ovvero la (6), e l'uguaglianza è dimostrata .

La condizione fornita da E. M. Bezza è quindi meno generale di quella di R. Bernhard, ed ovviamente è solo sufficiente, e non necessaria, come già detto in [3], per l'unicità del T.I.R. positivo .

7 – LA CONDIZIONE DI SOPER

Assicurata al polinomio (1), nell'incognita $(1+r)$, l'esistenza di almeno una radice $1+r > 0$ ovvero $r > -1$, mediante le condizioni (2), detta r_0 questa radice, siano :

$$(7) \quad S_t(r_0) = \sum_{i=0}^t F_i \cdot (1+r_0)^{t-i} \leq 0, \quad \forall t: 0 \leq t \leq n-1.$$

Allora, per quanto ipotizzato, $S_n(r_0) = 0$, e la radice r_0 è unica.

La dimostrazione di questa condizione è matematicamente molto semplice.

Posto, nella (1), $1+r=x$, otteniamo il polinomio (3), e posto $1+r_0=x_0$, se dividiamo il polinomio (3) per $x-x_0$, le quantità (7) altro non sono se non i coefficienti

del polinomio quoziente, e dato che questo non presenta variazioni di segno, per la Regola dei segni di Cartesio ne discende che la radice r_0 è unica .

Come detto, tra gli altri, in [5], [6], [7], [16] e [17], alle quantità (7) può essere data anche una chiara interpretazione economica, rappresentando esse i saldi del progetto alla fine di ogni periodo.

Riproponendo quanto detto in [6] e [7], questo permette di esprimere il progetto $(F_0, F_1, \dots, F_n)$ in uno ed in un solo modo, se valgono le (7), come una successione di n operazioni uniperiodali consecutive $(B_{t,t-1}, B_{t,t})$, $1 \leq t \leq n$, tali che :

$$B_{t,t} = - (1 + r_0) \cdot B_{t,t-1} ,$$

$$B_{1,0} = F_0 ,$$

$$B_{t,t} + B_{t+1,t} = F_t ,$$

$$B_{n,n} = F_n ,$$

se e solo se r_0 è un T.I.R. del progetto.

Si ha poi che :

$$B_{t+1,t} = \sum_{i=0}^t F_i \cdot (1 + r_0)^{t-i} \quad \text{e}$$

$$B_{t+1,t+1} = - (1 + r_0) \cdot B_{t+1,t} .$$

Ma si dimostra, vedi [8], che :

$$B_{t+1,t} = S_t(r_0) \quad \text{e che}$$

$$B_{t+1,t+1} = - (1 + r_0) \cdot S_t(r_0)$$

per cui $B_{n,n} = F_n$ implica $S_n(r_0) = 0$, ovvero la (1) .

Ovvero, vedi anche [7], il T.I.R. è un tasso d'interesse applicato uniformemente ad operazioni uniperiodali consecutive nelle quali il progetto può essere scomposto in maniera univoca.

Riprendendo il classico tema della significatività economica del T.I.R., secondo quanto detto in [6] e [7], ci sembra opportuno ribadire come, se sono soddisfatte le condizioni (7), in ognuna delle operazioni uniperiodali $(B_{t,t-1}, B_{t,t})$ il T.I.R. r_0 abbia sempre il significato di tasso d'investimento e mai di finanziamento, escludendo così la possibilità di una sua duplice natura e quindi di un suo uso ambiguo.

Concordando con quanto detto in [6] e [7], è opportuno riaffermare come il T.I.R. possa essere usato senza ambiguità non quando è unico, ma solo quando, usando la terminologia del T.R.M. ([7], [16] e [17]), al dato tasso r_0 , esso è puro (per cui è anche unico) .

La classe dei progetti per i quali il criterio del T.I.R. è valido ed economicamente significativo è allora solo un sottoinsieme della classe dei progetti a T.I.R. unico .

BIBLIOGRAFIA

[1] – Bernhard Richard H.

"A More General Sufficient Condition for a Unique Internal Rate of Return"

Journal of Financial and Quantitative Analysis

Giugno 1979, vol. 14, pp. 337-341 .

[2] – Bezza El Mostafa

"Le Concept d'Interets Cumules: un Algorithme pour Depasser le Probleme de Multiplicitè des T.I.R."

Economies et Societes

Anno 1984, 18, 11-12.

[3] – Bezza El Mostafa

"Le Concept d'Interets Cumules : Reponse a M. Jegers"

Economies et Societes

Dicembre 1986 .

[4] – De Faro Clovis

"A Sufficient Condition for a Unique Non-negative Internal Rate of Return : Further Comment"

Journal of Financial and Quantitative Analysis

Settembre 1978, vol.13, pp. 577-584 .

[5] – Gronchi Sandro

"Sui Criteri d'Investimento Basati sul Tasso Interno di Rendimento"

Note Economiche del Monte dei Paschi di Siena

Anno 1984, n. 4, pp. 64-75 .

[6] – Gronchi Sandro

"Tasso Interno di Rendimento e Valutazione dei Progetti : una Analisi Teorica"

Collana dell'Istituto di Economia della Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie dell'Università degli Studi di Siena

Anno 1984 .

[7] – Gronchi Sandro

"On Investment Criteria Based on the Internal Rate of Return"

Oxford Economic Papers

Anno 1986, vol. 38, n.1, pp. 1-7 .

[8] – Gronchi Sandro - Lonzi Marco

"Sulla Concordanza di Alcuni Contributi in Tema di Tasso Interno di Rendimento"

Note Economiche del Monte dei Paschi di Siena

Anno 1985, n. 5/6, pp. 139-142 .

[9] – Hammond John S. III - Pratt John W.

"Evaluating and Comparing Projects : Simple Detection of False Alarms"

The Journal of Finance

Dicembre 1979, vol. 34, pp. 1231-1242 .

[10] – Jegers Marc

"Le Concept d'Interets Cumules: Necessaire ou Suffisant ? "

Economies et Societes

Dicembre 1986 .

[11] – Lonzi Marco

"Aspetti Matematici nella Ricerca di Condizioni di Unicità per il Tasso Interno di Rendimento"

Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali

Anno 1986 .

[12] – Lonzi Marco

"Significatività Economica del Tasso Interno di Rendimento mediante il Valore Attuale di un Progetto e dei suoi Sottoprogetti"

Note Economiche del Monte dei Paschi di Siena

Anno 1985, n. 5/6, pp. 143-157.

[13] – Lonzi Marco

"Unicità del Tasso Interno di Rendimento mediante il Computer"

Fascicolo n.35 dell'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie dell'Università degli Studi di Siena

Marzo 1986 .

[14] – Pratt John W.

"Finding How Many Roots a Polynomial has in $(0,1)$ or $(0, + \infty)$ "

American Mathematical Monthly

Ottobre 1979, vol. 86, pp. 630-648.

[15] – Soper C. S.

"The Marginal Efficiency of Capital: a Further Note"

The Economic Journal
Marzo 1959, vol. 69, pp. 174-177 .

[16] – Teichroew Daniel - Robicheck Alexander A. - Montalbano Michael
"Mathematical Analysis of Rates of Return Under Certainty"
Management Science
Gennaio 1965, vol. 11, pp. 395-403 .

[17] – Teichroew Daniel - Robicheck Alexander A. - Montalbano Michael
"An Analysis of Criteria for Investment and Financial Decisions under Certainty"
Management Science
Novembre 1965, vol. 12, pp. 151-179 .

[18] – Uspensky J. V.
Theory of Equations
McGraw-Hill, New York
Anno 1948 .