Sulla concordanza di alcuni contributi in tema di Tasso Interno di Rendimento

1. *Introduzione*

In alcuni recenti contributi ([2], [3] e [4]) S. Gronchi si è occupato del problema dell'unicità e della significatività economica del Tasso Interno di Rendimento. Il suo tentativo è consistito nel ridefinire il Tasso Interno in modo tale che esso esista e sia unico per ogni possibile progetto, ed abbia un chiaro significato di tasso d'interesse al quale vengono remunerati i fondi-capitali investiti.

Problemi analoghi erano stati precedentemente affrontati da Ramsey ([6]) e da Teichroew, Robichek e Montalbano ([7], [8]), ma i contributi di questi ultimi Autori, per quanto noti in ambito aziendalistico-finanziario, non risultano mai citati nella pur copiosa letteratura a carattere economico-politico [1].

Scopo di questa nota è di mostrare come il contributo di Gronchi e quello di Teichroew, Robichek e Montalbano conducano a risultati equivalenti dal punto di vista matematico, fermo restando il fatto che i due filoni di ricerca sono caratterizzati da diverse impostazioni concettuali e che i procedimenti dimostrativi usati sono tra loro profondamente diversi.

2. *Un Tasso Interno di Rendimento generalizzato*

Gronchi in [2] prende le mosse dalla nozione di vettore di tassi interno ad un progetto, introdotta da Bailey in [1] e ripresa da Hirshleifer in [5]. Se è possibile scomporre un progetto $A := (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ in « operazioni uniperiodali consecutive », o « progetti elementari » del tipo: (b^h_{h-1}, b^h_h), $1 \leqq h \leqq n$, tali che:

I) $b^1_0 = a_0$,

II) $b^h_h + b^{h+1}_h = a_h$, $1 \leqq h \leqq n-1$,

III) $b^n_n = a_n$,

IV) $b^h_h = -(1+r_h) \cdot b^h_{h-1}$, $1 \leqq h \leqq n$,

allora il vettore $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ viene definito da Bailey « interno » al progetto A. Naturalmente, se $b^h_{h-1} < 0$, (e quindi $b^h_h > 0$) il progetto ele-

[1] Questo spiega la mancata attenzione finora rivolta da Gronchi a tali contributi (vedi [4], pag. 121, nota 1).

mentare (b^h_{h-1}, b^h_h) è di investimento, o attivo, mentre se $b^h_{h-1} > 0$, (da cui $b^h_h < 0$) allora il progetto elementare è di finanziamento, o passivo. Se, infine, b^h_{h-1}, così come b^h_h, è nullo, il progetto elementare non è un progetto in senso proprio, ma piuttosto un intervallo temporale interposto fra due progetti elementari.

La generalizzazione del Tasso Interno di Rendimento operata consiste anzitutto nel ridurre il vettore di Bailey ad una coppia, imponendo ai tassi attivi di essere uguali tra loro, così come ai tassi passivi. I vincoli (IV) vengono perciò sostituiti dai seguenti:

$$\text{IVa)} \quad b^h_h = \begin{cases} -(1+r_-)\cdot b^h_{h-1} & \text{se } b^h_{h-1} > 0 \\ 0 & \text{se } b^h_{h-1} = 0 \\ -(1+r_+)\cdot b^h_{h-1} & \text{se } b^h_{h-1} < 0, \; 1 \leqq h \leqq n, \end{cases}$$

dove r_- è il tasso passivo ed r_+ quello attivo.

Dopo questa semplificazione, viene determinato l'insieme delle coppie (r_-, r_+) interne ad un dato progetto, pervenendo alla conclusione che tale insieme forma, nel piano r_-, r_+, una curva continua che assicura l'esprimibilità di r_+ in funzione di r_-. Se il progetto soddisfa la generalizzazione della condizione di Soper data in [3], la funzione è del tipo $r_+ = \text{cost.}$, mentre si tratta di una corrispondenza biunivoca negli altri casi. Il tasso r_+ di quella particolare coppia (r_-, r_+) in cui $r_- = i$, dove i è il tasso di mercato, viene assunto da Gronchi quale nuovo Tasso Interno di Rendimento, sulla base del quale sono riproponibili i criteri di accettazione-rigetto fondati sul Tasso Interno di Rendimento tradizionale.

3. *Lo schema T.R.M.*

Il criterio T.R.M., così detto dalle iniziali dei suoi Autori, ([7] e [8]), considera l'investitore come un intermediario tra il mercato ed il progetto; il progetto assorbe fondi ad un tasso r, e ne fornisce ad un tasso k.

Definiti i Saldi cumulati, ad un dato tasso i, all'istante h, $S_h(i)$, come:

$$S_0(i) = a_0 \,;\, S_h(i) = S_{h-1}(i)\cdot(1+i) + a_h \,;\, \ldots : 0 \leqq h \leqq n,$$

viene operata, nella classe di tutti i possibili progetti, la seguente distinzione in:

— Progetti di puro investimento, se $S_h(i) \leqq 0, \quad \forall h : 0 \leqq h \leqq n-1$;

— Progetti di puro finanziamento, se $S_h(i) \geqq 0, \quad \forall h : 0 \leqq h \leqq n-1$;

— Progetti misti, se almeno un Saldo $S_h(i)$ ha segno diverso dagli altri.

È importante sottolineare come questa distinzione valga per un dato tasso i. La generalizzazione della condizione di Soper data in [3] è riconducibile alla verifica dell'appartenenza alla classe dei progetti di puro investimento per un valore di i uguale al TIR.

Il Saldo finale di un progetto viene definito da:
$S(k, r) = S_n(k, r)$, ottenuto per ricorrenza dalle relazioni:

V) $S_0(k, r) = a_0$,

VI) $S_h(k, r) = \begin{cases} S_{h-1}(k, r) \cdot (1+r) + a_h & \text{se } S_{h-1}(k, r) \leqq 0, \\ S_{h-1}(k, r) \cdot (1+k) + a_h & \text{se } S_{h-1}(k, r) > 0. \end{cases}$

Gli Autori mostrano che, se $a_0 < 0$, esiste sempre un valore di r, r_{min}, tale che il progetto è di puro investimento $\forall r > r_{min}$, mentre esiste un valore di k, k_{min}, tale che il progetto è di puro finanziamento $\forall k > k_{min}$ se $a_0 > 0$.

L'analisi accettazione-rigetto del progetto viene effettuata sulla base della curva $S(k, r) = 0$, detta « curva di equilibrio » del progetto. Si dimostra che, in generale, questa è una curva continua e crescente, avente per asintoto orizzontale la retta $r = r_{min}$ se $a_0 < 0$ o la retta $k = k_{min}$ se $a_0 > 0$. Non viene, a nostro giudizio, sufficientemente chiarito, in [7], il caso in cui non esiste la curva $S(k, r) = 0$, riducendosi questa o alla retta $r = r^*$ o alla retta $k = k^*$ (a seconda che $a_0 < 0$ o $a_0 > 0$) con r^* o k^* TIR unici del progetto. In realtà questo accade quando il progetto soddisfa alla condizione di Soper, ovvero è « puro » per un valore di i uguale al TIR. Dove $S(k, r)$ è parzialmente derivabile (potendo non essere derivabile al massimo nei punti in cui almeno uno dei Saldi $S_h(i)$ è nullo), si ha che: $\dfrac{\partial S}{\partial k} > 0$ e $\dfrac{\partial S}{\partial r} < 0$.

Vengono infine definite implicitamente, dalla $S(k, r) = 0$, due funzioni: $r = r(k)$ e la sua inversa $k = k(r)$, mediante le quali l'originario criterio di scelta del T.R.M. dice accettabile un progetto ad un dato tasso di mercato i, se per $k = i$ la bisettrice $k = r$ giace al di sotto della curva $S(k, r) = 0$ ovvero si trova nella parte di piano in cui $S(k, r) > 0$.

4. *L'analogia fra i criteri*

L'analogia formale tra i criteri è data dalla coincidenza tra la curva $S(k, r) = 0$ del criterio T.R.M. e la curva delle coppie di tassi interne al progetto, su cui si basa la ridefinizione del Tasso Interno di Rendimento proposta da Gronchi. Si può infatti facilmente dimostrare che, posto $r_- = k$ ed $r_+ = r$, si ha:

$(b^{h+1}_h, b^{h+1}_{h+1}) = (S_h(i), -(1+i) \cdot S_h(i))$ e
$b^n_n = a_n \Longleftrightarrow S(k, r) = 0$.

SANDRO GRONCHI - MARCO LONZI

Università di Siena

BIBLIOGRAFIA

[1] M.J. BAILEY, « Formal Criteria for Investment Decisions », *Journal of Political Economy,* ottobre 1959, vol. 67, pp. 476-488.

[2] S. GRONCHI, « Un Tasso Interno di Rendimento generalizzato », *Economia Politica,* aprile 1985, anno II, n. 1, pp. 55-80.

[3] S. GRONCHI, « Sui Criteri d'Investimento basati sul Tasso Interno di Rendimento », *Note Economiche,* 1984, n. 4, pp. 64-75.

[4] S. GRONCHI, « Tasso Interno di Rendimento e valutazione dei Progetti: un'analisi teorica », Collana dell'Istituto di Economia, Siena, 1984.

[5] S. GRONCHI, « On Investment Criteria Based on the Internal Rate of Return », *Oxford Economic Papers,* 1986, vol. 38, n. 1, pp. 1-7.

[6] J. HIRSHLEIFER, *Investment, Interest and Capital,* Prentice Hall, Englewood Cliffs (N.J.), 1970.

[7] J.B. RAMSEY, « The Marginal Efficiency of Capital, the Internal Rate of Return, and Net Present Value: An Analysis of Investment Criteria », *Journal of Political Economy,* settembre-ottobre 1970, vol. 78, pp. 1017-1027.

[8] D. TEICHROEW - A. ROBICHEK - M. MONTALBANO, « Mathematical Analysis of Rates of Return under Certainty », *Management Science,* gennaio 1965, vol. 11, pp. 395-403.

[9] D. TEICHROEW - A. ROBICHEK - M. MONTALBANO, « An Analysis of Criteria for Investment and Financial Decisions under Certainty », *Management Science,* novembre 1965, vol. 12, pp. 151-179.