Significatività economica del Tasso Interno di Rendimento mediante il Valore Attuale di un progetto e dei suoi sottoprogetti

1. *Introduzione*

In un articolo apparso recentemente su questa Rivista, [13], relativo ai criteri di scelta degli investimenti basati sul Tasso Interno di Rendimento (TIR), è stato molto chiaramente evidenziato come l'unicità non sia l'unica caratteristica da dover richiedere al TIR di un dato progetto, in vista di un suo uso al fine decisionale di accoglibilità o rigetto del progetto stesso, ma come il valore del TIR debba inoltre soddisfare ad un'altra condizione, ricavata dall'Autore generalizzando la condizione fornita da Soper in [38], per poter assumere un chiaro significato economico che legittimi il conseguente criterio decisionale. Dagli ormai remoti tentativi di individuazione di classi sempre più ampie di progetti a TIR unico, vedi [22] e [23], (ricerca non sempre significativa per i motivi esposti in [13] e [19]) ad oggi, vari sono stati i tentativi di realizzare criteri decisionali di scelta coerenti ed economicamente significativi.

Scopo di questa nota, in primo luogo, è quello di evidenziare aspetti comuni e relazioni intercorrenti tra varie metodologie seguite, prendendo principalmente in considerazione quel filone che, utilizzando la funzione del Valore Attuale (D.P.V.), fornisce l'omonimo criterio e il criterio del Tasso interno di rendimento, ambedue poi « rivisti » alla luce del cosiddetto « criterio T.R.M. », ed infine quel filone di ricerca che comunemente passa sotto il nome di « Teorema del Troncamento » o « ipotesi di troncabilità dei progetti ». Infine, verrà dimostrato come i cosidetti progetti « puri nel T.I.R. » del criterio T.R.M., che sono anche quelli soddisfacenti alla condizione data in [13], costituiscono, nell'ottica del Teorema del Troncamento, una classe particolare, avendo essi un Valore Attuale che è massimo (o minimo) rispetto a quello di tutti i sottoprogetti del progetto stesso, proprietà questa che consente di formulare una condizione di unicità del TIR economicamente significativa equivalente a quella fornita in [13].

2. *Definizioni e notazioni*

Non essendo uniformi le definizioni incontrate nei vari articoli in letteratura, accoglieremo quelle più generali, specificandone, ove se ne presenti la necessità, aspetti particolari.

Definizione 1: Diremo progetto una successione di flussi di cassa netti: $a_0, a_1, \ldots, a_n$ che si rendono disponibili alle rispettive epoche 0, 1, ..., n, con $n \geqslant 1$ e tali che:

$$\begin{cases} a_0 \neq 0, \\ a_i \cdot a_j < 0, \text{ per almeno una coppia } i, j. \end{cases}$$

Usualmente, per semplicità, si suole assumere $a_0 < 0$ ed $a_n \neq 0$, ma nello schema T.R.M. non si pone la prima di queste condizioni, mentre non si pone la seconda nell'ipotesi del Teorema del Troncamento; ecco spiegato quindi il motivo della definizione di progetto qui accolta.

Definizione 2: Un progetto è detto semplice quando i suoi flussi di cassa non nulli hanno tutti segno diverso da a_0. Diremo poi il progetto semplice di investimento se $a_0 < 0$, di finanziamento se $a_0 > 0$.

Appartengono a questa categoria i progetti cosiddetti P.I.P.O. e P.I.C.O. nella classificazione data in [26].

Definizione 3: Un progetto è detto di investimento (di finanziamento) in senso stretto (o convenzionale) se i flussi di cassa negativi precedono quelli positivi (quelli positivi precedono quelli negativi). Questa è la classe dei progetti i cui flussi di cassa presentano una sola variazione; in essa ci sono i progetti classificati come C.I.C.O. in [26], e ad essa appartengono, ovviamente, i progetti semplici.

Definizione 4: Dati n flussi di cassa positivi $b_1, b_2, \ldots, b_n$, ciascuno avente scadenza assegnata 1, 2, ..., n, dicesi Scadenza media di tali importi quel valore z tale che:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) \cdot (1+i)^{-z} = \sum_{j=1}^{n} b_j (1+i)^{-j},$$

da cui anche:

$$z = \frac{\log\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) - \log\left(\sum_{j=1}^{n} b_j (1+i)^{-j}\right)}{\log(1+i)}.$$

Definizione 5: Dicesi Scadenza media aritmetica degli stessi importi b_h quel valore t tale che:

$$t = \left(\sum_{j=1}^{n} j \cdot b_j\right) : \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right).$$

Per le proprietà della Scadenza media e della Scadenza media aritmetica si veda ai numeri [9] e [42] della Bibliografia.

Definizione 6: Un progetto è detto di investimento (di finanziamento) in senso lato quando la Scadenza media degli esborsi, presi con segno positivo, è minore della Scadenza media degli introiti (la Scadenza media degli introiti è minore di quella degli esborsi presi con segno positivo).

Dato un progetto $A := (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ e fissato il valore del tasso i, consideriamo il Saldo (o Montante) del progetto alla fine del j-esimo periodo, $0 \leqslant j \leqslant n$, ovvero i valori:

$$S_j(i) = \sum_{k=0}^{j} a_k (1+i)^{j-k},$$

in base ai quali, seguendo quanto detto in [39] e [40], avremo la:

Definizione 7: È detto progetto di puro investimento (di puro finanziamento), al dato tasso i, un progetto per il quale i Saldi $S_j(i)$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, siano tutti non positivi (non negativi). Si definisce invece misto, al dato tasso i, un progetto per il quale almeno uno dei Saldi $S_j(i)$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, abbia segno diverso dagli altri.

Come detto in [39] e [25], esistono progetti che sono puri (di investimento o di finanziamento a seconda del segno di a_0) per qualunque tasso $i > -1$, e sono quei progetti il cui ultimo flusso di cassa, a_n, ha segno diverso da quello di tutti gli altri. Ove si fosse interessati ai soli valori positivi del tasso i, avremo che un progetto è puro (di investimento o di finanziamento in base al segno di a_0) se la cumulata dei flussi di cassa $\sum_{k=0}^{n} a_k = S_n(0)$, Saldo del progetto a tasso nullo, ha segno diverso da quello di tutte le altre cumulate, o Saldi parziali $\sum_{k=0}^{j} a_k = S_j(0)$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

Si dimostra, vedi [27], [29], [30] e [39], che se un progetto, ad un dato tasso i^*, è misto, allora esiste sempre un valore del tasso i_{min}, con $i_{min} > i^*$, per valori maggiori del quale il progetto è puro, mentre se un progetto è puro ad un dato tasso i^*, allora esso rimane puro per qualunque valore di i maggiore di i^*.

Dato il progetto A, consideriamo la sua D.P.V. (Discounted Present Value), o suo Valore Attuale:

$$V(i) = \sum_{j=0}^{n} a_j (1+i)^{-j},$$

nonché il suo Saldo, o Montante:

$$P(i) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot (1+i)^{n-j} = (1+i)^n \cdot V(i) .$$

Posto $x = (1 + i)^{-1}$ avremo allora:

$$V(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot x^j,$$

e dato che: $-1 < i < +\infty \Leftrightarrow 0 < x < +\infty$, avremo anche:

$$\lim_{x \to 0^+} V(x) = a_0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} V(x) = \infty$$

con il segno di a_n, e da questo è immediato vedere che:

$$a_0 \cdot a_n < 0 \tag{1}$$

è condizione necessaria (ma non certo sufficiente) per l'esistenza di un TIR unico e semplice. Supposta nota la radice x^* dell'equazione $V(x) = 0$, posto $i^* = (x^*)^{-1} - 1$, la condizione per l'unicità del TIR fornita in [13] consiste nell'imporre, per la Regola dei segni di Cartesio, ai coefficienti del quoziente $V(x) : (x - x^*)$ di non presentare alcuna variazione. Si dovrà cioè avere, se $a_0 < 0$:

$$\sum_{j=0}^{k} a_j \cdot (1 + i^*)^{k-j} \leqslant 0, \ \forall\, k : 0 < k \leqslant n - 1 \ . \tag{2}$$

Ma dato che $\sum_{j=0}^{k} a_j \cdot (1 + i^*)^{k-j} = S_k(i^*)$, questa condizione di unicità, per la Definizione 7, può essere espressa dicendo che «se il progetto è puro nel TIR, allora il TIR è unico».

Se, operato il prodotto $W(i) = V(i) \cdot (1 + i)^n$, poniamo $y = 1 + i$ e $y^* = 1 + i^*$, avremo una seconda condizione di unicità, ottenuta imponendo l'assenza di variazioni nei coefficienti del quoziente $W(y) : (y - y^*)$, ovvero che sia, se $a_n > 0$:

$$\sum_{j=0}^{k} a_{n-j} \cdot (1 + i^*)^{k+j} \geqslant 0, \ \forall\, k : 0 < k \leqslant n - 1 \ . \tag{3}$$

Se il progetto, per la prima condizione, esaminato «dall'inizio» è di puro investimento, allora, esaminato «dalla fine», allo stesso tasso i^*, deve risultare invece di puro finanziamento.

3. *I criteri di scelta basati sul Valore Attuale e il criterio T.R.M.*

Non ci sembra necessario richiamare i criteri del Valore Attuale (o del Beneficio Attualizzato) e del Tasso interno di rendimento, vista la ormai

acquisita notorietà di questi due criteri basati sull'attualizzazione dei flussi di cassa del progetto. Vari sono però gli inconvenienti che essi presentano così come rilevato da numerosi Autori (vedi [3], [4], [5], [6], [7], [8], [10], [19], [20], [24], [35], [37], [43], [46] e [47]).

Teichroew, Robichek e Montalbano, in [39] e [40], riesaminano la procedura di attualizzazione dei flussi di cassa del progetto, allo scopo di fornire un criterio di scelta che sia applicabile « senza ambiguità » ad ogni possibile progetto, e che sia « coerente » rispetto al tasso di mercato ([39], pp. 162-163); in altre parole, se, ad esempio, un investimento ad un dato tasso di mercato ϱ è da accogliere, sarà da accogliere anche per ogni tasso minore di ϱ, e se è da scartare per un tasso ϱ, sarà da scartare per ogni tasso maggiore di ϱ. Nel secondo articolo, [40], i tre Autori dimostrano inizialmente come per i progetti semplici quelli del Valore Attuale ed del TIR siano criteri che soddisfano alle due proprietà richieste, cosa che invece non sempre accade quando si passi a considerare progetti non semplici.

Operata allora, Definizione 7, la distinzione in progetti puri o misti ad un dato tasso i, gli Autori definiscono la funzione $F(k, r)$, Saldo (o Montante) del progetto, usando due diversi tassi di interesse: k, tasso di finanziamento, ed r, tasso di investimento, mediante la $F(k, r) = F_n(k, r)$, con:

$$\begin{cases} F_0(k, r) = a_0 \ , \\ F_i(k, r) = \begin{cases} (1+k) \cdot F_{i-1}(k, r) + a_i, & \text{se} \quad F_{i-1}(k, r) \geqslant 0 \ , \\ (1+r) \cdot F_{i-1}(k, r) + a_i, & \text{se} \quad F_{i-1}(k, r) < 0 \ . \end{cases} \end{cases}$$

Se poniamo $k = r = i$, otterremo ovviamente $F(i, i) = (1+i)^n \cdot V(i) = P(i)$ ed il grafico di $P(i)$ è nient'altro se non l'intersezione della superficie $z = F(k, r)$ con il piano d'equazione $k = r$. In base al segno di a_0 esisterà un valore (r_{min} se $a_0 < 0$ o k_{min} se $a_0 > 0$) tale che, per valori del tasso (r o k) maggiori di esso, ogni progetto misto diviene puro, ed $F(k, r)$ diviene funzione di una sola variabile. Ciò determina anche la divisione del piano (k, r) in due regioni: la cosiddetta regione mista: ($[-1 < k < k_{min}; \ -1 < r]$ se $a_0 > 0$; $[-1 < r < r_{min}; \ -1 < k]$ se $a_0 < 0$) e la regione di puro investimento (o finanziamento, a seconda che $a_0 \lessgtr 0$). Sulla ricerca di questi valori (r_{min} o k_{min}) vedasi [29] e [30].

Si dimostra che $F(k, r)$ è funzione continua e parzialmente derivabile, con:

$$\frac{\partial F(k, r)}{\partial k} > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F(k, r)}{\partial r} < 0 \ , \tag{4}$$

potendo al più non essere derivabile dove almeno uno dei Saldi $F_i(k, r)$ è nullo.

A questo proposito segnaliamo come alcuni dei risultati contenuti in [39] e [40] non siano corretti; si veda, per questo, ai numeri [25] e [27] della Bibliografia.

Considerando allora l'insieme delle coppie (k, r) tali che $F(k, r) = 0$, avremo la curva di equilibrio, o di equità finale, del progetto; questa è una curva continua e monotòna crescente mediante la quale, se il progetto è misto, si può definire implicitamente k come funzione di r: $k = k(r)$, o, viceversa, $r = r(k)$. Assegnato r, il valore $k(r)$ viene detto tasso di finanziamento del progetto; se è assegnato k, il valore $r(k)$ tasso di investimento. Se la funzione $r = r(k)$ (o la sua inversa, quando esiste, $k = k(r)$) hanno intersezioni con la bisettrice $k = r$, queste corrispondono ovviamente ai TIR del progetto, ovvero alle soluzioni della $V(i) = 0$.

Partendo da presupposti completamente diversi, ma pervenendo a risultati analoghi, S. Gronchi in [16] e [17] ridefinisce il Tasso interno di rendimento, in modo da renderlo economicamente significativo e privo delle note ambiguità, ponendo TIR $= r(i)$ dove $k = i$ è il valore del tasso noto di mercato. Vedasi per questo [18].

È facile poi vedere, anche in base alle (4), che $F(k, r) > 0$ o $F(k, r) < 0$ a seconda che il punto (k, r) si trovi al di sotto o al di sopra della curva di equilibrio (o, come poi vedremo, in certi casi, a destra o a sinistra). Il criterio decisionale che scaturisce da questa analisi può così essere formulato:

— Calcolare $F(0, 0)$ (o $F(-1, -1)$) per vedere se il progetto è puro per ogni tasso positivo (o per ogni tasso ammissibile); basterà per questo vedere se la cumulata dei flussi di cassa ha segno diverso da quello delle cumulate parziali (se a_n ha segno diverso dagli altri flussi di cassa a_j).

— Se il progetto, relativamente ai tassi che ci interessano, è puro per qualunque tasso, esso appartiene alla classe dei progetti non semplici per i quali i criteri del Valore Attuale e del TIR sono ancora applicabili e consistenti; la regione mista, se c'è, è al di fuori dell'insieme delle coppie di tassi che ci interessano.

— Quando invece il progetto non è puro, il criterio di scelta si basa sulla posizione della curva $r(k)$ rispetto alla bisettrice $k = r$; il progetto sarà da accogliere se, al dato tasso di mercato k^* avremo che $r(k^*) > k^*$, o, similmente, se, noto r^*, avremo che $k(r^*) < r^*$.

Chiariremo meglio in seguito gli aspetti particolari di questo criterio, rimandando comunque il lettore interessato alle tabelle in [40], sintetizzanti le modalità di scelta.

Ci sembra comunque interessante richiamare una affermazione conclusiva ([40], pp. 190) secondo la quale « This rule is exactly equivalent to the D.P.V. rule if the traditional present value function $V(i)$ is used .... The formulation in terms of k and r has therefore not resulted in a new rule. What it has done is to provide the reason for the occurrence of multiple roots in the present value function: if a project is sometimes an investment and sometimes a source of funds, then the rate that the project can return on invested funds depends on the rate it receives when it is a source of funds ».

Questa impostazione è stata poi generalizzata in [44] e [45]; supponendo noti i tassi di mercato di finanziamento, k^*, e di investimento, r^*, svinco-

landoli dalla condizione di assumere lo stesso valore, il criterio decisionale si basa, per i progetti misti, sulla posizione del punto (k^*, r^*) rispetto alla curva $F(k, r) = 0$: se il punto si trova al di sotto, cioè nella regione in cui $F(k, r) > 0$, il progetto è da intraprendere, indifferente se $F(k^*, r^*) = 0$, altrimenti da scartare.

4. *Ipotesi di troncabilità dei progetti: il Teorema del Troncamento*

Se, dato un progetto $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, poniamo per ipotesi che sia possibile arrestarne la vita fisica alla fine di un qualunque periodo, ad esempio il k-esimo, con $0 < k < n$, diremo che il progetto è troncabile, ed intraprenderemo, al suo posto, il «sottoprogetto» $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Questa ipotesi di troncabilità dei progetti coinvolge ovviamente problemi di natura economica, specie riguardo alla sua effettiva realizzabilità (vedi [1], [11], [12], [14], [15], [16], [33], [34] e [36]) e problemi formali; relativamente a questi ultimi ci limiteremo a porre la condizione che il nuovo progetto, ottenuto troncando al k-esimo periodo il progetto iniziale, soddisfi la Definizione 1.

L'ipotesi di troncabilità dei progetti è stata utilizzata anche al fine di garantire l'unicità del TIR; seguendo [16], potremo suddividere la letteratura sull'argomento in due filoni, caratterizzati da due diverse procedure concettuali, che però conducono, come mostrato in [32] e [16], a risultati «numericamente» identici.

Nel primo tipo di approccio, vedi [21], si dimostra che, dato un progetto $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, se limitiamo la sua vita fisica a quella durata a cui è associato il TIR massimo, allora questo TIR è anche unico. Ovvero, tra tutti i «sottoprogetti» del progetto dato, che ovviamente soddisfino alla Definizione 1, se scegliamo quello che presenta il TIR maggiore tra tutti i TIR dei vari sottoprogetti, allora questo sottoprogetto, come dimostrato in [21], ha TIR unico che oltretutto, vedi [16], soddisfa alla (2). Il secondo filone ha origine dall'articolo di Arrow e Levhari, [2], e preferiamo descriverlo usando le parole stesse degli Autori, sembrandoci di poter rilevare, in esse, una certa confusione concettuale.

Riferendosi a [21], essi affermano che «choosing a truncation period so as to maximise the internal rate of return is not using the proper criterion for the selection of a truncation period ... one should choose that investment which maximises present value, using the given rates of discount ... the aim in the choice of a truncation period should be that of maximising the present value of the investment project». E concludono dicendo: «... we prove that if, with a given constant rate of discount, we choose the truncation period so as to maximise the present value of the project, then the internal rate of return of the truncated project is unique. More fully, we prove that if the life of the project is optimally chosen, then the maximised present value of the project is a monotonic decreasing function of the rate of the interest».

Se $V(i, T) = \sum_{j=0}^{T} a_j (1+i)^{-j}$ è il Valore Attuale del sottoprogetto che

termina all'istante T, essi pongono $\psi(i) = \underset{T}{Max}\ V(i, T)$, ovvero, come illustrato in figura nell'originale, $\psi(i)$ è l'inviluppo superiore dei Valori Attuali del progetto e di tutti i suoi possibili sottoprogetti, e gli Autori dimostrano che questa funzione $\psi(i)$ è monotòna decrescente, per cui, date le ipotesi, essa ammette un solo TIR. Il punto nel quale ci sembra di poter rilevare una certa mancanza di chiarezza, è quando gli Autori affermano che: « we shall prove that $\psi(i) = \underset{T}{Max}\ V(i, T)$, the present value of the best truncated project, is a decreasing monotonic function of i. ». $\psi(i)$ è l'inviluppo superiore dei Valori Attuali, e non va confusa con il Valore Attuale del miglior progetto troncato, in quanto, come vedremo nel seguito, ciò non è assolutamente sostenibile nella generalità dei casi. È comunque provato il cosiddetto Teorema del Troncamento, secondo il quale « il Valore Attuale massimizzato è funzione monotòna decrescente del tasso di interesse » (vedi anche [11], [12], [15], [16] e [33]) per cui, se il progetto soddisfa la Definizione 1, la funzione $\psi(i)$ ammette un'unica radice. Per quanto concerne la legittimità di chiamare TIR tale radice, implicando questo una vera e propria ridefinizione del Tasso interno di rendimento, vedasi [16].

In [32], C. Norstrøm dimostra, comunque, l'equivalenza numerica delle due procedure, ovvero che il valore (TIR) trovato è lo stesso, sia che si proceda al troncamento basandosi sul TIR massimo sia che ci si basi sulla massimizzazione del Valore Attuale.

5. *Risultati e conclusioni finali*

Rivediamo i vari tipi di progetti, di cui alle Definizioni 1, 2, 3, 6 e 7, alla luce della condizione (2).

In base a quanto detto, soddisfano la condizione (2) tutti quei progetti che sono puri per qualunque tasso ammissibile, mentre i progetti puri per qualunque valore positivo del tasso la soddisfano solo se il loro TIR è non negativo. Come detto in [31] tutti i progetti semplici, anche se non sono puri per qualunque valore ammissibile del tasso d'interesse, sono pur sempre puri nel TIR, e quindi soddisfano la (2).

Passiamo ora a considerare i progetti convenzionali, o progetti d'investimento (o di finanziamento) in senso stretto. Anche questi, pur potendo non essere sempre puri, sono comunque puri nel TIR; infatti, nel caso $a_0<0$ e $a_n>0$, se i^* è il valore del TIR, unico per la Regola dei segni di Cartesio, sarà $S_n(i^*) = 0$ da cui $S_{n-1}(i^*) \cdot (1 + i^*) + a_n = 0$, e quindi $S_{n-1}(i^*) < 0$. Ma allora $S_{n-2}(i^*) \cdot (1 + i^*) + a_{n-1} < 0$, da cui $S_{n-2}(i^*) \leqslant 0$ in quanto $a_{n-1} \geqslant 0$.

Proseguendo in tal modo, consideriamo a_k, l'ultimo dei flussi di cassa negativi. Avremo $S_k(i^*) < 0$ in quanto, $S_k(i^*) = S_{k-1}(i^*) \cdot (1 + i^*) + a_k$, e sia a_k che $S_{k-1}(i^*)$ sono quantità certamente negative, ovvero è verificata la condizione (2). La presenza di una sola variazione di segno è quindi condizione sufficiente per l'esistenza di un TIR unico ed economicamente significativo. Se invece passiamo a considerare i progetti d'investimento (o

di finanziamento) in senso lato (vedi Definizione 6), è stato dimostrato in [42] come sia condizione sufficiente per l'unicità del TIR il fatto che la Scadenza media aritmetica dei costi preceda la scadenza del primo ricavo, nel caso $a_0 < 0$ (la Scadenza media dei ricavi preceda la scadenza del primo costo quando $a_0 > 0$). Questa condizione non comporta però la soddisfazione della condizione (2); infatti il progetto $A: = (-50, 45, -89, 110)$ ha un TIR che soddisfa la (2), ma la Scadenza media aritmetica dei costi ($\cong 1.28$) non precede la scadenza del primo ricavo ($= 1$), mentre invece il progetto $B: = (-5, -5, 20, -10, 10)$ ha un TIR unico che però non soddisfa la condizione (2), e la Scadenza media aritmetica dei costi ($= 1.75$) precede la scadenza del primo ricavo ($= 2$).

Analizziamo ora un progetto seguendo lo schema T.R.M., e vediamo quali siano le conseguenze della condizione (2). Come detto in [16], se un progetto soddisfa la (2), allora per esso la curva $F(k, r) = 0$ si riduce ad una retta del tipo $r = r^*$ se $a_0 < 0$ oppure $k = k^*$ se $a_0 > 0$, e questi sono i casi in cui la $F(k, r) = 0$ non definisce $r = r(k)$ o $k = k(r)$ come corrispondenza biunivoca. È chiaro che questo accade quando TIR $> r_{min}$ (se $a_0 < 0$) o TIR $> k_{min}$ (se $a_0 > 0$), in quanto il progetto soddisfa la (2) ed il TIR è quindi unico; se fosse TIR $< r_{min}$ (o TIR $< k_{min}$), non ci potrebbero essere altri TIR maggiori di r_{min} o k_{min}, implicando questo l'unicità. Per vedere come la $F(k, r) = 0$ si riduca ad una retta, consideriamo il caso $a_0 > 0$ e sia $k^* > k_{min}$ il valore del TIR. Avremo che, essendo il progetto puro nel TIR, l'espressione di $F(k, r)$ dipende solo da k, ed assumendo k un valore che è TIR, sarà $F(k^*, r) = 0$ qualunque sia r. Per le (4), sarà poi $F(k, r) < 0$ se $k < k^*$ e $F(k, r) > 0$ se $k > k^*$. Non esiste regione mista in questo caso, divenendo tutto il piano (k, r) regione di puro finanziamento. Analogamente, se $a_0 < 0$, si dimostra che la $F(k, r) = 0$ si riduce a $r = r^*$, con r^* TIR unico del progetto.

Se un progetto non ammette TIR, o ne ammette più di uno, o ne ammette di multipli, o se, infine, ha TIR unico che però non soddisfa la (2), allora esiste la curva $F(k, r) = 0$, giacente nella regione mista ed avente per asintoto la retta $r = r_{min}$ (se $a_0 < 0$) o la $k = k_{min}$ (se $a_0 > 0$).

Per la determinazione del punto iniziale della curva basta calcolare $F(-1, -1) = a_n$. Se $a_n > 0$, la curva avrà inizio da un punto dell'asse r, se $a_n < 0$ da un punto dell'asse k, questo, ovviamente, per le (4).

Vediamo ora un'altra proprietà dei progetti soddisfacenti la condizione (2). Come dimostrato in [46], se un progetto ha un Valore Attuale maggiore (quando $a_0 < 0$, minore se $a_0 > 0$) di quello di tutti i suoi sottoprogetti, allora esso soddisfa la condizione (2). Si dimostra, vedi Appendice a questa Nota, che vale anche l'implicazione inversa, ovvero che sussiste la seguente:

Proposizione: Un progetto di investimento, (ovvero con $a_0 < 0$) che soddisfi la condizione (2) ha un Valore Attuale maggiore di quello di tutti i suoi sottoprogetti, almeno nell'intervallo $-1 < i < i^*$, con i^* TIR del progetto. Analogamente, se $a_0 > 0$, con minore al posto di maggiore.

Ogni progetto d'investimento il cui Valore Attuale è massimo almeno fino al TIR soddisfa la condizione (2) e viceversa, quindi la proposizione fornisce una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un TIR unico ed economicamente significativo.

È bene notare come la proprietà di essere il Valore Attuale del progetto massimo non sia verificata per valori del tasso maggiori del TIR; il progetto (— 5; — 3; 2; 7) soddisfa alla condizione (2), ha Valore Attuale massimo fino ad $i \cong 0.89$, con un TIR $i^* \cong 0.05$ ma dopo il valore $i \cong 0.89$ il suo Valore Attuale è minore di $V_0(i) = -5$.

In base a quanto detto in precedenza, tutti i progetti i cui flussi di cassa presentano una sola variazione, ovvero gli investimenti (o i finanziamenti) in senso stretto, sono progetti il cui Valore Attuale è massimo (minimo) almeno fino al valore del TIR. Ma non è questa l'unica categoria di progetti a Valore Attuale massimo (o minimo); la proprietà è soddisfatta anche da progetti aventi un numero di variazioni maggiori di uno anche se pur sempre in numero dispari. Il Teorema del Troncamento può essere riformulato dicendo che « da ogni progetto, soddisfacente la Definizione 1, può sempre essere estratto almeno un sottoprogetto, che può essere anche il progetto stesso, avente Valore Attuale massimo (o minimo a seconda del segno di a_0), rispetto ai sottoprogetti in lui contenuti, almeno fino al valore del suo TIR, che sarà unico ed economicamente significativo ».

Segnaliamo infine il fatto che, soddisfacendo alla Definizione 1, non può esistere progetto contenente un sottoprogetto a Valore Attuale massimo (o minimo) per qualunque valore ammissibile del tasso, ovvero $\forall\, i : -1 < i < +\infty$, in quanto questo, come facilmente si può verificare, implica che i flussi di cassa abbiano tutti lo stesso segno, in contrasto con la Definizione 1.

MARCO LONZI

Università di Siena

APPENDICE

Dimostrazione: Consideriamo il caso $a_0 < 0$, potendosi trattare in modo analogo, con opportune modifiche, il caso $a_0 > 0$. Dato il progetto $A := (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, consideriamo il Valore Attuale del sottoprogetto $A_k := (a_0, a_1, \ldots, a_k)$:

$$V_k(i) = \sum_{j=0}^{k} a_j (1+i)^{-j}.$$

Avremo $V(i) = V_n(i)$, e vogliamo far vedere che $V(i) - V_k(i) \geqslant 0$ $\forall\, i: -1 < i < i^*$, $\forall\, k: 0 \leqslant k < n$.

Sia $D_k(i) = V(i) - V_{k-1}(i) = a_n \cdot \dfrac{1}{(1+i)^n} + \ldots + a_k \cdot \dfrac{1}{(1+i)^k}$.

Avremo anche

$$D_k(i) = \frac{1}{(1+i)^k}\left[a_n \cdot \frac{1}{(1+i)^{n-k}} + \ldots + a_k\right] = \frac{1}{(1+i)^k} \cdot F_k(i) .$$

Ovviamente $D_k(i) \geqslant 0$ se $F_k(i) \geqslant 0$.

Ora, essendo $a_n > 0$ per la (1), avremo che:

$$\text{(5)} \qquad \lim_{i \to -1^+} F_k(i) = +\infty \qquad \text{e} \qquad F_k(i^*) \cdot \frac{1}{(1+i^*)^k} \geqslant 0 ,$$

da cui $F_k(i^*) \geqslant 0$, in quanto il progetto soddisfa alla condizione (2) e quindi alla (3). Basterà dimostrare che $F_k(i)$ è funzione monotòna decrescente per $-1 < i < i^*$, con il che sarà dimostrato come in questo intervallo $F_k(i)$, e quindi $D_k(i)$, siano positivi.

Avremo che:

$$\frac{d}{d\,i} F_k(i) = -(1+i)^{k-1} \cdot \left[(n-k) \cdot \frac{a_n}{(1+i)^n} + \right.$$

$$\left. + (n-k-1) \cdot \frac{a_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{k+1}}{(1+i)^{k+1}}\right]$$

per cui sarà anche:

$$\frac{d}{d\,i} F_k(i) = -(1+i)^{k-1} \cdot [D_{k+1}(i) + D_{k+2}(i) + \ldots + D_n(i)] \ .$$

$F_k(i)$ è monotòna decrescente se tutte le differenze $D_h(i)$, con $k+1 \leqslant h \leqslant n$, sono positive.

Ora $D_n(i) = V(i) - V_{n-1}(i) = a_n \cdot \dfrac{1}{(1+i)^n} > 0$ in quanto $a_n > 0$.

Poi:

$$D_{n-1}(i) = V(i) - V_{n-2}(i) = \frac{1}{(1+i)^{n-1}} \cdot \left[\frac{a_n}{1+i} + a_{n-1}\right] .$$

Calcolando: $\dfrac{d}{d\,i} F_{n-1}(i) = -\dfrac{a_n}{(1+i)^2} < 0$ in quanto $a_n > 0$, e quindi, per le (5), $D_{n-1}(i) \geqslant 0$, $\forall\, i$: $-1 < i < i^*$, e così via fino a $D_k(i)$ con il che la proposizione è dimostrata.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANDRETTA, « Nota sul Teorema del Troncamento e sul Tasso Interno di Rendimento », *Ricerche Economiche*, dicembre 1977, vol. 31, pp. 375-387.

[2] K. J. ARROW - D. LEVHARI, « Uniqueness of the Internal Rate of Return with Variable Life of Investment », *The Economic Journal*, settembre 1969, vol. 79, pp. 560-566.

[3] M. J. BAILEY, « Formal Criteria for Investment Decisions », *Journal of Political Economy*, ottobre 1959, vol. 67, pp. 476-488.

[4] R. H. BERNHARD, « Discount Methods for Expenditure Evaluation. A Clarification in their Assumptions », *The Journal of Industrial Engineering*, gennaio-febbraio 1962, vol. 13, pp. 19-27.

[5] R. H. BERNHARD, « Unrecovered Investment, Uniqueness of the Internal Rate of Return, and the Question of Project Acceptability », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, marzo 1977, vol. 12, pp. 33-38.

[6] R. H. BERNHARD - C. J. NORSTRØM, « A Further Note on Unrecovered Investment, Uniqueness of the Internal Rate, and the Question of Project Acceptability », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, giugno 1980, vol. 15, pp. 421-423.

[7] K. E. BOULDING, « The Theory of the Single Investment », *Quarterly Journal of Economics*, maggio 1935, vol. 49, pp. 475-494.

[8] R. CAPETTINI - R. A. GRIMLUND - H. R. TOOLE, « Comment: the Unique, Real Internal Rate of Return », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, dicembre 1979, vol. 14, pp. 1091-1094.

[9] E. CASTAGNOLI, « Alcune osservazioni sulla scadenza media », *Studi e Ricerche*, Facoltà di Economia e Commercio dell'Università degli Studi di Parma. Vol. VII, Parma 1970.

[10] C. DE FARO, « On the Internal Rate of Return Criterion », *The Engineering Economist*, 1974, vol. 19, pp. 165-194.

[11] J. EATWELL, « A Note on the Truncation Theorem », *Kyklos*, 1975, vol. 28, fasc. 4, pp. 870-875.

[12] C. FILIPPINI - L. FILIPPINI, « Nota Critica al Teorema del Troncamento », *Ricerche Economiche*, gennaio-dicembre 1974, vol. 28, pp. 3-18.

[13] S. GRONCHI, « Sui Criteri d'Investimento Basati sul Tasso di Rendimento Interno », *Note Economiche*, 1984. n. 4, pp. 64-75.

[14] S. GRONCHI, *On Karmel's Criterion for Optimal Truncation*, Quaderni dell'Istituto di Economia dell'Università di Siena, maggio 1984, n. 26.

[15] S. GRONCHI, *On Truncation Theorems*, Quaderni dell'Istituto di Economia dell'Università di Siena, giugno 1984, n. 27.

[16] S. GRONCHI, *Tasso Interno di Rendimento e Valutazione dei Progetti: una Analisi Teorica*, Collana n. 2 dell'Istituto di Economia, Siena, 1984.

[17] S. GRONCHI, « Un tasso di Rendimento Generalizzato », *Economia Politica*, aprile 1985, anno II, n. 1, pp. 55-80.

[18] S. GRONCHI - M. LONZI, «Sulla concordanza di alcuni contributi in tema di Tasso Interno di Rendimento», *Note Economiche*, 1985 n. 5/6, pp. 139-142.

[19] A. HERBST, « The Unique, Real Internal Rate of Return: Caveat Emptor », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, giugno 1978, vol. 13, pp. 363-370.

[20] J. HIRSHLEIFER, « On the Theory of Optimal Investment Decision », *Journal of Political Economy*, agosto 1958, vol. 66, pp. 329-352.

[21] P. H. KARMEL, « The Marginal Efficiency of Capital », *Economic Record*, dicembre 1959, vol. 35, pp. 429-434.

[22] F. LAZZAR, « Condizioni Sufficienti per l'Unicità del Tasso Interno di Rendimento », *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, luglio-dicembre 1980, vol. 43, pp. 81-104.

[23] M. LONZI, *Aspetti matematici nella ricerca di condizioni di unicità per il Tasso Interno di Rendimento*, Quaderni dell'Istituto di Economia, Siena 1985, n. 44.

[24] J. LORIE - L. J. SAVAGE, « Three Problems in Rationing Capital » *Journal of Business*, ottobre 1955, vol. 28, pp. 229-239.

[25] G. LUCCHINI, « Su un Teorema e due Corollari di Teichroew, Robichek e Montalbano », *Fascicoli dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria*, Università degli studi di Pavia, n. 30, 1970.

[26] F. LUTZ - V. LUTZ, *The Theory of Investment of the Firm*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1951.

[27] U. MAGNANI, « Questioni critiche in operazioni finanziarie pure », *Fascicoli dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria*, Università degli Studi di Pavia, n. 23, 1969.

[28] U. MAGNANI, « Sopra un problema inverso nella dinamica di operazioni finanziarie », *Fascicoli dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria*, Università degli Studi di Pavia, n. 27, 1969.

[29] U. MAGNANI, « Su certi problemi di caratterizzazione e di scelta di operazioni finanziarie », *Fascicoli dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria*, Università degli Studi di Pavia, n. 36, 1971.

[30] U. MAGNANI, « Sul criterio T.R.M. per la scelta di progetti », *Atti del Convegno sulle applicazioni della Matematica alla Ricerca Operativa ed alle Scienze Attuariali*, A cura dell'Istituto di Statistica, Salerno, ottobre 1972.

[31] J. C. T. MAO, « An Analysis of Criteria for Investment and Financing Decisions under Certainty: a Comment », *Management Science*, Vol. 13, n. 3, novembre 1966.

[32] C. J. NORSTRØM, « Uniqueness of the Internal Rate of Return with Variable Life of Investment: a Comment », *The Economic Journal*, dicembre 1970, vol. 80, pp. 983-984.

[33] D. M. NUTI, « On the Truncation of Production Flows », *Kyklos*, 1973, vol. 80, fasc. 3, pp. 485-496.

[34] P. PUCCINELLI, « Alcuni Aspetti Controversi della Teoria della Domanda di Investimenti », *Note Economiche*, 1976, n. 1, pp. 35-93.

[35] G. B. RAMSEY, « The Marginal Efficiency of Capital, the Internal Rate of Return, and Net Present Value: an Analysis of Investment Criteria », *Journal of Political Economy*, settembre-ottobre 1970, vol. 78, pp. 1017-1027.

[36] T. H. SILCOCK, « Complementarity and Future Time: a Note on the Marginal Efficiency of Capital », *The Economic Journal*, dicembre 1959, vol. 69, pp. 816-819.

[37] E. SOLOMON, « The Arithmetic of Capital Budgeting Decisions », *Journal of Business*, aprile 1956, vol. 29, pp. 124-129.

[38] C. S. SOPER, « The Marginal Efficiency of Capital: a Further Note », *The Economic Journal*, marzo 1959, vol. 69, pp. 174-177.

[39] D. TEICHROEW - A. ROBICHEK - M. MONTALBANO, « Mathematical Analysis of Rates of Return under Certainty », *Management Science*, gennaio 1965, vol. 11, pp. 395-403.

[40] D. TEICHROEW - A. ROBICHEK - M. MONTALBANO, « An Analysis of Criteria for Investment and Financial Decisions under Certainty », *Management Science*, novembre 1965, vol. 12, pp. 151-179.

[41] M. TROVATO, *Investimenti e decisioni*, Isedi, Milano 1972.

[42] M. TROVATO, « Sulla Definizione di Classi di Operazioni di Investimento a Tasso di Rendimento Unico », *Giornale degli Economisti e Annali di Economia*, luglio-agosto 1972, vol. 31, pp. 503-513.

[43] M. TROVATO, « Sulla Validità del Tasso Interno di Rendimento come Criterio di Selezione dei Progetti di Investimento », *Giornale degli Economisti e Annali di Economia*, settembre-ottobre 1972, vol. 31, pp. 678-691.

[44] E. VOLPE DI PRIGNANO - C. SICA, « Problems of Valuation in Financial Substitutive Operations and in Mixed Projects », In *Mathematical Programming and its Economic Application*, a cura di G. Castellani e P. Mazzoleni, Franco Angeli, Milano 1978.

[45] E. VOLPE DI PRIGNANO, *Manuale di Matematica Finanziaria*, E.S.I., Napoli, 1985.

[46] J. F. WRIGHT, « The Marginal Efficiency of Capital », *The Economic Journal*, dicembre 1959, vol. 69, pp. 813-816.

[47] J. F. WRIGHT, « Some Further Comments on the Ambiguity and Usefulness of Marginal Efficiency as Investment Criterion », *Oxford Economic Papers*, marzo 1965, vol. 17, pp. 81-89.