Rivista di matematica per le scienze economiche e sociali - Anno 9°, Fascicolo 2°.

ASPETTI MATEMATICI NELLA RICERCA DI CONDIZIONI DI UNICITA' PER IL TASSO INTERNO DI RENDIMENTO

MARCO LONZI
Istituto Matematico
Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie
Università di Siena

Versione definitiva pervenuta il 22-7-1987

Si fornisce un'ampia rassegna di condizioni sufficienti per l'unicità del Tasso Interno di Rendimento di un dato progetto, riconducendo la maggior parte di queste ad un'unica procedura, della quale si fornisce la formulazione più generale.

In tema di criteri per la scelta degli investimenti, un posto di rilievo spetta indubbiamente a quello del Tasso Interno di Rendimento (T.I.R.) ed a questo argomento, negli ultimi trent'anni, molti Autori si sono dedicati, per esaminarne la sua applicabilità e validità. Lo scopo della presente nota è quello di esaminare le sempre più generali condizioni sufficienti per l'esistenza e l'unicità del T.I.R. che via via sono state fornite ed a questo scopo, ampliando quanto fatto in [65], daremo una rassegna di esse, raggruppandole in filoni di appartenenza basati sui criteri e sulle procedure usate, e fornendo, in molti casi, le relazioni di dominanza esistenti mediante argomenti più semplici degli originali.

Per quanto concerne l'utilizzazione del T.I.R. come valido criterio per la scelta degli investimenti, e riguardo al fatto che la sua unicità sia sufficiente per assicurare una scelta corretta, non entreremo in questa nota nel merito di tale problema, limitandoci a segnalare al lettore interessato gli articoli ai numeri [1], [5], [6], [9], [11], [12], [16], [19], [20], [23], [24], [25], [28], [30], [31], [36], [38], [39], [53], [54], [55], [64], [68], [72], [74], [79], [82], [91], [116], [120], [122], [128], [130], [131] della bibliografia, sia per questo problema che per le modifiche proposte al criterio medesimo. Sempre per limitare l'argomento della trattazione, non esamineremo quei filoni della letteratura che si occupano di unicità del T.I.R. mediante il cosiddetto «Teorema del Troncamento», per il quale il lettore interessato potrà vedere ai numeri [2], [3], [35], [37], [42], [45], [46], [47], [49], [63], [69], [84], [87], [107], [110], [114], [115], [129], [132] della bibliografia, nè il cosiddetto Criterio T.R.M. e sue modifiche (vedi [7], [73], [75], [76], [77], [78], [81], [118], [119], [125], [126], e neppure altre procedure ([8], [21], [22], [43], [85], [88], [108], [109], [127]).

Assegnato un progetto A mediante il vettore dei suoi flussi di cassa $(a_0, a_1, ..., a_n)$, per il quale il generico elemento a_k si intende esigibile o disponibile all'epoca $t_k = k$, $0 \leq k \leq n$, con $t_0 = 0$ origine dell'operazione e $t_n = n$ termine della stessa, associamo ad esso la corrispondente D.P.V.:

$$\begin{cases} F(r, A) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (1+r)^{-k} \\ -1 < r < +\infty. \end{cases} \tag{1}$$

Dicesi T.I.R. del progetto A ogni valore r^* che sia radice della sua D.P.V. (1), ovvero tale che $F(r^*, A) = 0$ con $-1 < r^* < +\infty$.

Imporremo, nel seguito, per i flussi di cassa $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} a_0 < 0 \\ a_n \neq 0 \\ a_i > 0 \text{ per almeno un } i : 0 < i \leq n. \end{cases} \tag{2}$$

Ponendo nella (1): $1/(1+r) = x$ otteniamo la:

$$\begin{cases} F^*(x; A) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\ 0 < x < +\infty \end{cases} \tag{3}$$

per la quale, ancor più precisamente:

$$-1 < r < 0 \Longleftrightarrow 1 < x < +\infty \quad \text{e}$$

$$0 < r < +\infty \Longleftrightarrow 0 < x < 1.$$

E' utile infine notare che:

$$F^*(0; A) = \lim_{r \to +\infty} F(r; A) = a_0; \tag{4}$$

$$F^*(1; A) = F(0; A) = \sum_{k=0}^{n} a_k; \tag{5}$$

$$\lim_{x \to +\infty} F^*(x; A) = \lim_{r \to -1^+} F(r; A) = \infty, \text{ con il segno di } a_n. \tag{6}$$

Viste le (2), (4), (5) e (6), se abbiamo $a_n < 0$ e $\sum_{k=0}^{n} a_k > 0$, è assicurata l'esistenza del T.I.R. per $r \in]-1; \infty[$, ma è impossibile la sua unicità; è ancora assicurata l'esistenza se $a_n > 0$ sia per $\sum_{k=0}^{n} a_k > 0$ che per $\sum_{k=0}^{n} a_k < 0$, ma in questi due casi non è garantita l'unicità; non è infine garantita l'esistenza nel caso

$a_n < 0$ e $\sum_{k=0}^{n} a_k < 0$, per il quale, se vi fosse un T.I.R. questo può essere unico solo se è una radice non semplice di molteplicità pari per la $F(r; A) = 0$.

Nel 1958, in [104], Pitchford e Hagger, assicurata l'esistenza di almeno un T.I.R. mediante le condizioni:

$$a_0 < 0; a_n > 0; \tag{7}$$

davano una prima condizione sufficiente per la sua unicità in $r \in]-1; \infty[$ mediante la:

$$a_k > 0 \quad \forall k: 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{8}$$

condizione che garantisce ad $F^*(x; A)$ di essere funzione strettamente monotona crescente in $0 < x < +\infty$, ma che più facilmente si giustifica mediante la Regola dei Segni di Cartesio (vedi [113], pag. 496).

Da notare come, nella condizione di Pitchford e Hagger, venga trascurato il valore di $\sum_{k=0}^{n} a_k$, somma, o cumulata, dei flussi di cassa non scontati, quantità che sarà spesso usata da altri Autori.

Viste le (7) e (8), detto r^* il T.I.R., se $\sum_{k=0}^{n} a_k > 0 \Rightarrow r^* \in]0; \infty[$; se $\sum_{k=0}^{n} a_k < 0 \Rightarrow r^* \in]-1; 0[$, se infine, si ha che $\sum_{k=0}^{n} a_k = 0 \Rightarrow r^* = 0$.

La condizione (8) può benissimo essere estesa alla:

$$a_k \geqslant 0; \ \forall k: 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{8*}$$

purchè l'uguaglianza non valga $\forall k : 1 \leqslant k \leqslant n$.

Nel 1959, in [117], C.S. Soper, sempre nell'ambito $-1 < r < \infty$, assicurata l'esistenza mediante le (7), e supposto di aver determinato una radice x^* della $F^*(x, A) = 0$, impone al quoziente $f(x) = F^*(x; A) : (x - x^*)$ di non avere radici $x > 0$ e questo accade, per la regola di Newton, ([123] pag. 97) se $f(0)$ e le prime n derivate di $f(x)$ in zero hanno lo stesso segno, ovvero se:

$$\sum_{k=0}^{i} a_k (x^*)^k < 0; \forall i : 0 \leqslant i \leqslant n-1, \tag{9}$$

le quali, sostituendo e moltiplicando per $(1 + r^*)^i$ sono esprimibili anche nella forma:

$$\sum_{k=0}^{i} a_k(1+r^*)^{i-k} < 0, \forall i : 0 \leq i \leq n-1. \tag{9a}$$

Dopo aver notato che quella di Soper è l'unica condizione di unicità che coinvolga esplicitamente il T.I.R. trovato: $r^* = (x^*)^{-1} - 1$, è bene notare come la condizione originale (9) possa essere estesa alla:

$$\sum_{k=0}^{i} a_k(1+r^*)^{i-k} \leq 0; \ \forall i : 1 \leq i \leq n-1; a_0 < 0; \tag{9b}$$

purchè l'uguaglianza non sia valida $\forall i : 1 \leq i \leq n-1$, come si può vedere in [44], [47] e [49] e che un'altra condizione di unicità del T.I.R. può essere formulata, mediante la Regola dei Segni di Cartesio applicata al quoziente $f(x)$, mediante la:

$$\sum_{k=0}^{i} a_{n-k}(x^*)^{i-k} \geq 0; \ \forall i : 0 \leq i \leq n-1; a_n > 0.$$

Anche se criticata per la ristretta classe di progetti a cui assicura l'unicità del T.I.R., la condizione elaborata da Soper, vista alla luce del significato economico datole da Bernhard, Gronchi ed altri Autori (vedi [6], [9], [10], [12], [13], [16], [44], [47], [49], [57] e [122]), rappresentando le (9b) i Saldi del progetto al termine di ciascun periodo, individua una classe di progetti dotati di un T.I.R. unico e dal chiaro significato economico. Si vedano, a questo proposito, i numeri [47], [48], [49], [69] e [132] della bibliografia.

Utilizzando per gli investimenti la definizione data in [74], si dimostra, vedi E. Levi in [66] e [68], l'unicità del T.I.R. positivo quando si tratti di progetti di investimento «in senso stretto», ovvero di investimenti per i quali, vedi anche [122], i costi precedono i ricavi, condizione facilmente dimostrabile ove si consideri che per questi progetti il vettore dei flussi di cassa presenta una sola variazione.

Per gli investimenti «in senso lato», ovvero per quei progetti per i quali la scadenza media dei costi preceda, a qualsiasi tasso, la scadenza media dei ricavi, si dimostra che l'unicità del T.I.R. positivo è garantita quando la scadenza media aritmetica dei costi precede la scadenza del primo ricavo.

Sostenendo la possibilità di difficoltà nel calcolo del T.I.R. e l'influenza che un valore approssimato ma non esatto potrebbe avere nella verifica delle (9), in una nota del 1965, [61], S. Kaplan propone l'uso del Teorema di Sturm per avere il numero esatto delle radici della (3).

La differenza tra il numero delle variazioni della successione di Sturm (vedi [113], [123], [124]) nello zero ed all'infinito ci fornisce esattamente il numero delle radici $0 < x < +\infty$ della (3), contando per una sola ogni eventuale radice multipla. Indipendentemente dalla complessità dei calcoli che essa richiede, pur sempre affidabili ad un elaboratore ([40], [52], [62], [70], [80], [90]), questa è forse la condizione che, meno di tutte, è collegabile ai flussi di cassa del progetto, ed anche se, mediante essa, avessimo garantita l'unicità del T.I.R. per un dato progetto, potrebbero pur sempre sorgere problemi per un uso corretto del criterio del T.I.R. (vedi [10]).

Ricorrendo invece al Teorema di Budan ([113]) W. Jean, nel 1968, in [58], determina alcune classi di progetti per le quali è garantita l'unicità del T.I.R. Anticipando quello che faranno molti altri Autori in seguito, ed accusando di opportunismo matematico gli Autori precedenti, egli limità la ricerca del T.I.R. ai soli valori $0 < r < +\infty$. Assicurata l'esistenza di almeno una radice della (3) nell'intervallo $0 < x < 1$ mediante le:

$$a_0 < 0 \text{ e } \sum_{k=0}^{n} a_k > 0; \tag{10}$$

applicando il Teorema di Budan nello stesso intervallo, egli assicura l'unicità del T.I.R. per quei progetti per i quali:

$$< \begin{cases} a_k > 0 \quad \forall k : 0 \leqslant k \leqslant m \quad \text{e} \\ a_k > 0 \quad \forall k : m+1 \leqslant k \leqslant n, \quad 1 \leqslant m \leqslant n-1, \end{cases} \tag{11}$$

ed involontariamente, dato che l'Autore in [58] esprime in forma dubitativa un'esistenza che invece è assicurata dalle (10), anche per i progetti per i quali:

$$\begin{cases} a_0 < 0 \\ a_k > 0 \quad \forall k : 1 \leqslant k \leqslant m \\ a_k < 0 \quad \forall k : m+1 \leqslant k \leqslant n, \quad 1 \leqslant m \leqslant n-1. \end{cases} \tag{12}$$

Dopo la critica di J. Hirshleifer, [56], W. Jean in [59] considera anche i progetti per i quali valgano le:

$$a_0 < 0 \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{n} a_k < 0;$$

ma questa volta, usando le stesse procedure, non determina alcuna classe per la quale sia assicurata l'unicità del T.I.R. Risultati analoghi a quelli forniti in [58] e [59] si possono trovare in [41].

Un'applicazione del Teorema di Budan all'intervallo $0 < x < +\infty$, poi, è facile vedere che garantirebbe l'unicità del T.I.R. solo alla classe dei progetti (11), ma per questi, avendo la sequenza dei flussi di cassa una sola variazione, basta applicare la Regola dei Segni di Cartesio.

Alterando l'ordine cronologico della trattazione, è bene dare ora notizia della condizione, cosiddetta «flessibile», data da C. De Faro e L. Soares in [34] nel 1978, vista la sua estraneità procedurale con il filone che si svilupperà in seguito. I due Autori impongono, sotto le condizioni (10), alla (3) di avere derivata strettamente negativa ogni qualvolta la (3) stessa assuma valori maggiori o uguali a zero, e dimostrano che questo è possibile se si riesce a determinare almeno un intero k: $1 \leqslant k \leqslant n$, tale che:

$$k(k-1)M_k + (n-k)\cdot(n-k+1)m_k \leqslant 2k|a_0|$$

con M_k e m_k definiti rispettivamente dalle:

$$M_k = \max\{0; \max_{1 \leq i \leq k-1} a_i\} \text{ e}$$

$$m_k = -\min\{0; \min_{k+1 \leq i \leq n} a_i\}.$$

Simile a questa nella procedura è un'altra condizione che i due Autori ottengono, sempre in [34], per garantire la stretta convessità della (3) e poter così adoperare il metodo di Newton-Raphson per la determinazione dell'unica radice.

Con la nota del 1972, [86], di Norstrøm, inizia quel filone della letteratura che, spesso senza occuparsi dell'uso corretto del T.I.R. come criterio di scelta tra investimenti, nè del suo significato economico, si occupa solo della ricerca di condizioni sufficienti sempre più ampie per la sua unicità. Lo strumento usato dagli autori che seguiranno, anche se ad esso, spesso, non viene fatto esplicito riferimento, è il Teorema di Vincent, e più precisamente il metodo di indagine che detto Teorema suggerisce (vedi [124] pag. 127 e segg.), anche se risultati simili si possono ottenere mediante procedure diverse.

E' quindi opportuno, a questo punto della trattazione, descrivere tale Teorema e le sue più utili conseguenze.

Il Teorema di Vincent afferma:

Siano dai dei valori interi: $c_i \in Z$; se un'equazione ha solo radici semplici, operando sulla sua incognita una serie di sostituzioni del tipo:

$$x_{i+1} = c_i + \frac{1}{x_i}, \text{ con } x_0 = x, \tag{13}$$

dopo un numero finito di queste sostituzioni, indipendente dalla scelta dei valori interi c_i, si perviene ad una equazione trasformata i cui coefficienti presentano al più una variazione.

In concreto, il metodo di indagine per la ricerca delle soluzioni positive della (3) che possiamo dedurre dal Teorema, come detto anche in [50], è il seguente: nella $F^*(x;A) = 0$ operiamo anzitutto le sostituzioni:

$$T_0 : x = 1 + x_1, \text{ e}$$

$$T_1 : x = \frac{1}{1 + x_1}.$$

Se l'equazione ottenuta mediante la prima sostituzione presenta nessuna o una sola variazione nei suoi coefficienti della nuova incognita x_1, allora per la $F^*(x; A) = 0$ ci saranno nessuna o una sola soluzione $x^* : 1 < x^* < +\infty$; similmente, se i coefficienti dell'equazione ottenuta mediante al seconda trasformazione presentano nessuna o una sola variazione, ci sarà un numero uguale di soluzioni della $F^*(x; A) = 0$ nell'intervallo: $0 < x < 1$.

Se una trasformazione conduce ad una equazione con un numero di variazioni maggiore o uguale a due, per la Regola dei Segni di Cartesio, non siamo ancora in

grado di formulare una risposta. In questo caso, come suggerito in [65] e detto in [50], si prosegue componendo, mediante uno schema ripetitivo ad albero, in tutti i possibili modi, due e più trasformazioni del tipo T_0 e/o T_1, combinazioni che sono esprimibili anche nella forma delle (13).

Componendo, ad esempio, due trasformazioni, avremo le:

$$T_{11} : x = \frac{1 + x_2}{2 + x_2}$$

$$T_{01} : x = \frac{1}{2 + x_2}$$

$$T_{10} : x = \frac{2 + x_2}{1 + x_2} \qquad \text{e}$$

$$T_{00} : x = 2 + x_2,$$

mediante le quali, per $0 \leqslant x_2 < +\infty$, in base al numero di variazioni nei coefficienti delle trasformate, potremo ricavare informazioni sulla presenza di radici della (3) negli intervalli $1/2 < x < 1$; $0 < x < 1/2$; $1 < x < 2$ e $2 < x < \infty$ rispettivamente. Se l'equazione (3) non ha radici multiple, dopo un numero finito di tali composizioni, i coefficienti delle trasformate presenteranno nessuna o una sola variazione.

La laboriosità dei calcoli necessari ad eseguire le varie trasformazioni e le loro composizioni è fortemente diminuita mediante il calcolo di particolari tabelle, la cui costruzione richiede esclusivamente addizioni.

Se la trasformazione è la T_0, la prima riga della tabella è formata dai coefficienti dell'equazione in ordine di indice decrescente: $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$.

Il primo elemento della seconda e di ogni altra riga successiva è a_n, ed ogni elemento della tabella è dato dalla somma dei due elementi che gli stanno, rispettivamente, a sinistra e sopra nella tabella. Se, con notazione matriciale, denotiamo con $a_{i,j}$ l'elemento della tabella che si trova sulla i-esima riga e j-esima colonna, quanto precedentemente detto può essere formalizzato mediante le:

$$\begin{cases} a_{0,j} = a_{n-j}, & 0 \leqslant j \leqslant n; \\ a_{i,0} = a_n, & 0 \leqslant i \leqslant n+1; \\ a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1}, & 1 \leqslant i \leqslant n;\ 1 \leqslant j \leqslant n. \end{cases} \tag{14}$$

I coefficienti dell'equazione trasformata sono gli elementi della diagonale: $\{a_{n+1,0}; a_{n,1}; a_{n-1,2}; \ldots; a_{2,n-1}; a_{1,n}\}$, ovvero gli elementi $a_{i,j}$ tali che: $i + j = n + 1$, $1 \leqslant i \leqslant n + 1$, $0 \leqslant j \leqslant n$.

Similmente per una trasformazione T_1, con l'inversione, però, della prima riga, ovvero si dispongono i coefficienti in ordine di indice crescente: $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$.

In questo caso, la formalizzazione del procedimento è data dalle:

$$\begin{cases} a_{0,j} = a_j, & 0 \leq j \leq n; \\ a_{i,0} = a_0, & 0 \leq i \leq n+1; \\ a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1}, & 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n. \end{cases} \tag{15}$$

Descrizioni del procedimento si possono trovare anche in [30], [32], [47], [65], [98], [99], [100], [106], [124].

Da rilevare anche un'interessante relazione tra gli elementi di una tabella ed i termini della prima riga della stessa, vedi [13], [15] e [32], ovvero si ha che:

$$a_{i,j} = \sum_{k=0}^{j} \binom{i+j-k-1}{j-k} \cdot a_k, \quad i \geq 1, j \geq 1.$$

Per gli elementi della diagonale finale, dovendo per essi, come già detto, valere la relazione $i + j = n + 1$, avremo anche: .

$$a_{i,n+1-i} = \sum_{k=0}^{n+1-i} \binom{n-k}{n+1-i-k} a_k = \sum_{k=0}^{n+1-i} \binom{n-k}{i-1} \cdot a_k, \quad 1 \leq i \leq n+1.$$

Ovviamente il numero delle variazioni presenti nella diagonale finale è una limitazione superiore al numero delle radici, ed esistono varie proprietà che consentono un risparmio di calcoli per la determinazione di questa limitazione. Come si può vedere anche in [15], [32], [65], [98], [99], [100], esse sono le seguenti:

P.1) Ogni riga ha un numero di variazioni minore o uguale a quello della precedente;

P.2) Non occorre calcolare tutti gli elementi di una riga, basta arrestarsi a quello che appartiene alla diagonale;

P.3) Se gli elementi dell'i-esima riga, da $a_{i,0}$ fino ad $a_{i,n+1-i}$ non presentano variazioni, allora il numero delle variazioni degli elementi della diagnonale coincide con quello della sequenza: $\{a_{i,n+1-i}; a_{i-1,n+2-i}; \ldots, a_{2,n-1}; a_{1,n}\}$;

P.4) Se gli elementi dell'i-esima riga, da $a_{i,0}$ fino ad $a_{i,n+1-i}$ presentano una sola variazione, e gli elementi già calcolati della diagonale $(a_{i-1,n+2-i}, \ldots, a_{1,n})$ hanno lo stesso segno di $a_{i,n+1-i}$, anche gli elementi della diagonale presenteranno una sola variazione.

Alla luce delle proprietà esposte, è facilmente dimostrabile la condizione formulata da C. Nostrøm in [86] nel 1972, che consiste nell'imporre che la seconda riga della tabella della trasformazione T_1 operata sulla (3) presenti una sola variazione. Questo in quanto l'Autore limita la sua ricerca a T.I.R. positivi, ovvero a soluzioni $x : 0 < x < 1$ per la (3).

Definite le cumulate non scontate dei flussi di cassa come:

$$A_k = \sum_{j=0}^{k} a_j, \tag{16}$$

avendosi $A_0 = a_0$, il T.I.R. è unico e positivo se $\exists m, 0 \leqslant m < n$:

$$\begin{cases} A_k \leqslant 0 & \text{per } 0 \leqslant k \leqslant m; \\ A_k \geqslant 0 & \text{per } m+1 \leqslant k \leqslant n-1; \\ A_n > 0. \end{cases} \tag{17}$$

La condizione $A_n > 0$ discende dall'imporre $A_n \neq 0$, per escludere che $x^* = 1$ e quindi $r^* = 0$ siano radici della (3) e della (1) rispettivamente. Visto che la ricerca è rivolta solo a T.I.R. positivi, la condizione (17) sarà confrontata solo con quella di Jean. E' ovvio che sotto la condizione (10) sia i progetti (11) che i progetti (12) soddisfano anche alle (17). Per questi ultimi, però, è bene notare che l'essere $a_0 < 0$ e $a_n < 0$, comporta, nell'ambito più generale $-1 < r < \infty$, per la (10), l'esistenza di due T.I.R., uno positivo e uno negativo. Come detto in [12], [30] e [31], non è possibile stabilire relazioni di dominanza tra la condizione di Norstrom e quella di Soper.

Una generalizzazione della condizione di Norstrøm, però per flussi di cassa nel continuo e non nel discreto, è stata data nel 1975, in [92], da L. Peccati, usando la «funzione cumulativa dei margini», $S(t)$, definita, continua a destra ed a variazione limitata in ogni intervallo del semiasse positivo t, mediante la quale è garantita l'unicità del T.I.R. positivo sotto le condizioni:

a) $S(0) < 0$;

b) $\lim_{t \to \infty} S(t) > 0$;

c) $\exists\, t^* \in]0; +\infty[\ : S(t) < 0 \ \ \forall t < t^*$ e $S(t) > 0 \ \ \forall t > t^*$;

d) $\lim_{t \to \infty} e^{-\delta t} \cdot S(t) = 0 \qquad \forall \delta > 0$;

e) $\int_0^t t \cdot e^{-\delta t} \cdot S(t)\, dt$ esiste $\forall t \in]0; +\infty[$.

Ammettendo che le (16) possano cambiare di segno anche più di una volta, detti $T_1, T_2, \ldots, T_m$ gli istanti in cui avvengono le variazioni, D. Aucamp e W. Eckardt in [4], nel 1976, generalizzano la condizione di Nostrøm, sviluppando, come condizione sufficiente per l'esistenza di un T.I.R. ancora positivo, la seguente:

$$\begin{cases} m = 2k+1; \qquad k \in N^*; \\ A_n > 0; \\ \sum_{i=0}^{T_1 - 1} |A_i| \geqslant \sum_{i=T_1}^{T_m - 1} A_i^+; \end{cases} \tag{18}$$

dove con A_i^+ sono indicate le sole cumulate di segno positivo.

La forma (18) in cui qui è stata espressa la condizione di Aucamp ed Eckardt non è quella originale, [4], dove si suppone che il progetto abbia vita illimitata (A_n va sostituito da: $A_\infty = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$), situazione che per le (2) esula dalla nostra trattazione.

A causa del numero dispari di variazioni nella sequenza delle cumulate, da $A_0 < 0$ segue $A_n > 0$, strettamente, al solito, per escludere il T.I.R. $r^* = 0$; la terza delle condizioni (18) significa semplicemente che, formata la tabella della trasformazione T_1 per la (3), gli elementi iniziali negativi della seconda riga (le cumulate di Norstrom), hanno in valore assoluto, una somma maggiore della somma di tutte le cumulate positive precedenti l'ultima variazione di segno, di modo che la terza riga della tabella presenterà al più una variazione, e dato che $A_0 < 0$ e $A_n > 0$, per la proprietà P.4, la diagonale finale avrà una sola variazione. E' ovvio quindi che questa condizione è più generale di quella di Norstrom, la quale corrisponde al caso $m = 1$.

L'imporre direttamente che la terza riga della tabella della trasformazione T_1 presenti una sola variazione è la condizione che De Faro, in [32], presenta nel 1978, sotto il nome di «criterio della ξ-successione». Questa condizione, come dimostrato da Bernhard in [14], domina quella cosiddetta flessibile ed ovviamente domina la (18), ed è a sua volta dominata da quella che, sempre in [32], De Faro ottiene imponendo, ancor più direttamente, che la diagonale finale della tabella della trasformazione T_1 abbia una sola variazione di segno. Mantenendo la simbologia degli originali avremo, per la «ξ-successione»:

$$\begin{cases} \text{la sequenza } \{A_k^2\},\ 0 \leq k \leq n-1 \text{ presenti una sola variazione;} \\ A_n > 0, \end{cases}$$

e per la diagonale finale:

$$\begin{cases} \{A_i^{n+1-i}\},\ 0 \leq i \leq n \quad \text{presenti una sola variazione;} \\ A_n = A_n^1 > 0 \end{cases} \tag{19}$$

avando definito gli A_k^h nel modo seguente:

$$\begin{cases} A_0^h = a_0, & 1 \leq h \leq n+1; \\ A_k^1 = \sum_{i=0}^{k} a_k, & 0 \leq k \leq n; \\ A_k^h = A_{k-1}^h + A_k^{h-1},\ 1 \leq h \leq n,\ 1 \leq k \leq n. \end{cases} \tag{20}$$

La formalizzazione (20) coincide con la (15), basta osservare che $a_{i,j} = A_j^i$

Sempre in [32] De Faro, contemporaneamente a G. Olivieri in [89] e A. Pistoia in [98], estendono l'uso del procedimento anche alla ricerca di eventuali T.I.R. $r \in\ ]-1; 0]$. I risultati che essi ottengono possono essere formalizzati, come condizione sufficiente per l'unicità del T.I.R. della (1) in $]-1; +\infty[$, usando le notazioni (14) e (15), nel seguente modo:

Date le sequenze:

$$S^0 : \{a_{n+1-k,k}\},\ 0 \leq k \leq n, \tag{21}$$

con gli $a_{i,j}$ definiti dalle (14) e la:

$$S^1 : \{a_{n+1-k,k}\},\ 0 \leq k \leq n, \tag{22}$$

con gli $a_{i,j}$ definiti dalle (15), il progetto avente per D.P.V. la (1), sotto le condizioni:

$$a_0 < 0,\ a_n > 0,\ a_{1,n} \neq 0,$$

ammette un T.I.R. unico in $]-1; +\infty[$ se:
le sequenze (21) e (22) presentano rispettivamente una e zero variazioni (ed il T.I.R. $r^* \in\ ]-1; 0[$) oppure presentano rispettivamente zero ed una variazione (nel qual caso il T.I.R. $r^* \in\ ]0; +\infty[$).

Considereremo nel seguito l'ipotesi $a_{1,n} = 0$.

Lo spunto a De Faro per [32] è stato fornito da un lavoro di J. Hammond, [51], del 1974, nel quale l'Autore, considerando flussi di cassa nel continuo, dimostra come una limitazione superiore al numero delle radici della (1) in $]0; +\infty[$ sia fornita dal numero delle variazioni di segno della funzione del tempo t:

$$G_n(t) = \int_0^t \int_0^{q_1} \cdots \int_0^{q_n} f(q_n)\, dq_n\, dq_{n-1} \cdots dq_1 = \int_0^t G_{n-1}(q)\, dq$$

dove $f(t)$ rappresenta il «flusso di cassa» e:

$$G_1(t) = \int_0^t \int_0^q f(q)\, dq,$$

potendosi dimostrare che la D.P.V.:

$$P(\delta) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot f(t)\, dt, \quad \delta = \log(1 + r),$$

cambia di segno al massimo tante volte quante $G_n(t)$. Opportunamente ricondotta al caso discreto, $G_n(t)$ non è altro che la «cumulata», iterata $n + 1$ volte, dei flussi di cassa del progetto, e quindi questa condizione di J. Hammond consiste nell'ampliare la tabella della trasformazione T_1, aggiungendo quante righe si vogliono dopo l'ultima, sempre generando gli elementi con le regole date dalla (15).

Il numero delle radici della D.P.V. $r \in\ ]0; +\infty[$ non supera il numero delle variazioni in una qualunque riga di questa tabella «ampliata».

Proseguendo quanto fatto in [51], ed in base ai risultati pubblicati da J.W. Pratt nel 1979 in [105], sempre nel 1979, in [106], J. Hammond e J.W. Pratt formulano delle condizioni sufficienti per l'unicità del T.I.R. positivo nel caso

di flussi di cassa nel discreto, in base ad altre proprietà, molto utili dal punto di vista del calcolo pratico e più ampie delle P.1), . . ., P.4), atte a limitare superiormente il numero degli zeri della (3) appartenenti all'intervallo]0; 1[. Anche se i risultati esposti da J.W. Pratt in [105] consentono una analisi dei T.I.R. nell'ambito più generale $-1 < r < +\infty$, i risultati riportati in [106] riguardano solo T.I.R. positivi. E' comunque semplice l'estensione ai T.I.R.: $-1 < r < +\infty$.

Le proprietà sopramenzionate sono le seguenti:

P.5) Formata la tabella della trasformazione T_1, operata sulla (3) completando le righe oltre l'elemento della diagonale, il numero degli zeri positivi della D.P.V. (1) non supera il numero delle variazioni presenti negli elementi che stanno nell'ultima riga e nell'ultima colonna;

P.6) La tabella può essere ampliata aggiungendo quante colonne si vogliono, sempre calcolando gli elementi in base alle (15), e ponendo in esse $a_{0,i} = 0$, $\forall i > n$. La proprietà P.5) vale anche per queste tabelle.

P.7) Considerando le variazioni di segno negli elementi che si trovano su di un cammino che parta da un qualunque elemento nella prima colonna e termini all'ultimo elemento della seconda riga (quella delle comulate), il loro numero è ancora una limitazione al numero delle radici positive della (1). (I cammini più utili, in vista di un risparmio nel numero dei calcoli sono quelli formati da spostamenti orizzontali – da sinistra a destra – e diagonali – dal basso verso l'alto).

P.8) Formate le prime tre righe della tabella, anche con un numero di colonne $p > n$, se gli ultimi elementi delle tre righe: $a_{1,p}$, $a_{2,p}$ e $a_{3,p}$ sono tali che:

$$\begin{cases} a_{1,p} \cdot a_{2,p} < 0 \text{ e} \\ 2 \cdot a_{1,p} \cdot a_{3,p} \geqslant a_{2,p} \cdot (a_{1,p} + a_{2,p}), \end{cases}$$

il numero delle variazioni ottenuto mediante la P.5) può essere diminuito di 2.

P.9) Considerando percorsi come nella P.7), se da un percorso ad un altro vi è un decremento di variazioni, questo è sempre per un numero pari. Incontrando in un percorso nessuna o una sola variazione, otteniamo quindi delle limitazioni esatte.

Questo non è però vero se $a_{1,n} = \sum_{k=0}^{n} a_k = 0$, cioè se la cumulata dei flussi di cassa è nulla; in questo caso, $r^* = 0$ è T.I.R. del progetto, e le variazioni, da un cammino ad un altro successivo, possono diminuire anche di un numero dispari, per cui non è detto che, avendo in un cammino una sola variazione, questa fornisca una limitazione esatta.

In ritardo rispetto a De Faro, anche R. Bernhard presenta, in [13], una sua condizione sufficiente per l'unicità del T.I.R. positivo, definendo le quantità:

$$B_t = \sum_{j=0}^{t} \binom{n-j}{t-j} \cdot a_j, \quad 0 \leq t \leq n,$$

ed imponendo che esista almeno un $m: 0 \leq m \leq n$, per il quale:

$$\begin{cases} B_0 < 0; \\ B_t \leq 0, \quad \forall t : 1 \leq t \leq m; \\ B_t \geq 0, \quad \forall t : m+1 \leq t \leq n-1; \\ B_n > 0. \end{cases} \tag{23}$$

Lo stesso Bernhard dimostra in [13] che:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (1+r)^{n-j} = \sum_{t=0}^{n} B_t r^{n-t},$$

dando così una immediata interpretazione, in base alla Regola di Cartesio, della sua condizione: se la sequenza dei B_t presenta una sola variazione, ci sarà una sola soluzione $r^* > 0$. Ma, ponendo al solito $(1+r)^{-1} = x$, avremo anche che:

$$(1+r)^{-n} \cdot \sum_{t=0}^{n} B_t r^{n-t} = (1+r)^{-n} \cdot \sum_{j=0}^{n} a_j (1+r)^{n-j} =$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (1+r)^{-j} = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j,$$

ovvero i B_t altro non sono se non i coefficienti che si ottengono operando sulla (3) una trasformazione del tipo T_1, ed ovviamente coincidono con la (19) di De Faro, nonchè con le analoghe condizioni di G. Olivieri e A. Pistoia ([89] e [98]).

Questa coincidenza tra la condizione (23) e la (19) di De Faro viene riconosciuta dallo stesso Bernhard in [15], dove, applicando il Teorema di Vincent non alla (3) ma alla:

$$\sum_{t=0}^{n} B_t r^{n-t} = 0,$$

operando sia una trasformazione del tipo T_1 che una T_0, fornisce delle condizioni sufficienti per l'unicità del T.I.R. positivo che possono essere formalizzate nel seguente modo:
se:

$$\begin{cases} B_0 < 0; \\ \sum_{t=0}^{s} B_t \leqslant 0, \quad \forall s : 1 \leqslant s \leqslant p-1, (1 \leqslant p \leqslant n-1) \\ \sum_{t=0}^{p} B_t > 0; \\ B_t \geqslant 0, \qquad \forall t : p+1 \leqslant t \leqslant n-1; \\ B_n > 0; \end{cases}$$

allora il T.I.R. è unico e maggiore di uno;
se:

$$\begin{cases} B_n > 0; \\ \sum_{t=0}^{s} B_{n-t} \geqslant 0, \quad \forall s : 1 \leqslant s \leqslant p-1, \ (1 \leqslant p \leqslant n-1); \\ \sum_{t=0}^{p} B_{n-t} < 0; \\ B_{n-t} \leqslant 0, \qquad \forall t : p+1 \leqslant t \leqslant n-1; \\ B_0 < 0; \end{cases}$$

allora il T.I.R. è unico e compreso fra zero e uno.

E' facile vedere il legame tra queste condizioni e la proprietà P.4).

Le ultime e più ampie condizioni sufficienti per l'unicità del T.I.R. si trovano infine in [99] e [100], del 1979, di A. Pistoia. Proseguendo gli studi svolti in [93], [94], [95], [96], [97], [98], dopo aver definito in [98] le:

$$\begin{cases} S_{k,q} = \sum_{h=0}^{k} S_{h,q-1}, \quad q \geqslant 1, \ 0 \leqslant k \leqslant n+1-q; \\ S_{k,0} = a_k, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n; \end{cases}$$

e le:

$$\begin{cases} S^*_{k,q} = \sum_{h=0}^{k} S^*_{h,q-1}, \quad q \geqslant 1, \ 0 \leqslant k \leqslant n+1-q; \\ S^*_{k,0} = a_{n-k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n; \end{cases}$$

che altro non sono se non le tabelle relative, rispettivamente, ad una trasformazione T_1 ed una T_0, operate sulla (3) ovvero le (15) e (14) di questa nota (si osservi come, contrariamente alla notazione da noi usata, in $S_{k,q}$ e $S^*_{k,q}$, k è

indice di colonna e q di riga), estende i risultati ottenuti in [98] introducendo le:

$$\begin{cases} S^p_{k,q} = \sum_{h=0}^{k} S^p_{h,q-1}, \quad 0 \leq k \leq n+1-q, \ p \in N; \\ S^p_{k,0} = S^{p-1}_{n-k,k+1}, \\ S^0_{n-k,k+1} = a_k, \quad 0 \leq k \leq n; \end{cases} \tag{24}$$

e le:

$$\begin{cases} S^{p,m}_{k,q} = \sum_{h=0}^{k} S^{p,m}_{h,q-1}, \quad 0 \leq k \leq n+1-q; \ m, p \in N; \\ S^{p,m}_{k,0} = S^{p,m-1}_{k,n-k+1}; \\ S^{p,0}_{k,n-k+1} = S^p_{k,n-k+1}, \quad 0 \leq k \leq n. \end{cases} \tag{25}$$

Avendosi:

$$S^p_{k,q} = \sum_{h=0}^{k-1} S^p_{h,q-1} + S^p_{k,q-1} = S^p_{k-1,q} + S^p_{k,q-1} \text{ e}$$

$$S^{p,m}_{k,q} = \sum_{h=0}^{k-1} S^{p,m}_{h,q-1} + S^{p,m}_{k,q-1} = S^{p,m}_{k-1,q} + S^{p,m}_{k,q-1},$$

si può notare come le (24), per un indice p generico, altro non siano se non le tabelle del Teorema di Vincent che otteniamo iterando p volte, sulla (3), una trasformazione del tipo T_1; le (25), invece, corrispondono anch'esse a tabelle del Teorema di Vincent, ma sono ora quelle che otteniamo iterando inizialmente p volte sulla (3) una trasformazione del tipo T_1, e facendo seguire a queste m trasformazioni del tipo T_0.

Consideriamo allora le sequenze:

$$S^p : \{S^p_{n-k,k+1}\}, p \in N, \qquad 0 \leq k \leq n \text{ e} \tag{26}$$

$$S^{p,m} : \{S^{p,m}_{n-k,\ k+1}\}, m, p \in N, 0 \leq k \leq n. \tag{27}$$

Ponendo allora:

$$
\begin{cases}
r = i_1; \\
i_{p-1} = \dfrac{1}{1+i_p}, \quad p \geq 2; \\
\nu_0 = \dfrac{1}{1+i_1}; \\
\nu_{p-1} = \dfrac{1}{1+\nu_p}; \\
\lambda_p = \prod_{k=0}^{p-1} (\nu_k)^n;
\end{cases}
\tag{28}
$$

potremo scrivere la (3), rispettivamente mediante le (24), (25) e (28), come:

$$F(r;A) = \lambda_p \cdot \sum_{k=0}^{n} S^p_{n-k,k+1} \cdot i_p^k, \text{ e}$$

$$F(r;A) = \lambda_p \cdot \sum_{k=0}^{n} S^{p,m}_{n-k,k+1} \cdot (i_p - m)^k$$

dalle quali A. Pistoia deduce, mediante le solite proprietà P.1), . . ., P.4), tra gli altri, i seguenti risultati:

(29) Il numero degli zeri della (1) che appartengono all'intervallo $i_p > 0$ non supera il numero delle variazioni della sequenza (26); se in detta sequenza i termini non presentano variazioni, senza essere tutti nulli, dello stesso segno, nello stesso intervallo, è la D.P.V. (1).

(30) Il numero degli zeri della (1) che appartengono all'intervallo $i_p > m$ non supera il numero delle variazioni della sequenza (27). Se in detta sequenza i termini non presentano variazioni, senza essere tutti nulli, dello stesso segno nello stesso intervallo è la D.P.V. (1).

Come in [98], anche in [99] l'Autore estende l'uso del Teorema di Vincent dallo studio del segno della D.P.V. (1) allo studio della sua monotonia e della sua convessità, costruendo le opportune tabelle relative, rispettivamente, ad $F'(r;\ A)$ e $F''(r;\ A)$. Per la costruzione di queste tabelle basta sostituire, nelle (14) e (15), al generico coefficiente a_k del polinomio, le espressioni ka_k e $k(k-1)\,a_k$ rispettivamente.

In [100], sempre del 1979, infine, mediante le:

$$\begin{cases} R^p_{k,q} = \sum_{h=0}^{k} R^p_{h,q-1}, & 0 \leq k \leq n+1-q; \\ R^p_{k,0} = R^{p-1}_{k,n-k+1}, & 0 \leq k \leq n; \\ R^0_{k,n-k+1} = a_{n-k}, & 0 \leq k \leq n; \end{cases}$$

e le:

$$\begin{cases} R^{p,m}_{k,q} = \sum_{h=0}^{k} R^{p,m}_{h,q-1}, & 0 \leq k \leq n+1-q; \\ R^{p,m}_{k,0} = R^{p,m-1}_{n-k,k+1}, & 0 \leq k \leq n; \\ R^{p,0}_{n-k,k+1} = R^p_{n-k,k+1}, & 0 \leq k \leq n; \end{cases}$$

considera le sequenze:

$$R^p : \{R^p_{n-k,k+1}\};\ p \in N;\ 0 \leq k \leq n; \tag{31}$$

e

$$R^{p,m} : \{R^{p,m}_{n-k,k+1}\}; p, m \in N; 0 \leq k \leq n; \tag{32}$$

che altro non sono se non i coefficienti del polinomio ottenuto iterando sulla (3), rispettivamente, p trasformazioni del tipo T_0 le (31) e p trasformazioni del tipo T_0 seguite da m del tipo T_1 le (32).

Mediante i segni dei termini di queste sequenze otteniamo, al solito, una limitazione superiore al numero degli zeri della (3) in opportuni intervalli.

Il procedimento più generale di utilizzazione del Teorema di Vincent, come illustrato anche in [50] e [70], può essere formalizzato, partendo dalla

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_0^j = 0, \tag{3}$$

nel seguente modo.

Osserviamo anzitutto che ogni composizione di quante si vogliono (in numero, ad esempio, di k) trasformazioni T_0 e/o T_1 può essere espressa nella forma:

$$x_0 = \frac{a + bx_k}{c + dx_k}$$

che noi identifichiamo con la:

$$(a, c; b, d) \cong \frac{a + bx}{c + dx}.$$

Avremo quindi che:

$$\begin{cases} x = x_0 \cong (0, 1; 1, 0); \\ T_0 : x_0 = 1 + x_1 \cong (1, 1; 1, 0); \\ T_1 : x_0 = \dfrac{1}{1 + x_1} \cong (1, 1; 0, 1) \end{cases} \tag{33}$$

ed inoltre:

$$\begin{cases} T_0[(a, c; b, d)] = (a + b, c + d; b, d) \\ T_1[(a, c; b, d)] = (a + b, c + d; a, c). \end{cases} \tag{34}$$

Se, componendo un numero k di trasformazioni qualsivoglia, T_0 e/o T_1, abbiamo ottenuto la:

$$x_0 = \frac{a_k + b_k x_k}{c_k + d_k x_k},$$

calcolando i due limiti, per $x_k \to 0^+$ e per $x_k \to +\infty$, avremo l'intervallo:

$$\frac{a_k}{c_k} < x_0 < \frac{b_k}{d_k} \text{ oppure } \frac{b_k}{d_k} < x_0 < \frac{a_k}{c_k}, \tag{35}$$

a seconda che il numero delle trasformazioni T_1 operate sia pari o dispari.

Il numero delle radici della (3) contenute nell'intervallo definito dalle (35) non supera il numero delle variazioni di segno negli elementi della diagonale finale della tabella del Teorema di Vincent relativa alla composizione effettuata.

Detta $\{a^{k-1}_{n+1,0}; a^{k-1}_{n,1}; \ldots; a^{k-1}_{2,n-1}; a^{k-1}_{1,n}\}$ la diagonale finale della tabella relativa alla composizione delle prime $(k - 1)$ trasformazioni, quanto detto in precedenza può essere formalizzato mediante le:

$$\begin{cases} a^k_{0,j} = a^{k-1}_{n+1-j,j}; & 0 \leqslant j \leqslant n; \\ a^k_{i,0} = a^{k-1}_{n+1,0}, & 0 \leqslant i \leqslant n+1; \\ a^k_{i,j} = a^k_{i-1,j} + a^k_{i,j-1}, & 1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant n; \end{cases} \tag{14*}$$

se la k-esima trasformazione operata è la T_0, e le

$$\begin{cases} a^k_{0,j} = a^{k-1}_{j+1,n-j}, & 0 \leqslant j \leqslant n; \\ a^k_{i,0} = a^{k-1}_{1,n}, & 0 \leqslant i \leqslant n+1; \\ a^k_{i,j} = a^k_{i-1,j} + a^k_{i,j-1}, & 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant n; \end{cases} \tag{15*}$$

se la k-esima trasformazione operata è la T_1.

La formalizzazione data dalle (34) consente di precisare gli intervalli a cui si fa riferimento in [99] pag. 13 R/4), nonchè in [100] pag. 2 R/1), intervalli in cui valgono le limitazioni superiori al numero degli zeri della (3) fornite dalle sequenze (26), (27), (31) e (32).

Componendo p trasformazioni del tipo T_1, gli estremi dell'intervallo (35) si ottengono risolvendo il sistema di equazioni alle differenze finite (vedi le (34)):

$$\begin{cases} a_p = a_{p-1} + b_{p-1} \\ c_p = c_{p-1} + d_{p-1} \\ b_p = a_{p-1} \\ d_p = c_{p-1} \end{cases}$$

con le condizioni iniziali, ottenute dalle (33):

$$(a_0, c_0; b_0, d_0) = (0, 1; 1, 0) \quad \text{e}$$
$$(a_1, c_1; b_1, d_1) = (1, 1; 0, 1).$$

Tramite la soluzione delle equazioni:

$$a_p - a_{p-1} - a_{p-2} = 0 \quad \text{e}$$
$$c_p - c_{p-1} - c_{p-2} = 0$$

si perviene alla soluzione, data dalle:

$$\begin{cases} a_p = \dfrac{1}{2^p \cdot \sqrt{5}} \cdot [(1+\sqrt{5})^p - (1-\sqrt{5})^p] \\ c_p = \dfrac{1}{2^{p+1} \cdot \sqrt{5}} \cdot [(1+\sqrt{5})^{p+1} - (1-\sqrt{5})^{p+1}] \\ b_p = \dfrac{1}{2^{p-1} \cdot \sqrt{5}} \cdot [(1+\sqrt{5})^{p-1} - (1-\sqrt{5})^{p-1}] \\ d_p = \dfrac{1}{2^p \cdot \sqrt{5}} \cdot [(1+\sqrt{5})^p - (1-\sqrt{5})^p] \end{cases} \tag{36}$$

da cui otteniamo:

$$\frac{a_p}{c_p} = 2 \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^p - (1-\sqrt{5})^p}{(1+\sqrt{5})^{p+1} - (1-\sqrt{5})^{p+1}} \quad \text{e}$$
$$\frac{b_p}{d_p} = 2 \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{p-1} - (1-\sqrt{5})^{p-1}}{(1+\sqrt{5})^p - (1-\sqrt{5})^p}, \quad p = 1, 2, \ldots.$$

Similmente, componendo inizialmente p trasformazioni del tipo T_1 seguite da m trasformazioni del tipo T_0, siamo condotti alla soluzione del sistema:

$$\begin{cases} a_{m+p} = a_{m-1+p} + b_{m-1+p} \\ c_{m+p} = c_{m-1+p} + d_{m-1+p} \\ b_{m+p} = b_{m-1+p} \\ d_{m+p} = d_{m-1+p} \end{cases}$$

con la condizione iniziale $(a_p, c_p; b_p, d_p)$ espressa dalle (36), che si trasforma in:

$$\begin{cases} b_{m+p} = b_p \\ d_{m+p} = d_p \\ a_{m+p} = a_{m-1+p} + b_p \\ c_{m+p} = c_{m-1+p} + d_p \end{cases}$$

dal quale si deduce facilmente come a_{m+p} e c_{m+p} altro non sono se non progressioni aritmetiche di ragioni, rispettivamente, b_p e d_p, e termini iniziali a_p e c_p (vedi (36)), mentre le b_{m+p} e d_{m+p} sono successioni costanti uguali rispettivamente a b_p e d_p.

Per cui avremo, per gli estremi dell'intervallo (35):

$$\frac{a_{m+p}}{c_{m+p}} = 2 \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^p - (1-\sqrt{5})^p + 2m \cdot [(1+\sqrt{5})^{p-1} - (1-\sqrt{5})^{p-1}]}{(1+\sqrt{5})^{p+1} - (1-\sqrt{5})^{p+1} + 2m \cdot [(1+\sqrt{5})^p - (1-\sqrt{5})^p]} \quad \text{e}$$

$$\frac{b_{m+p}}{d_{m+p}} = 2 \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{p-1} - (1-\sqrt{5})^{p-1}}{(1+\sqrt{5})^p - (1-\sqrt{5})^p} \quad , \; p = 1, 2, \ldots$$

Considerando le (31), vedi [100], avremo invece il sistema:

$$\begin{cases} a_p = a_{p-1} + b_0 \\ c_p = d_{p-1} + d_0 \\ b_p = b_0 \\ d_p = d_0 \end{cases}$$

che, per le (33), ci fornisce le:

$$\begin{cases} a_p = a_{p-1} + 1 \\ c_p = c_{p-1} \\ b_p = 1 \\ d_p = 0 \end{cases}$$

ovvero la soluzione

$$\begin{cases} a_p = p \\ c_p = 1 \\ b_p = 1 \\ d_p = 0 \end{cases}$$

che genera gli intervalli: $p < x < +\infty$.

Per quanto concerne infine le (32), avremo il sistema:

$$\begin{cases} a_{p+m} = a_{p+m-1} + b_{p+m-1} \\ c_{p+m} = c_{p+m-1} + d_{p+m-1} \\ b_{p+m} = a_{p+m-1} \\ d_{p+m} = c_{p+m-1} \end{cases}$$

con le condizioni iniziali:

$$(a_p, c_p; b_p, d_p) = (p, 1; 1, 0) \quad \text{e}$$
$$(a_{p+1}, c_{p+1}; b_{p+1}, d_{p+1}) = (p+1, 1; p, 1),$$

la cui soluzione sarà:

$$\begin{cases} a_{p+m} = \dfrac{1}{\sqrt{5} \cdot 2^m} \left\{ \dfrac{p}{2} \cdot [(1+\sqrt{5})^{m+1} - (1-\sqrt{5})^{m+1}] + (1+\sqrt{5})^m - (1-\sqrt{5})^m \right\} \\ c_{p+m} = \dfrac{1}{\sqrt{5} \cdot 2^{m+1}} \cdot [(1+\sqrt{5})^{m+1} - (1-\sqrt{5})^{m+1}] \\ b_{p+m} = \dfrac{1}{\sqrt{5} \cdot 2^{m-1}} \cdot \left\{ \dfrac{p}{2} \cdot [(1+\sqrt{5})^m - (1-\sqrt{5})^m] + \right. \\ \qquad \left. + (1+\sqrt{5})^{m-1} - (1-\sqrt{5})^{m-1} \right\} \\ d_{p+m} = \dfrac{1}{\sqrt{5} \cdot 2^m} \cdot [(1+\sqrt{5})^m - (1-\sqrt{5})^m] \end{cases}$$

la quale conduce, riguardo alle (35), alle:

$$\frac{a_{m+p}}{c_{m+p}} = 2 \cdot \frac{\left\{ \dfrac{p}{2} \cdot [(1+\sqrt{5})^{m+1} - (1-\sqrt{5})^{m+1}] + (1+\sqrt{5})^m - (1-\sqrt{5})^m \right\}}{(1+\sqrt{5})^{m+1} - (1-\sqrt{5})^{m+1}}$$

e

$$\frac{b_{p+m}}{d_{p+m}} = 2 \cdot \frac{\left\{ \dfrac{p}{2} \cdot [(1+\sqrt{5})^m - (1-\sqrt{5})^m] + (1+\sqrt{5})^{m-1} - (1-\sqrt{5})^{m-1} \right\}}{(1+\sqrt{5})^m - (1-\sqrt{5})^m}$$

con $m = 1, 2, \ldots$.

La revisione delle bozze mi ha consentito un ampliamento della bibliografia, rispetto a quella originale, che ha permesso di segnalare lavori pubblicati su questo argomento negli ultimi anni e non considerati nella precedente stesura dell'articolo. Ulteriori condizioni sufficienti per l'unicità del T.I.R. si possono trovare ai numeri [17], [18], [29], [33], [50], [60], [70], [71], [111] e [112] della Bibliografia.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALCHIAN A.A., «The Rate of Interest, Fisher's Rate of Return over Costs and Keynes' Internal Rate of Return». *American Economic Review*, dicembre 1955, vol. 45, pp. 938-943.

[2] ANDRETTA A., «Nota sul Teorema del Troncamento e sul Tasso Interno di Rendimento», *Ricerche Economiche*, dicembre 1977, vol. 31, pp. 375-387.

[3] ARROW K.J. e D. LEVHARI, «Uniqueness of the Internal Rate of Return with Variable Life of Investment», *The Economic Journal*, settembre 1969, vol. 79, pp. 560-566.

[4] AUCAMP D.L. e W.L. ECKARDT, «A Sufficient Condition for a Unique Non-negative Internal Rate of Return: Comment». *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, giugno 1976, vol. 11, pp. 329-332.

[5] AVONDO-BODINO G., «Sulla Scelta tra Investimenti». *Banche e Banchieri*, anno III, n. 7-8, 1976.

[6] BAILEY M.J., «Formal Criteria for Investment Decisions», *Journal of Political Economy*, ottobre 1959, vol. 67, pp. 476-488.

[7] BELLIERI A. e L. VANNUCCI, «Una Generalizzazione del Metodo TRM per la Determinazione della Redditività di Operazioni di Leasing». *Quaderno dell'Istituto di Matematica Applicata alle Scienze Economiche e Sociali*, Università degli Studi di Firenze.

[8] BENASSI R., «Il Criterio del Tasso di Rendimento nella Scelta tra Investimenti Alternativi». *Quaderno n. 22 dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria*, Università degli Studi di Bologna, 1981.

[9] BERNHARD R.H., «Discount Methods for Expenditure Evaluation. A clarification in their Assumptions», The Journal of Industrial Engineering, *gennaio-febbraio 1962, vol. 13, pp. 19-27.*

[10] BERNHARD R.H., «On the Inconsistency of the Soper and Sturm-Kaplan Conditions for Uniqueness of the Internal Rate of Return». *The Journal of Industrial Engineering*, agosto 1967, vol. 18, pp. 498-500.

[11] BERNHARD R.H., «A Comprehensive Comparison and Critique of Discounting Indices Proposed for Capital Investment Evaluation». The Engineering Economist, 1971, vol. 16, pp. 157-186.

[12] BERNHARD R.H., «Unrecovered Investment, Uniqueness of the Internal Rate of Return, and the Question of Project Acceptability». *Journal of Financial and Quantitative analysis*, marzo 1977, vol. 12, pp. 33-38.

[13] BERNHARD R.H., «A More General Sufficient Condition for a Unique Internal Rate of Return»., *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, giugno 1979, vol. 14, pp. 337-341.

[14] BERNHARD R.H., «A Simpler Internal Rate of Return Uniqueness Condition which Dominates that of De Faro and Soares». *The Engineering Economist*, 1979, vol. 24, pp. 71-74.

[15] BERNHARD R.H., «A Simplification and an Extension of the Bernhard-De Faro Sufficient Condition for a Unique Internal Rate of Return». *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, marzo 1980, vol. 15, pp. 201-209.

[16] BERNHARD R.H. e C.J. NORSTRØM, «A Further Note on Unrecovered Investment, Uniqueness of the Internal Rate, and the Question of Project Acceptability». *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, giugno 1980, vol. 15, pp. 421-423.

[17] BEZZA E.M., «Le Concept d'Intérets Cumulés: un Algorithme pour Depasser le Probleme de Multiplicité des T.I.R.». *Economies et Sociétés*, 18, 11-12, 1984.

[18] BEZZA E.M., «Le Concept d'Intérets Cumulés: Reponse a M. Jegers». *Economies et Sociétés*, Dicembre 1986.

[19] BOULDING K.E., «The Theory of the Single Investment». *Quarterly Journal of Economics*, maggio 1935, vol. 49, pp. 475-494.

[20] CALIRI GRECO M., «Sulla Scelta degli Investimenti». Studi in onore di S. Vianelli.

[21] CALIRI GRECO M., «Ancora sulla Scelta degli Investimenti». *Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali*, anno VIII, fascicolo I.

[22] CANADA J.R., «Rate of Return: A Comparison between the Discounted Cash-Flow Model and a Model Which Assumes an Explicit Reinvestment Rate for the Uniform Income Cash-Flow Case». *The Engineering Economist*, 9, pp. 1-15.

[23] CAPETTINI R., R.A. GRIMLUND e H.R. TOOLE, «Comment: the Unique, Real Internal Rate of Return». *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, dicembre 1979, vol. 14, pp. 1091-1094.

[24] CASTAGNOLI E., «Sul Confronto fra i Criteri del Risultato Economico Attualizzato e del Tasso di Rendimento». *Studi e Ricerche*, Facoltà di Economia e Commercio dell'Università degli Studi di Parma, 1975, vol. 12, pp. 127-133.

[25] CASTAGNOLI E. e L. PECCATI, «Alcune Considerazioni in Tema di Classificazione degli Investimenti». *Giornale degli Economisti e Annali di Economia*, marzo-aprile 1973, vol. 32, pp. 235-252.

[26] CASTAGNOLI E., «Quasi una Fiaba sul Tasso di Rendimento», *Risparmio*, n. 2, 1980.

[27] CERE' M., «Tasso interno di Rendimento di un'Assicurazione Mista Semplice». *Quaderno n. 33 dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria*, Università degli Studi di Bologna, 1984.

[28] DAUGHERTY C.R.S., «On the Rate of Return and the Rate of Profit». *The Economic Journal*, Dicembre 1972, vol. 82, pp. 1324-1350.

[29] DESAI P.A., «On the Internal Rate of Return Criterion: a Note». *The Engineering Economist*, vol. 21, n. 2.

[30] DE FARO C., «A Sufficient Condition for a Unique Non-negative Internal Rate of Return: a Comment». *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, settembre 1973, vol. 8, pp. 683-684.

[31] DE FARO C., «On the Internal Rate of Return Criterion». *The Engineering Economist*, 1974, vol. 19, pp. 165-194.

[32] DE FARO C., «A Sufficient Condition for a Unique Non-negative Internal Rate of Return: Further Comment», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, settembre 1978, vol. 13, pp. 577-584.

[33] DE FARO C., «On the Internal Rate of Return Criterion: a Reply», *The Engineering Economist*, vol. 21, n. 2.

[34] DE FARO C. e L. SOARES, «A Flexible Sufficient Condition for a Unique Non-negative Internal Rate of Return», *The Engineering Economist*, 1978, vol. 23, pp. 117-127.

[35] EATWELL J., «A Note on the Truncation Theorem», *Kyklos*, 1975, vol. 28, fasc. 4, pp. 870-875.

[36] ELEMI G. e G. ZANDANO, «Alcune Osservazioni sul Metodo del Beneficio Attualizzato come Criterio di Selezione dei Progetti di Investimento». *L'Industria*, luglio-dicembre 1971, pp. 316-321.

[37] FILIPPINI C. e L. FILIPPINI, «Nota Critica al Teorema del Troncamento», *Ricerche Economiche*, gennaio-dicembre 1974, vol. 28, pp. 3-18.

[38] FISHER I., *The Rate of Interest*, MacMillan, New York, 1907.

[39] FISHER I., *The Theory of Interest*, MacMillan, New York, 1930.

[40] FISHER L., «An Algorithm for Finding Exact Rates of Return», *The Journal of Business*, 1966.

[41] FLAIANO R., «Sull'Equazione del Tasso Interno di Rendimento di un Investimento. Computo delle Radici Reali», Quaderni dell'Istituto di Scienze Attuariali, Facoltà di Scienze Statistiche, Demografiche ed Attuariali, Università degli Studi di Roma, 1971.

[42] FLEMMING J.S. e J.F. WRIGHT, «Uniqueness of the Internal Rate of Return: a Generalization», *The Economic Journal*, giugno 1971, vol. 81, pp. 256-262.

[43] FROST R.A. e L.D. SCHALL, «Ramsey's Investment Criterion», *Journal of Political Economy*, luglio-agosto 1972, vol. 80, pp. 803-806.

[44] GRONCHI S., «On Investment Criteria Based on the Internal Rate of Return», *Quaderni dell'Istituto di Economia*, Università degli Studi di Siena, aprile 1984, n. 25.

[45] GRONCHI S., «On Karmel's Criterion for Optimal Truncation», *Quaderni dell'Istituto di Economia*, Università degli Studi di Siena, n. 26.

[46] GRONCHI S., «On Truncation Theorems», *Quaderni dell'Istituto di Economia*, Università degli Studi di Siena, giugno 1984, n. 27.

[47] GRONCHI S., «Tasso Interno di Rendimento e Valutazione dei Progetti: un'Analisi Teorica», *Collana dell'Istituto di Economia* della Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie dell'Università degli Studi di Siena, 1984.

[48] GRONCHI S. e M. LONZI, «Sulla Concordanza di Alcuni Contributi in Tema di Tasso Interno di Rendimento». *Note Economiche*, n. 5/6, pp. 139-142, 1985.

[49] GRONCHI S., «On Investment Criteria Based on the Internal Rate of Return», *Oxford Economic Papers*, vol. 38, n. 1, pp. 1-7, 1986.

[50] HAJDASINSKI M.M., «A Complete Method for Separation of Internal Rates of Return», *The Engineering Economist*, vol. 28, n. 3, 1983.

[51] HAMMOND J.S., «Bounding the Number of Rates of Return of a Project», *Harward Business School Working Papers*, n. 74-1, 1974.

[52] HERBST A.F., «A FORTRAN IV Procedure for Determining Return of Invested Capital», *Management Science*, febbraio 1974, vol. 20, p. 1022.

[53] HERBST A., «The Unique, Real Internal Rate of Return: Caveat Emptor», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, giugno 1978, vol. 13, pp. 363-370.

[54] HIRSHLEIFER J., «On the Theory of Optimal Investment Decision», *Journal of Politcal Economy*, agosto 1958, vol. 66, pp. 329-352.

[55] HIRSHLEIFER J., «Marginal Efficiency of Capital: Comment», *The Economic Journal*, settembre 1959, vol. 69, pp. 592-593.

[56] HIRSHLEIFER J., «On Multiple Rates of Return: Comment», *The Journal of Finance*, marzo 1969, vol. 24, p. 98.

[57] JACCOD P., S. DE CRISTOFARO e E. FABIANO, «Un Confronto fra Metodi Attualizzati di Scelta degli Investimenti», *Note Economiche*, 1982, n. 3, pp. 43-62.

[58] JEAN W.H., «On Multiple Rates of Return», *Journal of Finance*, marzo 1968, vol. 23, pp. 187-191.

[59] JEAN W.H., «Reply», *The Journal of Finance*, marzo 1969, vol. 24, pp. 99-100.

[60] JEGERS M., «Le Concept d'Intérets Cumulés: Necessaire ou Suffisant?», *Economies et Sociétés*, Dicembre 1986.

[61] KAPLAN S., «A Note on a Method for Precisely Determining the Uniqueness or Non-uniqueness of the Internal Rate of Return for a Proposed Investment», *The Journal of Industrial Engineering*, gennaio-febbraio 1965, vol. 16, pp. 70-71.

[62] KAPLAN S., «Computer Algorithms for Finding Exat Rates of Return», *Journal of Business*, ottobre 1967, vol. 40, pp. 389-392.

[63] KARMEL P.H., «The Marginal Efficiency of Capital», *Economic Record*, dicembre 1959, vol. 35, pp. 429-434.

[64] KIRSHENBAUM P.S., «A Resolution of the Multiple Rate of Return Paradox», *The Engineering Economist*, vol. 10, pp. 11-16.

[65] LAZZAR F., «Condizioni Sufficienti per l'Unicità del Tasso Interno di Rendimento», *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, luglio-dicembre 1980, vol. 43, pp. 81-104.

[66] LEVI E., «Sul Tasso di Interesse come Indice», *Giornale di Matematica Finanziaria*, Serie III, vol. 8, n. 3, 1950.

[67] LEVI E., *Corso di Matematica Finanziaria ed Attuariale*, Milano, Giuffrè 1964.

[68] LEVI E., *La Scelta degli Investimenti*, Boringhieri, Torino, 1967.

[69] LONZI M., «Significatività Economica del Tasso Interno di Rendimento mediante il Valore Attuale di un Progetto e dei suoi Sottoprogetti», *Note Economiche*, n. 5/6, pp. 143-157, 1985.

[70] LONZI M., «Unicità del Tasso Interno di Rendimento mediante il Computer», *Quaderno n. 35 dell'Istituto di Matematica*, Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie dell'Università degli Studi di Siena, marzo 1986.

[71] LONZI M., «Unicité du T.I.R. et Interets Cumulés: un Commentaire», Economies et Sociétes, n. 8, pp. 25-36, 1988.

[72] LORIE J. e L.J. SAVAGE, «Three Problems in Rationing Capital», *Journal of Business*, ottobre 1955, vol. 28, pp. 229-239.

[73] LUCCHINI G., «Su un Teorema e due Corollari di Techroew, Robichek e Montalbano», *Fascicolo n. 30 dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria*, Università degli Studi di Pavia, 1970.

[74] LUTZ F. e V. LUTZ, *The Theory of Investment of the Firm*, Princeton University Press, Princeton (N.J.), 1951.

[75] MAGNANI U., «Questioni Critiche in Operazioni Finanziarie Pure», *Fascicolo n. 23 dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria*, Università degli Studi di Pavia, 1969.

[76] MAGNANI U., «Sopra un Problema Inverso nella Dinamica di Operazioni Finanziarie», *Fascicolo n. 27 dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria*, Università degli Studi di Pavia, 1969.

[77] MAGNANI U., «Su Certi Problemi di Caratterizzazione e di Scelta di Operazioni Finanziarie», *Fascicolo n. 36 dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria*, Università degli Studi di Pavia.

[78] MAGNANI U., «Sul Criterio T.R.M., per la Scelta di Progetti», *Atti del Convegno sulle Applicazioni della Matematica alla Ricerca Operativa ed alle Scienze Attuariali*. A cura dell'Istituto di Statistica, Salerno, ottobre 1972.

[79] MAO J.C.T., «The Internal Rate of Return as a Ranking Criterion», *The Engineering Economist*, 11, pp. 1-13.

[80] MAO J.C.T. e D. KNOLL, «Analysis of Investment Returns by Computer», *The Engineering Economist*, 12, pp. 229-239.

[81] MAO J.C.T., «An Analysis of Criteria for Investment and Financing Decisions under Certainty: a Comment», *Management Science*, vol. 13, n. 3, novembre 1966.

[82] MASSE' P., *La Scelta degli Investimenti*, Etas Kompass, Milano, 1965.

[83] NORSTRØM C.J., «A Note on Mathematical Analysis of Rates of Return under Certainty», *Management Science*, vol. 13, n. 5, gennaio 1967.

[84] NORSTRØM C.J., «Uniqueness of the Internal Rate of Return with Variable Life of Investment: a Comment», *The Economic Journal*, dicembre 1970, vol. 80, pp. 983-984.

[85] NORSTRØM C.J., «A Modification of the Internal Rate of Return Method», *Statsokonomisk Tidsskrift*, 1971, n. 4, pp. 214-231.

[86] NORSTRØM C.J., «A Sufficient Condition for a Unique Nonegative Internal Rate of Return», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, giugno 1972, vol. 7, pp. 1835-1939.

[87] NUTI D.M., «On the Truncation of Production Flows», *Kyklos*, 1973, vol. 80, fasc. 3, pp. 485-496.

[88] OAKFORD R.V., «The Prospective Growth Rate as a Measure of Acceptability of a Proposal», *The Engineering Economist*, vol. 15, n. 4.

[89] OLIVIERI G., «Alcune Generalizzazioni di un Teorema sull'Unicità del Tasso Interno di Rendimento di Progetti di Investimento o di Finanziamento», *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, gennaio-dicembre 1978, vol. 41, pp. 149-159.

[90] PANTON D.B. e W.A. VERDINI, «A FORTRAN Program for Applying Sturm's Theorem in Counting Internal Rates of Return», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, settembre 1981, vol. 16, pp. 381-388.

[91] PASINETTI L.L., «Switches of Techniques and the Rate of Return in Capital Theory», *The Economic Journal*, settembre 1969, vol. 79, pp. 508-531.

[92] PECCATI L., «Alcuni Risultati sul Tasso Interno di Rendimento di un'Operazione Finanziaria», *Studi e Ricerche*, Facoltà di Economia e Commercio dell'Università degli Studi di Parma, 1975, vol. 12, pp. 171-180.

[93] PISTOIA A., «Questioni di Stabilità in Problemi di Scelta», (Nota 1), *Fascicoli dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria*, Università di Pavia, n. 45, 1973.

[94] PISTOIA A., «Questioni di Stabilità in Problemi di Scelta», (Nota 2), *Fascicoli dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria*, Università di Pavia, n. 47, 1974.

[95] PISTOIA A., «Questioni di Stabilità in Problemi di Scelta», (Nota 3), *Fascicoli dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria*, Università di Pavia, n. 50, 1974.

[96] PISTOIA A., «Sulla Dinamica di Operazioni Finanziarie non Necessariamente Certe», (Nota 1), *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, vol. 36, pp. 1-14, 1973.

[97] PISTOIA A., «Sulla Dinamica di Operazioni Finanziarie non Necessariamente Certe», (Nota 2), *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, vol. 37, pp. 15-24, 1974.

[98] PISTOIA A., «Di una Ricerca Propria alla Scelta tra Investimenti Alternativi», *Quaderni dell'Istituto di Scienze Attuariali*, Facoltà di Scienze Statistiche, Demografiche ed Attuariali dell'Università degli Studi di Roma, n. 90, 1979.

[99] PISTOIA A., «Sulla Funzione del Valore Attuale», *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, vol. 42, pp. 1-18, 1979.

[100] PISTOIA A., «Sulla Struttura di un Polinomio Algebrico», *Fascicoli dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria*, Università di Pavia, n. 59, 1979.

[101] PISTOIA A., «About Internal Rate of Return», In *Mathematical Programming and its Applications*, a cura di G. Castellani e P. Mazzoleni, F. Angeli, Milano, 1981.

[102] PISTOIA A., «About Internal Rate of Return», *Atti del III Convegno A.M.A.S.E.S.*, Napoli, 1979.

[103] PISTOIA A., «Sull'Unicità del T.I.R.», *Nota inviata al Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 1981.

[104] PITCHFORD J.D. e A.J. HAGGER, «A Note on the Marginal Efficiency of Capital», *The Economic Journal*, dicembre 1958, vol. 68, pp. 597-600.

[105] PRATT J.W., «Finding How Many Roots a Polynomial Has in (0, 1) or (0, + ∞)», *American Mathematical Montly*, ottobre 1979, vol. 86, pp. 630-648.

[106] PRATT J.W., e J.S. HAMMOND, «Evaluating and Comparing Projects: Simple Detection of False Alarms», *The Journal of Finance*, dicembre 1979, vol. 34, pp. 1231-1242.

[107] PUCCINELLI P., «Alcuni Aspetti Controversi della Teoria della Domanda di Investimenti», *Note Economiche*, gennaio-febbraio 1976, pp. 35-93.

[108] RAMSEY J.B., «The Marginal Efficiency of Capital, the Internal Rate of Return and Net Present Value: an Analysis of Investment Criteria», *Journal of Political Economy*, settembre-ottobre 1970, vol. 78, pp. 1017-1027.

[109] RAMSEY J.B., «Ramsey's Investment Criterion: a Reply», *Journal of Political Economy*, luglio-agosto 1972, vol. 80, pp. 807-810.

[110] ROSS A.M., C.S. SPATT e P.H. DYBVIG, «Present Values and Internal Rates of Return», *Journal of Economic Theory*, 23, pp. 66-81, 1980.

[111] RUSSEL A.M., e J.A. RICKARD, «Uniqueness of Nonnegative Internal Rate of Return», *Journal of the Institute of Actuaries*, 108, 43, 1982.

[112] RUSSEL A.M. e J.A. RICKARD, «An Algorithm for Determining Unique Nonnegative Internal Rates of Return», *Journal of Business Finance and Accounting*, 11, 3, 1984.

[113] SANSONE G. e R. CONTI, *Lezioni di Analisi Matematica*, CEDAM, Padova, 1958.

[114] SEN A., «Minimal Conditions for Monotonicity of Capital Value», *Journal of Economic Theory*, 11, pp. 340-355, 1975.

[115] SILCOCK T.H., «Complementarity and Future Time: a Note on the Marginal Efficiency of Capital», *The Economic Journal*, dicembre 1959, vol. 69, pp. 816-819.

[116] SOLOMON E., «The Arithmetic of Capital Budgeting Decisions», *Journal of Business*, Aprile 1956, vol. 29, pp. 124-129.

[117] SOPER C.S., «The Marginal Efficiency of Capital: a Further Note», *The Economic Journal*, marzo 1959, vol. 69, pp. 174-177.

[118] TEICHROEW D., A. ROBICHEK e M. MONTALBANO, «Mathematical Analysis of Rates of Return under Certainty», *Management Science, gennaio 1965, vol.* 11, pp. 395-403.

[119] TEICHROEW D., A. ROBICHECK e M. MONTALBANO, «An Analysis of Criteria for Investment and Financial Decisions under Certainty», *Management Science*, novembre 1965, vol. 12, pp. 151-179.

[120] TROVATO M., *Investimenti e Decisioni*, Isedi, Milano 1972.

[121] TROVATO M., «Sulla Definizione di Classi di Operazioni di Investimento a Tasso di

Rendimento Unico», *Giornale degli Economisti e Annali di Economia,* luglio-agosto 1972, vol. 31, pp. 503-513.

[122] TROVATO M., «Sulla Validità del Tasso Interno di Rendimento come Criterio di Selezione dei Progetti di Investimento», *Giornale degli Economisti e Annali di Economia,* settembre-ottobre 1972, vol. 31, pp. 678-691.

[123] TURNBULL W.H., *Theory of Equations,* Oliver & Boyd, Edinburgh, 1952.

[124] USPENSKY J.V., *Theory of Equations*, McGraw-Hill, New York, 1948.

[125] VOLPE DI PRIGNANO E. e C. SICA, «Problems of Valuation in Financial Substitutive Operations and in Mixed Projects», In *Mathematical Programming and its Economic Application,* a cura di G. Castellani e P. Mazzoleni, Franco Angeli, Milano, 1981.

[126] VOLPE DI PRIGNANO E., *Manuale di Matematica Finanziaria,* E.S.I., Napoli, 1985.

[127] WEINGARTNER H.M., «The Generalized Rate of Return», *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* vol. 3, 1966.

[128] WIAR R.C., «Economic Implications of Multiple Rates of Return in the Laveraged Lease Context», *Journal of Finance*, pp. 1275-1286, Dicembre 1973.

[129] WRIGHT J.F., «The Marginal Efficiency of Capital», *The Economic Journal,* dicembre 1959, vol. 69, pp. 813-816.

[130] WRIGHT J.F., «Some Further Comments on the Ambiguity and Usefulness of Marginal Efficiency as Investment Criterion», *Oxford Economic Papers,* marzo 1965, vol. 17, pp. 81-89.

[131] WRIGHT J.F., «Notes on the Marginal Efficiency of Capital», *Oxford Economic Papers,* pp. 124-129, Giugno 1963.

[132] WRIGHT J.F., «On Investment Criteria Based on the Internal Rate of Return: a Response», *Oxford Economic Papers,* 38, pp. 181-184, 1986.