Una nota sulla formula di Stoodley:
"Attualizzazione e Capitalizzazione
mediante la formula di Stoodley:
una classe più generale di modelli"

Quaderno n. 31
Istituto di Matematica
Facoltà di Scienze
Economiche e Bancarie
Università degli Studi
Siena

Sunto: Viene fornita una classe di modelli descrittivi della forza d'interesse, a tre parametri, che estendono le proprietà dei modelli a suo tempo forniti in [1] e [3], consentendo il calcolo di Attualizzazione e Capitalizzazione mediante medie ponderate ad $(n+1)$ pesi.
Di questi, il modello a quattro parametri presentato in [2] viene visto come loro caso generale, e di questo stesso modello si presenta un nuovo modo di utilizzazione.
Si studiano infine le relazioni intercorrenti tra i valori dei parametri dei vari modelli presentati in questa nota, e le relazioni tra questi e quelli del modello presentato in [2].

Il modello che viene proposto in questa nota per la descrizione di $\delta(t)$, forza d'interesse all'istante t, e quindi per la determinazione del tasso annuo d'interesse i_t (vedere [1] e [2]), è il seguente:

$$(1) \qquad \delta(t) = p + n \cdot \frac{s}{1 + k \cdot e^{st}}$$

con p, k ed s parametri reali da determinare, ed $n \in \mathbb{N}$ valore assegnato.

Il modello fornito da Stoodley, descritto in [1] e [2], corrisponde chiaramente al caso $n = 1$.

Il modello fornito (1) estende la proprietà di quello di Stoodley, [1], e di quello fornito in [3], consistenti nel poter calcolare Attualizzazione e Capitalizzazione come medie ponderate a due e tre pesi rispettivamente.

Con il modello (1), Attualizzazione e Capitalizzazione vengono calcolate invece mediante medie ponderate ad $(n+1)$ pesi.

Osserviamo infatti che:

$$\delta(t) = p + n \cdot \frac{s}{1 + k \cdot e^{st}} = (p + ns) - \frac{ks \cdot e^{st}}{1 + k \cdot e^{st}} =$$
$$= (p + ns) - \frac{d}{dt}\left\{\log\left(1 + k \cdot e^{st}\right)^n\right\}.$$

Usando la stessa simbologia di [1] e [2], indicata con $\nu(t)$ l'Attualizzazione di 1 al tempo t, avremo:

$$\nu(t) = e^{-\int_0^t \delta(t)dt} = e^{-\int_0^t \left[(p+ns) - \frac{d}{dt}\left\{\log\left(1+k \cdot e^{st}\right)^n\right\}\right] dt} =$$
$$= e^{-(p+ns)t - \log\left(1+k \cdot e^{st}\right)^n\big|_0^t} = e^{-(p+ns)t} \cdot \left(\frac{1 + k \cdot e^{st}}{1+k}\right)^n =$$

$$(2) \qquad \nu(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{n}{j}}{(1+k)^n} \cdot k^j \cdot e^{-[(n-j)\,s+p]\,t}$$

da cui:

$$\nu(t) = \frac{1}{(1+k)^n} \cdot e^{-(ns+p)\,t} + \frac{nk}{(1+k)^n} \cdot e^{-[(n-1)s+p]\,t} + ... + \frac{k^n}{(1+k)^n} \cdot e^{-p\,t}\,,$$

e posto:

(3) $\qquad e^{(n-j)\,s+p} = 1 + i_{j+1}$

possiamo scrivere la (2) come:

$$\nu(t) = \frac{1}{(1+k)^n} \cdot (1+i_1)^{-t} + \frac{nk}{(1+k)^n} \cdot (1+i_2)^{-t} + ...$$

$$... + \frac{\binom{n}{j} \cdot k^j}{(1+k)^n} \cdot (1+i_{j+1})^{-t} + ... + \frac{k^n}{(1+k)^n} \cdot (1+i_{n+1})^{-t}$$

ovvero:

(4) $$\nu(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot k^j \cdot (1+i_{j+1})^{-t}}{(1+k)^n}\,.$$

Indicata poi con $A(t_1, t_2)$ la Capitalizzazione di 1 da t_1 a t_2, essendo:

$$A(t_1, t_2) = e^{\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt} = \frac{\nu(t_1)}{\nu(t_2)}\,,$$

avremo anche:

(5) $$A(t_1, t_2) = \frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot k^j \cdot e^{-[(n-j)s+p]\,t_1}}{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot k^j \cdot e^{-[(n-j)s+p]\,t_2}}$$

da cui:

(6) $$A(t_1, t_2) = \frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot k^j \cdot (1+i_{j+1})^{-t_1}}{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot k^j \cdot (1+i_{j+1})^{-t_2}}\,.$$

Avendosi poi:

$$\delta'(t) = -n \cdot s^2 \cdot \frac{k \cdot e^{st}}{(1 + k \cdot e^{st})^2}\,,$$

essendo $n \in \mathbb{N}$, avremo che $\delta(t)$ è funzione crescente per $k < 0$ e decrescente per $k > 0$.

Inoltre, se $s > 0$, il grafico di $\delta(t)$ cambia concavità o convessità nel caso in cui sia $|k| < 1$, sia per $\delta(t)$ crescente che decrescente, altrimenti è sempre convesso.o sempre concavo.

Per quanto riguarda la determinazione dei parametri p, k ed s, osserviamo anzitutto che essendo:

$$\delta(t) = p + n \cdot \frac{s}{1 + k \cdot e^{st}} = (p + ns) + n \cdot \frac{(-s)}{1 + \frac{1}{k} \cdot e^{-st}} \, ,$$

senza perdere in generalità, possiamo limitarci al caso $s > 0$.

Useremo, per la determinazione dei parametri, tre condizioni:

$\delta(0) = \delta_0$, $\delta(t_1) = \delta_1$, con $t_1 > 0$ tempo assegnato, e $\lim_{t \to +\infty} \delta(t) = \delta_\infty$, valore a cui tende $\delta(t)$ quando t diventa sempre più grande.

Avremo quindi:

(7) $\lim_{t \to +\infty} \delta(t) = \delta_\infty = p$ e

$$\delta(0) = \delta_0 = p + \frac{ns}{1 + k} \, ,$$

da cui, posto $\delta_0 - \delta_\infty = \alpha$, si ha:

(8) $$k = \frac{ns - \alpha}{\alpha} \, .$$

Infine:

$$\delta(t_1) = \delta_1 = p + \frac{ns}{1 + k \cdot e^{st_1}}$$

dalla quale, posto $\delta_1 - \delta_\infty = \beta$ e sostituendo mediante la (7) e la (8), otteniamo:

(9) $$H_n(s) = \beta \cdot (ns - \alpha) \cdot e^{st_1} - \alpha ns + \alpha\beta = 0 \, .$$

Ora:

(10) $$H_n(0) = -\alpha\beta + \alpha\beta = 0$$

(11) $$\lim_{s \to +\infty} H_n(s) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta > 0 \\ -\infty & \text{se } \beta < 0 \end{cases}$$

e

$$H_n'(s) = \beta \cdot e^{st_1} \cdot [n + (ns - \alpha) \cdot t_1] - \alpha n$$

dalla quale ricaviamo che:

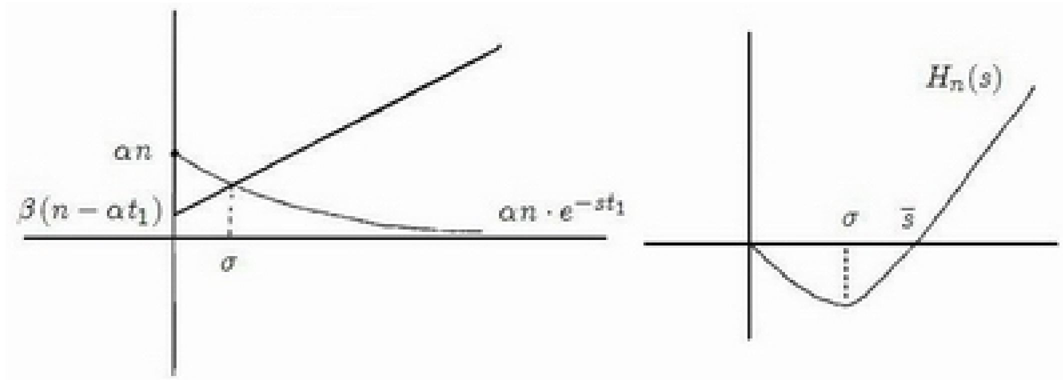
$H_n'(s) > 0$ per

(12) $$\beta n t_1 s + \beta (n - \alpha t_1) > \alpha n \cdot e^{-st_1} \quad .$$

Esaminiamo separatamente i due casi di $\delta(t)$ funzione decrescente o crescente.

Se $\delta(t)$ è decrescente, allora $\alpha > \beta > 0$.

Il termine di sinistra della (12) è una retta, con $\beta n t_1 > 0$, per cui, come illustrato nelle figure:



$H_n(s) = 0$ ha, per le (10), (11) e (12) una sola soluzione positiva $\overline{s}$.

Inoltre, per la (8), $k > 0$ se $ns - \alpha > 0$, cioè se $s > \dfrac{\alpha}{n}$.

Ma $H_n\left(\dfrac{\alpha}{n}\right) = \alpha\beta - \alpha^2 < 0$ e quindi $\overline{s} > \dfrac{\alpha}{n}$, per cui $k > 0$.

Se invece $\delta(t)$ è crescente, allora $\alpha < \beta < 0$.

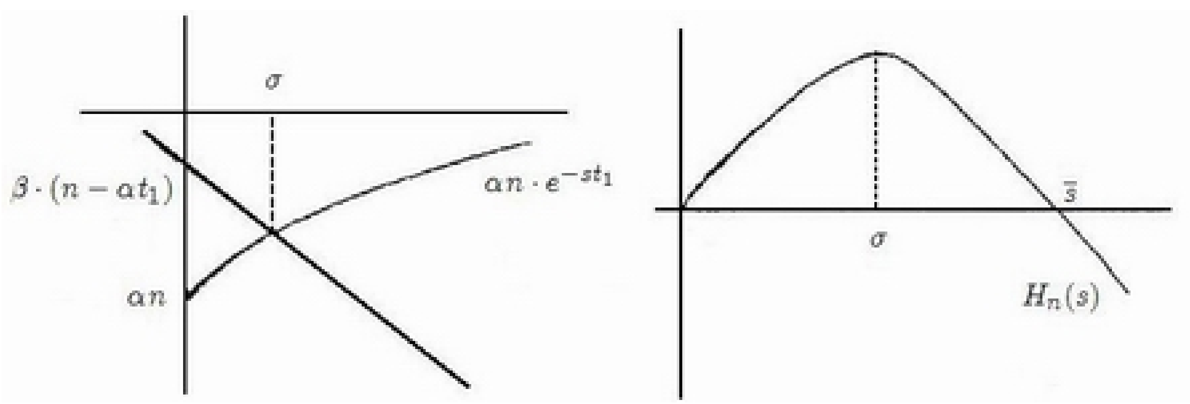
Ora, nella (12), si ha $\beta n t_1 < 0$ ed $\alpha n < 0$.

Se vale la condizione:

$\beta \cdot (n - \alpha t_1) > \alpha n$, cioè se:

$t_1 < n \cdot \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}$,

avremo, come illustrato nelle figure, sempre per le (10), (11) e (12):



e quindi $H_n(s) = 0$ ha una sola soluzione positiva $\overline{s}$.

Dalla (8), $k < 0$ se $ns - \alpha > 0$, cioè se $s > \dfrac{\alpha}{n}$.

Ma ora $\dfrac{\alpha}{n} < 0$, e quindi $\overline{s} > \dfrac{\alpha}{n}$.

Riprendendo la (9), osserviamo come questa, una volta assegnati i valori α e β, definisca s come funzione implicita di t_1: $s = s(t_1)$.

Nel campo A : $\left\{0 < t_1, \dfrac{\alpha}{n} < s\right\}$ sono soddisfatte le ipotesi del Teorema del Dini; avendosi:

$$\text{(13)} \qquad \frac{d\,H_n(s)}{ds} = \beta \cdot (nst_1 - \alpha t_1 + n) \cdot e^{st_1} - \alpha n\,,$$

è facile vedere come la funzione $H_n(s)$ e la sua derivata fatta rispetto ad s siano continue nel campo A, è presente il punto P: $(\overline{s}, t_1)$ tale che $H_n(\mathrm{P}) = 0$ ($\overline{s}$ non è altro che la soluzione unica di $H_n(s) = 0$) ed in questo punto è diversa da zero la derivata (13), potendosi questa derivata annullare in P solo nel caso particolare $t_1 = n \cdot \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}$, impossibile se $\delta(t)$ è decrescente, con la soluzione non accettabile $s = 0$, se $\delta(t)$ è crescente.

Sempre per il Teorema del Dini, la funzione implicita così definita, $s = s(t_1)$, è continua.

Riprendendo in esame la (2):

$$\nu(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{n}{j}}{(1+k)^n} \cdot k^j \cdot e^{-[(n-j)\,s+p]\,t}\,,$$

scelto $m \in \mathbb{R}$, con $s \cdot m < p$, per evitare valori negativi dei tassi d'interesse, possiamo anche scrivere:

$$\text{(14)} \qquad \nu(t) = e^{-mst} \cdot \frac{\sum\limits_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \cdot k^r \cdot e^{-[(n-m-r)\,s+p]\,t}}{(1+k)^n}$$

per la quale, posto: $e^{[(n-m-r)\,s+p]} = 1 + i_{r+1}$,

avremo:

$$\nu(t) = e^{-mst} \cdot \frac{\sum\limits_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \cdot k^r \cdot (1+i_{r+1})^{-t}}{(1+k)^n}$$

e, in modo analogo per la Capitalizzazione:

$$A(t_1, t_2) = e^{ms(t_2 - t_1)} \cdot \frac{\sum\limits_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \cdot k^r \cdot (1+i_{r+1})^{-t_1}}{\sum\limits_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \cdot k^r \cdot (1+i_{r+1})^{-t_2}}\,.$$

In questo modo, rimanendo inalterato il valore di $\nu(t)$ e di $A(t_1, t_2)$, possiamo ottenere dei valori per i tassi annui d'interesse i_r che più si avvicinano a quelli noti; Attualizzazione e Capitalizzazione vengono ora calcolate mediante medie ponderate ad $(n+1)$ pesi, e quindi moltiplicate per i fattori e^{-mst} ed $e^{ms(t_2-t_1)}$.

Sarà anche:

$$1 + i_{r+1} = e^{-ms} \cdot (1 + i_{j+1})$$

da cui:

$$i_{r+1} = e^{-ms} \cdot i_{j+1} + e^{-ms} - 1\,. \tag{15}$$

Il procedimento precedente può essere iterato, questa volta scegliendo un $\varrho \in \mathbb{R}$, con $\varrho < \dfrac{p - ms}{p}$, mediante il quale possiamo scrivere la (14) come:

$$\nu(t) = e^{-(ms+\varrho p)t} \cdot \frac{\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \cdot k^r \cdot e^{-[(n-m-r)s+(1-\varrho)p]t}}{(1+k)^n}$$

dalla quale, posto $e^{[(n-m-r)s+(1-\varrho)p]} = 1 + i_{\omega+1}$, avremo:

$$\nu(t) = e^{-(ms+\varrho p)t} \cdot \frac{\sum_{\omega=0}^{n} \binom{n}{\omega} \cdot k^{\omega} \cdot (1 + i_{\omega+1})^{-t}}{(1+k)^n} \tag{16}$$

e, per la Capitalizzazione:

$$A(t_1, t_2) = e^{(ms+\varrho p)(t_2 - t_1)} \cdot \frac{\sum_{\omega=0}^{n} \binom{n}{\omega} \cdot k^{\omega} \cdot (1 + i_{\omega+1})^{-t_1}}{\sum_{\omega=0}^{n} \binom{n}{\omega} \cdot k^{\omega} \cdot (1 + i_{\omega+1})^{-t_2}}\,. \tag{17}$$

Avremo anche:

$$i_{\omega+1} = e^{-\varrho p} \cdot i_{r+1} + e^{-\varrho p} - 1$$

e, per la (15):

$$i_{\omega+1} = e^{-(ms+\varrho p)} \cdot i_{j+1} + e^{-(ms+\varrho p)} - 1\,.$$

Una classe di modelli, del tutto equivalenti ai precedenti, la possiamo ottenere dalla (1) mediante la trasformazione:

$$p = (m - n) \cdot s + \varrho\,,$$

ottenendo:

$$\delta(t) = \varrho + s \cdot \frac{m + (m-n) \cdot k \cdot e^{st}}{1 + k \cdot e^{st}} \tag{18}$$

per la quale ancora:

$$\nu(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot k^j \cdot (1 + i_{j+1})^{-t}}{(1+k)^n}$$

dove ora:

$$i_{j+1} = e^{(m-j)\,s+\varrho}\,.$$

Il modello fornito da Stoodley in [1] corrisponde al caso (18), con $m = 0$ ed $n = 1$, per cui $\varrho = p + s$, e:

$$\delta(t) = p + s + s \cdot \frac{-\, k \cdot e^{st}}{1 + k \cdot e^{st}} = p + \frac{s}{1 + k \cdot e^{st}}$$

mentre il modello fornito in [3] corrisponde al caso (18), con $m = 1$ ed $n = 2$, da cui $\varrho = p + s$, e:

$$\delta(t) = \varrho + s \cdot \frac{1 - k \cdot e^{st}}{1 + k \cdot e^{st}} = p + s \cdot \frac{2}{1 + k \cdot e^{st}} \,.$$

Considerando la (9) in due casi distinti, n ed m, rispettivamente con i dati α_n, β_n e t_1, α_m, β_m e $t_2 = t_1 + t_0$, avremo, nel primo caso:

$$H_n(s) = \beta_n \cdot (ns - \alpha_n) \cdot e^{st_1} - \alpha_n\, ns + \alpha_n\, \beta_n = 0$$

dalla quale ricaviamo:

$$t_1 = \log \left[\frac{\alpha_n \cdot (ns - \beta_n)}{\beta_n \cdot (ns - \alpha_n)} \right]^{\frac{1}{s}},$$

e similmente, usando nel secondo caso σ al posto di s per distinguere le soluzioni:

$$H_m(\sigma) = \beta_m \cdot (m\sigma - \alpha_m) \cdot e^{\sigma t_2} - \alpha_m\, m\sigma + \alpha_m\, \beta_m = 0$$

da cui:

$$t_1 + t_0 = \log \left[\frac{\alpha_m \cdot (m\sigma - \beta_m)}{\beta_m \cdot (m\sigma - \alpha_m)} \right]^{\frac{1}{\sigma}},$$

uguagliando le quali otteniamo:

$$H_{n,m}(s,\sigma) = e^{t_0} \cdot \left[\frac{\alpha_n \cdot (ns - \beta_n)}{\beta_n \cdot (ns - \alpha_n)} \right]^{\frac{1}{s}} - \left[\frac{\alpha_m \cdot (m\sigma - \beta_m)}{\beta_m \cdot (m\sigma - \alpha_m)} \right]^{\frac{1}{\sigma}} = 0$$

la quale definisce, una volta assegnati i valori di t_0, α_n, β_n, α_m e β_m, σ come funzione implicita di $s : \sigma = \sigma(s)$.

Scelto infatti il campo A : $\left\{ \frac{\alpha_n}{n} < s, \frac{\beta_m}{m} < \sigma \right\}$, la funzione $H_{n,m}(s,\sigma)$ e la sua derivata fatta rispetto a σ:

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \left[\frac{\alpha_m \cdot (m\sigma - \beta_m)}{\beta_m \cdot (m\sigma - \alpha_m)} \right]^{\frac{1}{\sigma}} \cdot \left\{ \log \left[\frac{\alpha_m \cdot (m\sigma - \beta_m)}{\beta_m \cdot (m\sigma - \alpha_m)} \right]^{\frac{1}{\sigma}} - \frac{m\,(\beta_m - \alpha_m)}{(m\sigma - \alpha_m) \cdot (m\sigma - \beta_m)} \right\}$$

nel campo A, con il punto P : $(\overline{s}, \overline{\sigma})$, dove $\overline{s}$ e $\overline{\sigma}$ sono le soluzioni, rispettivamente, della $H_n(s) = 0$ e della $H_m(\sigma) = 0$, soddisfano alle condizioni del Teorema del Dini.

In tal modo, una volta noti i valori dei parametri di un modello della classe (1), sotto le condizioni α_n, β_n, t_1, possiamo da questi ricavare i valori dei parametri di ogni altro modello della (1), anche sotto dati α, β e t_1 diversi.

Nel caso particolare $\alpha_n = \alpha_m, \beta_n = \beta_m$ e $t_0 = 0$, avremo la forma più semplice:

$$H_{n,m}(s,\sigma) = \left[\frac{\alpha \cdot (ns - \beta)}{\beta \cdot (ns - \alpha)}\right]^{\frac{1}{s}} - \left[\frac{\alpha \cdot (m\sigma - \beta)}{\beta \cdot (m\sigma - \alpha)}\right]^{\frac{1}{\sigma}} = 0\,.$$

I modelli generati, al variare di n, mediante la (1), non sono altro che casi particolari del modello a quattro parametri presentato in [2]:

(19) $$\delta(t) = \varphi + \frac{q}{1 + \chi \cdot e^{\sigma t}}\,,$$

quando si assuma $q = n \cdot s$.

Questo modello, una volta assegnate le quattro condizioni:

$\delta(0) = \delta_0$, $\delta(t_1) = \delta_1$, $\delta(t_2) = \delta_2$, con $t_2 > t_1$ e $\lim_{t \to +\infty} \delta(t) = \delta_\infty$,

potendoci limitare al caso $\sigma > 0$, risulta crescente per $q \cdot \chi < 0$ e decrescente per $q \cdot \chi > 0$.

Ha una sola soluzione positiva per il parametro σ ottenibile dall'equazione:

(20) $$G(\sigma) = \gamma \cdot (\alpha - \beta) \cdot e^{\sigma\, t_2} + \beta \cdot (\gamma - \alpha) \cdot e^{\sigma\, t_1} + \alpha \cdot (\beta - \gamma) = 0\,,$$

dove $\alpha = \delta_0 - \delta_\infty$, $\beta = \delta_1 - \delta_\infty$, $\gamma = \delta_2 - \delta_\infty$, sotto la condizione, valida sia nel caso di $\delta(t)$ crescente che decrescente:

(21) $$\frac{t_2}{t_1} < \frac{\beta \cdot (\alpha - \gamma)}{\gamma \cdot (\alpha - \beta)}\,.$$

Per uno studio completo del modello e della determinazione dei suoi parametri, si vedano [2] ed anche [3].

Per gli altri parametri, abbiamo anzitutto:

(22) $$\varphi = \delta_\infty\,.$$

Riguardo a χ e q, è facile ottenere:

$$\chi = \frac{\alpha - \beta}{\beta \cdot e^{\sigma\, t_1} - \alpha}\,,$$

e

$$q = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot (e^{\sigma\, t_1} - 1)}{\beta \cdot e^{\sigma\, t_1} - \alpha}$$

dalla seconda delle quali otteniamo:

$$\beta \cdot (q - \alpha) \cdot e^{\sigma\, t_1} - \alpha \cdot (q - \beta) = 0$$

che non è altro se non la (9).

Quindi, come già visto, $q = n \cdot \sigma$ con $n \in \mathbb{R}$.

Se $n \in \mathbb{N}$, allora il modello generato dalla (19) coincide con uno dei modelli generati dalla (1), come meglio vedremo in seguito.

Tornando alla (20), nel caso particolare $t_2 = 2t_1$, si perviene in modo semplice alle due soluzioni che sono:

$$\sigma_1 = 0 \text{ e } \sigma_2 = \frac{1}{t_1} \cdot \log \frac{\alpha \cdot (\beta - \gamma)}{\gamma \cdot (\alpha - \beta)}.$$

La prima di esse non è accettabile, mentre dalla seconda otteniamo:

$$q = \frac{\beta \cdot (\alpha\beta - 2\alpha\gamma + \gamma\beta)}{\beta^2 - \alpha\gamma}$$

e

$$\chi = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{(\alpha - \beta)^2}{(\beta^2 - \alpha\gamma)}.$$

Come si può vedere in [2], utilizzando questo modello si hanno le:

$$\nu(t) = e^{-(\varphi+q)\,t} \cdot \left[\frac{1 + k \cdot e^{\sigma t}}{1 + k}\right]^{\frac{q}{\sigma}} \tag{23}$$

e

$$A(t_1, t_2) = e^{(\varphi+q)(t_2-t_1)} \cdot \left[\frac{1 + k \cdot e^{\sigma t_1}}{1 + k \cdot e^{\sigma t_2}}\right]^{\frac{q}{\sigma}}. \tag{24}$$

E' semplice vedere come la (2) e la (5) siano casi particolari delle (23) e (24), ottenuti ponendo $q = n \cdot \sigma$.

Una volta assegnate le quattro condizioni e determinati i valori dei parametri della (19), ponendo, in (23) e (24):

$$\frac{q}{\sigma} = n + h \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ ed } h \in \mathbb{R}, \tag{25}$$

possiamo anche scrivere:

$$\nu(t) = e^{-(\varphi+n\sigma+\sigma h)\,t} \cdot \left[\frac{1 + k \cdot e^{\sigma t}}{1 + k}\right]^{n+h} =$$

$$= e^{-(\varphi+n\sigma)\,t} \cdot \left[\frac{1 + k \cdot e^{\sigma t}}{1 + k}\right]^{n} \cdot e^{-\sigma h t} \cdot \left[\frac{1 + k \cdot e^{\sigma t}}{1 + k}\right]^{h} =$$

$$= \left[e^{-\sigma\,t} \cdot \frac{1 + k \cdot e^{\sigma t}}{1 + k}\right]^{h} \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{n}{j} \cdot k^j \cdot e^{-[(n-j)\sigma+\varphi]\,t}}{(1+k)^n}$$

e ponendo, al solito:

$$e^{[(n-j)\sigma+\varphi]} = 1 + i_{j+1} \tag{26}$$

avremo:

$$\nu(t) = \left[\frac{1 + k \cdot e^{\sigma t}}{e^{\sigma\,t} \cdot (1 + k)}\right]^{h} \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{n}{j} \cdot k^j \cdot (1 + i_{j+1})^{-t}}{(1+k)^n} = \tag{27}$$

ed analogamente:

$$(28) \qquad A(t_1,t_2) = \left[e^{\sigma(t_2-t_1)} \cdot \frac{1+k\cdot e^{\sigma t_1}}{1+k\cdot e^{\sigma t_2}}\right]^h \cdot \frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot k^j \cdot (1+i_{j+1})^{-t_1}}{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot k^j \cdot (1+i_{j+1})^{-t_2}} .$$

Anche qui, come per le (16) e (17), possiamo calcolare Attualizzazione e Capitalizzazione mediante il prodotto di una funzione di t per fattori ottenuti mediante medie ponderate ad $(n+1)$ pesi.

Potremo, ad esempio, come è stato fatto per (16) e (17), anche scrivere, scelti $m \in \mathbb{R}$ con $m \cdot \sigma < \varphi$, e $\varrho \in \mathbb{R}$ tale che $\varrho < \dfrac{\varphi - m\sigma}{\varphi}$:

$$\nu(t) = \left[\frac{1+k\cdot e^{\sigma t}}{e^{\sigma t}\cdot(1+k)}\right]^h \cdot e^{-(m\sigma-\varrho\varphi)\,t} \cdot \sum_{r=0}^{n} \frac{\binom{n}{r}\cdot k^r \cdot e^{-[(1-\varrho)\varphi+(n-m-r)\sigma]\,t}}{(1+k)^n}$$

dalla quale, posto:

$$1 + i_{r+1} = e^{[(1-\varrho)\varphi+(n-m-r)\sigma]} ,$$

da cui:

$$i_{r+1} = e^{-(m\sigma+\varrho\varphi)} \cdot i_{j+1} + e^{-(m\sigma+\varrho\varphi)} - 1 ,$$

avremo:

$$\nu(t) = \left[\frac{1+k\cdot e^{\sigma t}}{1+k}\right]^h \cdot e^{-[\sigma(m+h)+\varrho\varphi]\,t} \cdot \sum_{r=0}^{n} \frac{\binom{n}{r}\cdot k^r \cdot (1+i_{r+1})^{-t}}{(1+k)^n}$$

e

$$A(t_1,t_2) = \left[\frac{1+k\cdot e^{\sigma t_1}}{1+k\cdot e^{\sigma t_2}}\right]^h \cdot e^{[\sigma(m+h)+\varrho\varphi]\cdot(t_2-t_1)} \cdot \frac{\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\cdot k^r \cdot (1+i_{r+1})^{-t_1}}{\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\cdot k^r \cdot (1+i_{r+1})^{-t_2}} .$$

Cerchiamo infine la relazione che esiste tra la soluzione per il parametro s di un modello (1), sotto le condizioni: δ_0, $\delta(t_1) = \delta_1$, δ_∞, con $\alpha_n = \delta_0 - \delta_\infty$, $\beta_n = \delta_1 - \delta_\infty$ e la soluzione per il parametro σ del modello (19):

$$\overline{\delta}(t) = \varphi + \frac{q}{1+\chi\cdot e^{\sigma t}} ,$$

sotto le condizioni: $\overline{\delta}_0$, $\overline{\delta}(t_0+t_1) = \overline{\delta}_1$, $\overline{\delta}(t_0+t_2) = \overline{\delta}_2$, $\overline{\delta}_\infty$, con $\alpha = \overline{\delta}_0 - \overline{\delta}_\infty$, $\beta = \overline{\delta}_1 - \overline{\delta}_\infty$, $\gamma = \overline{\delta}_2 - \overline{\delta}_\infty$.

Dalla (9) avremo:

$$t_0 = \frac{1}{s} \cdot \log\left[\frac{\alpha_n\cdot(ns-\beta_n)}{\beta_n\cdot(ns-\alpha_n)}\right] ;$$

e pervenendo alla (20), invece:

$$G(\sigma) = \gamma\cdot(\alpha-\beta)\cdot e^{\sigma(t_0+t_2)} + \beta\cdot(\gamma-\alpha)\cdot e^{\sigma(t_0+t_1)} + \alpha\cdot(\beta-\gamma) = 0 ,$$

per la quale otteniamo:

$$t_0 = \frac{1}{\sigma} \cdot \log \left[\frac{\alpha \cdot (\gamma - \beta)}{\gamma \cdot (\alpha - \beta) \cdot e^{\sigma t_2} + \beta \cdot (\gamma - \alpha) \cdot e^{\sigma t_1}} \right]$$

e quindi l'equazione:

$$\Omega(s, \sigma) = \left[\frac{\alpha_n \cdot (ns - \beta_n)}{\beta_n \cdot (ns - \alpha_n)} \right]^{\frac{1}{s}} - \left[\frac{\alpha \cdot (\gamma - \beta)}{\gamma \cdot (\alpha - \beta) \cdot e^{\sigma t_2} + \beta \cdot (\gamma - \alpha) \cdot e^{\sigma t_1}} \right]^{\frac{1}{\sigma}} = 0$$

che permette di esprimere, in forma implicita, una volta soddisfatte le ipotesi del Teorema del Dini, il parametro s di (1) in funzione del parametro σ di (19): $s = s(\sigma)$ e viceversa.

Imporre poi l'equazione:

$$\Omega(s, s) = 0$$

equivale a vedere sotto quali condizioni, ad esempio per quale valore di t_2, la soluzione per il parametro s di (1) ha lo stesso valore della soluzione per il parametro σ di (19).

Otterremo allora:

$$\frac{\alpha_n \cdot (ns - \beta_n)}{\beta_n \cdot (ns - \alpha_n)} = \frac{\alpha \cdot (\gamma - \beta)}{\gamma \cdot (\alpha - \beta) \cdot e^{st_2} + \beta \cdot (\gamma - \alpha) \cdot e^{st_1}}$$

la quale, risolta rispetto a t_2, conduce alla condizione:

$$t_2 = \frac{1}{s} \cdot \log \left[\frac{\alpha\beta_n \cdot (ns - \alpha_n) \cdot (\gamma - \beta) - \beta\alpha_n \cdot (ns - \beta_n) \cdot (\gamma - \alpha) \cdot e^{st_1}}{\alpha_n \gamma \cdot (ns - \beta_n) \cdot (\alpha - \beta)} \right].$$

Se poi:

$$\alpha_n = \alpha\,,\ \beta_n = \beta\,,\ t_1 = 0 \ \text{ e } \ \delta_\infty = \overline{\delta}_\infty\,,$$

l'equazione $\Omega(s, \sigma) = 0$ assume la forma:

$$\overline{\Omega}(s, \sigma) = \left[\frac{\alpha \cdot (ns - \beta)}{\beta \cdot (ns - \alpha)} \right]^{\frac{1}{s}} - \left[\frac{\alpha \cdot (\gamma - \beta)}{\gamma \cdot (\alpha - \beta) \cdot e^{\sigma t_2} + \beta \cdot (\gamma - \alpha)} \right]^{\frac{1}{\sigma}} = 0$$

e se, come prima, imponiamo l'equazione:

$$\overline{\Omega}(s, s) = 0$$

otteniamo:

$$\frac{\alpha \cdot (ns - \beta)}{\beta \cdot (ns - \alpha)} = \frac{\alpha \cdot (\gamma - \beta)}{\gamma \cdot (\alpha - \beta) \cdot e^{st_2} + \beta \cdot (\gamma - \alpha)}$$

che conduce alla:

$$\gamma \cdot (ns - \beta) \cdot e^{st_2} = \beta \cdot (ns - \gamma)$$

e quindi alla condizione:

$$t_2 = \frac{1}{s} \cdot \log \left[\frac{\beta \cdot (ns - \gamma)}{\gamma \cdot (ns - \beta)} \right]. \tag{29}$$

Se nella (20) sostituiamo a t_2 il valore:

$$t_0 + \frac{1}{s} \cdot \log \left[\frac{\beta \cdot (ns - \gamma)}{\gamma \cdot (ns - \beta)} \right]$$

e poniamo $t_0 = t_1$, $s = \sigma$, con semplici calcoli otteniamo la

$$\beta \cdot e^{st_1} \cdot (ns - \alpha) = \alpha \cdot (ns - \beta)$$

ovvero la (9), ma anche la

$$ns = \frac{\alpha\beta \cdot (e^{st_1} - 1)}{\beta \cdot e^{st_1} - \alpha} = q\,,$$

e dato che:

$$\chi = \frac{q}{\alpha} - 1\,,$$

avremo anche:

$$\chi = \frac{ns}{\alpha} - 1 = \frac{ns - \alpha}{\alpha} = k$$

e quindi, se i valori di s e σ, a parità di dati comuni, coincidono, sotto la condizione (29) il modello (1) coincide con (19).

– 0 –

Nelle Tavole che seguono, (da I a VI), vengono calcolate $\nu(t)$ e $\delta(t)$, rispettivamente per $1 \leq t \leq 20$ e $0 \leq t \leq 100$, relativamente ai dati riportati in ogni tavola.

Nella parte A della Tavola viene calcolata $\nu(t)$ usando il modello (1) nei casi $n = 1, 2, ..., 6$, mentre le ultime due colonne si riferiscono al calcolo di $\nu(t)$ mediante il modello (19), con gli stessi valori per δ_0, δ_1, δ_∞, t_1 e t_2, ma con valori diversi per δ_2.

Analogo procedimento nella parte B, questa volta relativo al calcolo di $\delta(t)$.

I valori al di sopra di ogni colonna sono i valori, nell'ordine, di s e k per i modelli (1), di σ, χ e q per i modelli (19).

Nella Tavola VII (A e B) viene fatto lo studio della funzione $s = s(t_1)$ per i modelli (1), con $1 \leq t_1 \leq 20$, per i casi $n = 1, 2, ..., 5$, secondo i valori dei δ riportati nelle Tavole.

– 0 –

BIBLIOGRAFIA

[1] – Stoodley C. L.
“The effects of a falling interest rate on the values of certain actuarial functions"
Transactions of the Faculty of the Actuaries
1934, vol.14, pp.137-175.

[2] – McCoutcheon J. J.
“Some remarks relating to Stoodley's Formula"
Transactions of the Faculty of the Actuaries
1982, vol.38, pp.182-191.

[3] Lonzi M.
"Una nota sulla formula di Stoodley: un modello descrittivo della forza d'interesse"
Fascicolo n. 28 dell'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie dell'Università degli Studi di Siena.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SIENA

FACOLTA' DI SCIENZE ECONOMICHE E BANCARIE

ISTITUTO DI MATEMATICA

Marco Lonzi

Una nota sulla formula di Stoodley: un modello descrittivo della forza d'interesse.

Siena - Giugno 1983