Compito di Analisi Matematica del 12/2/2018 $\boxed{CAM1}$

IM1) $e^z = \sqrt{2}(1-i) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{7}{4}\pi\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow e^z = e^{x+iy} \Rightarrow \begin{cases} e^x = 2 \\ e^{iy} = \cos\frac{7}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{7}{4}\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \log 2 \\ y = \frac{7}{4}\pi \end{cases} \Rightarrow z = \log 2 + i\cdot\frac{7}{4}\pi.$

IM2) $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^2\vartheta\,\text{sen}\,\vartheta}{\rho^2} = 0$ con convergenza uniforme:

$|\rho\cos^2\vartheta\,\text{sen}\,\vartheta| < \rho\cdot 1 < \varepsilon$ e quindi $f(x;y)$ è continua anche in $(0;0)$.

$$\mathcal{D}_v f(0;0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0;0)+tv)-f(0;0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f\left((0;0)+t\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)-f(0;0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{2}};\frac{t}{\sqrt{2}}\right)-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{2}\cdot\frac{t}{\sqrt{2}}}{t\cdot\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^2}{2}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{t^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{h^2\cdot 0}{h^2+0} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0;0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{0\cdot h}{0+h^2} \Rightarrow \nabla f(0;0) = (0;0).$$

Quindi $\nabla f\cdot v = (0;0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \neq \mathcal{D}_v f(0;0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Quindi sicuramente la funzione $f(x;y)$ non è differenziabile in $(0;0)$.

Infatti $\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{f(x;y)-f(0;0)-\nabla f(0;0)\cdot(x-0;y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos^2\vartheta\,\text{sen}\,\vartheta}{\rho^3} = \cos^2\vartheta\cdot\text{sen}\,\vartheta \neq 0$: f non è differenziabile in $(0;0)$.

IM3) $\begin{cases} f(x;y;z) = x^2+y^2+z^3-3xy = 0 \\ g(x;y;z) = x^3+y^3-3z^2+xyz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1;1;1) = 1+1+1-3 = 0 \\ g(1;1;1) = 1+1-3+1 = 0 \end{cases}.$

$$\frac{\partial(f;g)}{\partial(x;y;z)} = \begin{Vmatrix} 2x-3y & 2y-3x & 3z^2 \\ 3x^2+yz & 3y^2+xz & xy-6z \end{Vmatrix} \Rightarrow \frac{\partial(f;g)}{\partial(x;y;z)}(1;1;1) = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -5 \end{Vmatrix}.$$

Dato che $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ si può definire come funzione implicita o $x \to (y;z)$ oppure $y \to (x;z)$. Non si può definire $z \to (x;y)$ in quanto $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

Scegliamo allora come funzione implicita $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\ x \to (y(x); z(x))$.

Quindi $\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}} = -1$; $\frac{dz}{dx}(1) = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}} = 0$.

Equazione della tangente in $x=1$: $x \to (1;1) + x(-1;0) = (1-x;1)$.

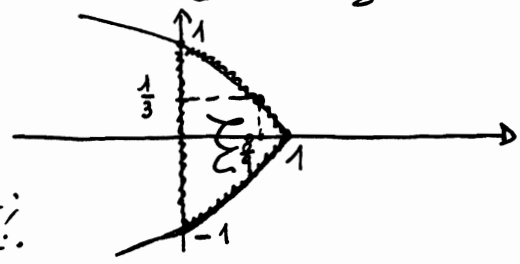
IM4) $f(x;y) = xe^y - ye^x$ funzione differenziabile 2 volte $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$.

$\nabla f(x;y) = (e^y - ye^x;\ xe^y - e^x)$; $H(f(x;y)) = \begin{Vmatrix} -ye^x & e^y - e^x \\ e^y - e^x & xe^y \end{Vmatrix}$; $H(1;1) = \begin{Vmatrix} -e & 0 \\ 0 & e \end{Vmatrix}$.

$\mathcal{D}^2_{v,v} f(1;1) = \|\cos\alpha \ \operatorname{sen}\alpha\| \cdot \begin{Vmatrix} -e & 0 \\ 0 & e \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{Vmatrix} = -e\cos^2\alpha + e\operatorname{sen}^2\alpha =$

$= -e(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = -e \cdot \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2}$ o $2\alpha = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ o $\alpha = \frac{3}{4}\pi$.

IIM1) $\begin{cases} \text{Max/min } f(x;y) = x(y+1) \\ \text{s.v.} \begin{cases} x + y^2 \le 1 \\ 0 \le x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y^2 - 1 \le 0 \\ -x \le 0 \end{cases} \end{cases}$



Funzione f continua e differenziabile;
$\mathcal{E}$ insieme compatto; vincoli qualificati.

Essendo $f(x;y) = x \cdot (y+1)$ in $\mathcal{E}$ $x \ge 0$ e $y \ge -1 \Rightarrow f(x;y) \ge 0\ \forall (x;y) \in \mathcal{E}$.

Essendo $f(0;y) = 0$ ne segue che tutti i punti $x=0$ sono punti di minimo.

$\Lambda = x(y+1) - \lambda_1(x + y^2 - 1) - \lambda_2(-x)$.

<u>Caso $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$</u>: $\begin{cases} \Lambda'_x = y+1 = 0 \\ \Lambda'_y = x = 0 \\ x + y^2 \le 1 \\ 0 \le x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ 0 \le 1 \\ 0 \le 0 \end{cases}$: Punto già studiato in precedenza.

<u>Caso $\lambda_1 \ne 0; \lambda_2 = 0$</u>: $\begin{cases} \Lambda'_x = y + 1 - \lambda_1 = 0 \\ \Lambda'_y = x - 2\lambda_1 y = 0 \\ x + y^2 = 1 \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda_1 - 1 \\ x = 2\lambda_1(\lambda_1 - 1) = 2\lambda_1^2 - 2\lambda_1 \\ 2\lambda_1^2 - 2\lambda_1 + \lambda_1^2 + 1 - 2\lambda_1 = 1 \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda_1^2 - 2\lambda_1 \\ y = \lambda_1 - 1 \\ 3\lambda_1^2 - 4\lambda_1 = 0 \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda_1^2 - 2\lambda_1 \\ y = \lambda_1 - 1 \\ \lambda_1(3\lambda_1 - 4) = 0 \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ x = 0 \\ y = -1 \\ 0 \ge 0 \end{cases}$ già visto $\cup \begin{cases} \lambda_1 = \frac{4}{3} \\ x = \frac{8}{9} \ge 0 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ Max?.

<u>Caso $\lambda_1=0;\lambda_2\neq 0$</u>: $\begin{cases}\Lambda'_x = y+1+\lambda_2 = 0\\ \Lambda'_y = x = 0\\ x=0\\ x+y^2\leq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+1+\lambda_2=0\\ x=0\\ x=0\\ y^2\leq 1\end{cases}$: I punti $x=0$ sono stati già studiati.

Per il Teorema di Weierstrass non servono altre analisi. Il punto $\left(\frac{8}{9};\frac{1}{3}\right)$ è il punto di Massimo, con $f\left(\frac{8}{9};\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{27}$, i punti $x=0;-1\leq y\leq 1$ sono tutti punti di minimo con $f(0;y)=0$. Non serve studiare il caso $\lambda_1\neq 0;\lambda_2\neq 0$ in quanto darebbe per soluzione i punti $(0;1)$ e $(0;-1)$ già visti in precedenza.

II M2) $\begin{cases} x' = 2x+2y+1\\ y' = x+3y+\operatorname{sen}t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'-2x-2y=1\\ -x+y'-3y=\operatorname{sen}t\end{cases} \Rightarrow \left\|\begin{matrix} D-2 & -2\\ -1 & D-3\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}1\\ \operatorname{sen}t\end{matrix}\right\| \Rightarrow$

$\begin{vmatrix} D-2 & -2\\ -1 & D-3\end{vmatrix}(x) = \begin{vmatrix} 1 & -2\\ \operatorname{sen}t & D-3\end{vmatrix} \Rightarrow (D^2-5D+6-2)(x) = (D-3)(1)+2\operatorname{sen}t \Rightarrow$

$\Rightarrow x''-5x'+4x = 2\operatorname{sen}t-3$; $D^2-5D+4=(D-1)(D-4)$ per cui avremo, come soluzione generale dell'omogenea: $x(t)=c_1e^t+c_2e^{4t}$. Per trovare una soluzione particolare dell'omogenea poniamo $x_0(t)=K+a\operatorname{sen}t+b\cos t \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0'(t)=a\cos t-b\operatorname{sen}t \Rightarrow x_0''(t)=-a\operatorname{sen}t-b\cos t \Rightarrow$

$\Rightarrow x''-5x'+4x=2\operatorname{sen}t-3 \Rightarrow -a\operatorname{sen}t-b\cos t-5a\cos t+5b\operatorname{sen}t+4a\operatorname{sen}t+4b\cos t+4K \Rightarrow$

$\Rightarrow (3a+5b)\operatorname{sen}t+(3b-5a)\cos t+4K=2\operatorname{sen}t-3 \Rightarrow \begin{cases}3a+5b=2\\ 3b-5a=0\\ 4K=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{17}\\ b=\frac{5}{17}\\ K=-\frac{3}{4}\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t)=c_1e^t+c_2e^{4t}+\frac{3}{17}\operatorname{sen}t+\frac{5}{17}\cos t-\frac{3}{4}$.

Da $y=\frac{1}{2}(x'-2x-1)=\frac{1}{2}\left(c_1e^t+4c_2e^{4t}+\frac{3}{17}\cos t-\frac{5}{17}\operatorname{sen}t-2c_1e^t-2c_2e^{4t}-\frac{6}{17}\operatorname{sen}t-\frac{10}{17}\cos t+\frac{3}{2}-1\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t)=-\frac{1}{2}c_1e^t+c_2e^{4t}-\frac{11}{34}\operatorname{sen}t-\frac{7}{34}\cos t+\frac{1}{4}$.

II M3) $\begin{cases}\text{Max/min } f(x;y)=2(x+y)\\ \text{s.v. } x^2+y^2=1\end{cases}$. $\Lambda=2(x+y)-\lambda(x^2+y^2-1)$.

CAM4

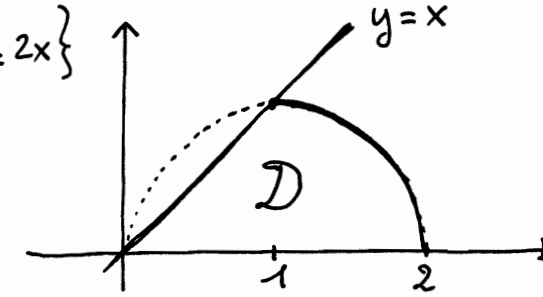
$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2 - 2\lambda x = 0 \\ \Lambda'_y = 2 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ \lambda^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda = \pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

Trattandosi di un problema di geometria vale solo la soluzione positiva: $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda = \sqrt{2} \end{cases}$.

$$\overline{H}(x;y;\lambda) = \begin{Vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda \end{Vmatrix}; \quad \left|\overline{H}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}};\tfrac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2}\right)\right| = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} - \sqrt{2}(-2\sqrt{2})\right) = \sqrt{2}\cdot(4+4) = 8\sqrt{2} > 0 \Rightarrow \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}};\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ Punto di Massimo.}$$

II M4) $\iint_D xy\,dx\,dy$ con $D = \{(x;y): 0 \le y \le x;\ x^2+y^2 \le 2x\}$



$x^2+y^2-2x = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ quindi la circonferenza di centro $(1;0)$ e raggio $r = 1$.

Passando alle coordinate polari avremo:

$$\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta - 2\rho\cos\vartheta = \rho^2 - 2\rho\cos\vartheta = \rho(\rho - 2\cos\vartheta) = 0.$$

Quindi l'equazione della circonferenza diviene: $\rho = 2\cos\vartheta$. Passando in coordinate polari avremo, integrando per sostituzione:

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\cos\vartheta} \rho\cos\vartheta\cdot\rho\operatorname{sen}\vartheta\cdot\rho\,d\rho\,d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\cos\vartheta} \cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\cdot\rho^3\,d\rho\,d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^{2\cos\vartheta}\right)\cdot\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(16\cos^4\vartheta - 0)\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^5\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\,d\vartheta = 4\cdot\left(-\frac{1}{6}\cos^6\vartheta\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{2}{3}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 - 1^6\right) = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{8} - 1\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}.$$