

COMPITI DI ANALISI MATEMATICA

AA. 2017/18

Prova Intermedia 2017

I M 1) Usando la forma trigonometrica dei numeri complessi, calcolare $\left(\frac{1-i}{1-\sqrt{3}i} \right)^4$.

I M 2) Data la funzione $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 |x y|}{x^2 + y^2} & : (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, determinare se la funzione,

nel punto $(0, 0)$, risulta continua e poi se risulta differenziabile.

I M 3) Data $f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$, siano v e w i versori di $(1, -1)$ e $(1, 2)$. Sapendo che $\mathcal{D}_{v,w}^2 f(x_0, y_0) = 3\sqrt{10}$ si determini il punto (x_0, y_0) sapendo che esso appartiene alla bisettrice del I e III quadrante.

I M 4) L'equazione $f(x, y, z) = ze^{x-y} + xe^{y-z} - 2ye^{x-z} = 0$, soddisfatta nel punto $(1, 1, 1)$, definisce una funzione implicita $(x, y) \rightarrow z$; di questa determinare l'equazione del piano tangente nel punto $(1, 1)$ nonché $d^2 z(1, 1)$.

I M 5) Data la curva $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow (e^{t^2-t}; \log(t^2 - t + 1), \sin t)$, se ne determini l'equazione della retta tangente nel punto $t = 0$.

I Appello Sessione Invernale 2018

I M 1) Calcolare le radici quarte di $z = e^{\log 16 - i\pi}$.

I M 2) Data la funzione $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 y^2)^\alpha}{(x^2 + y^2)^\alpha} & : (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ si studi, al variare del

parametro reale $\alpha > 0$, la sua differenziabilità nel punto $(0, 0)$.

I M 3) Data la funzione $f(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^3 + 2x - 3y^2$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, determinare i valori di α e β sapendo che $f'_x(1, 1) = f''_{y,y}(1, 1)$ e che $f'_y(-1, -1) = f''_{x,x}(-1, -1)$.

I M 4) Data l'equazione $f(x, y) = y \log x + (x - 1)e^y - y = 0$ ed il punto $(1, 0)$ che la soddisfa, si verifichi che con essa è definibile una funzione implicita $y = y(x)$ e di questa si calcoli l'espressione del polinomio di Taylor di II grado nel punto opportuno.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = x^2 - y^2 \\ \text{s.v. } \begin{cases} x^2 + 4y^2 \leq 4 \\ 2y \leq 2 - x \end{cases} \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y''' - y' = 3 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$.

II M 3) Risolvere l'equazione differenziale $y' \cdot e^{x+y} - x^2 = 0$.

II M 4) Calcolare $\iint_D x^2 + y^2 \, dx \, dy$, con $D = \{(x, y) : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

II Appello Sessione Invernale 2018

I M 1) Determinare z sapendo che $e^z = \sqrt{2}(1 - i)$.

I M 2) Data la funzione $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & : (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ se ne calcoli, usando la de-

finizione, la derivata nella direzione del vettore v di $(1, 1)$ nel punto $(0, 0)$ e si verifichi se tale risultato coincide con il prodotto $\nabla f(0, 0) \cdot v$, dando una spiegazione del risultato trovato.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3 - 3xy = 0 \\ g(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3z^2 + xyz = 0 \end{cases}$ ed il punto $P = (1, 1, 1)$ che lo soddisfa, determinare una funzione implicita con esso definibile e di questa calcolare l'equazione della retta tangente nel punto opportuno.

I M 4) Data $f(x, y) = xe^y - ye^x$ e sia $v = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ un vettore. Determinare i valori di α per i quali risulta $\mathcal{D}_{v,v}^2 f(1, 1) = 0$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = x(y + 1) \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x + y^2 \leq 1 \\ 0 \leq x \end{cases} \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 1 \\ y' = x + 3y + \sin t \end{cases}$.

II M 3) Determinare se può essere resa minima o massima la lunghezza del perimetro di un rettangolo sapendo che la sua diagonale ha lunghezza pari ad 1.

II M 4) Calcolare $\int \int_D xy \, dx \, dy$ con $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x; x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

Appello Sessione Straordinaria I 2018

I M 1) Determinare le radici cubiche di z sapendo che $z = e^{1+\frac{30}{7}\pi i} \cdot e^{-1+\frac{5}{7}\pi i}$.

I M 2) Determinare se la funzione $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 \sin y}{x^2 + y^2} & : (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ è differenziabile nel punto $(0, 0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x, y, z) = xe^{y-z} - ye^{z-x} + ze^{x-y} = 0$ ed il punto $(0, 0, 0)$ che la soddisfa, si verifichi che con essa è definibile una funzione implicita $z = z(x, y)$ e di questa si calcoli l'equazione del piano tangente nel punto $(0, 0)$.

I M 4) Data $f(x, y) = x \cdot e^y + y \cdot e^x$ ed il vettore $v = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, si determinino i valori di α per i quali le derivate direzionali $\mathcal{D}_v f(0, 0)$ sono nulle e si calcoli poi $\mathcal{D}_{v,v}^2 f(0, 0), \forall \alpha$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = x^2 - y^2 \\ \text{s.v.: } x^2 + 4y^2 \leq 4 \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = -x + y + 1 \\ y' = x - y + e^t \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y \cdot y' \cdot x = (1 + x^2) \cdot (1 + y^2) \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

II M 4) Calcolare $\int \int_D x^2 + y^2 \, dx \, dy$ con $D = \{(x, y) : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

I Appello Sessione Estiva 2018

I M 1) Determinare le radici cubiche del numero complesso $z = \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}$.

I M 2) Dato α parametro reale positivo, determinare, al variare di α , esistenza ed eventuale valore del seguente limite: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy|^\alpha}{(x^2 + y^2)^2}$.

I M 3) Data l'equazione $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy + 3yz = 1$, soddisfatta nel punto $P = (1, 1, -1)$, determinare le derivate parziali del primo ordine della funzione implicita definita da tale equazione avente z come variabile dipendente.

I M 4) Data la funzione $f(x, y) = \log(e^{x^2+y^2} + e^{x^2-y^2})$ ed i vettori $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $w = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, si calcolino le derivate direzionali $\mathcal{D}_v f(0, 0)$ e $\mathcal{D}_w f(-1, 1)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = x^4 + y^4 \\ \text{s.v.: } x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x + 2y - 1 \\ y' = 2x + y + e^{3t} \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y'(1+x^2) = x(1+y^2) \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

II M 4) Calcolare $\int \int_D (x+y) dx dy$, dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1-x \leq y \leq 1-x^2\}$.

II Appello Sessione Autunnale 2018

I M 1) Determinare le radici cubiche del numero complesso $z = e^{1+\pi i} + e^{\pi i - i^2}$.

I M 2) Determinare continuità e differenziabilità della funzione $f(x, y) = x \cdot |x - y|$ nel punto $(0, 0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x, y, z) = x e^{x-y^2-z^2} = 2$, soddisfatta nel punto $P = (2, 1, -1)$, determinare le derivate parziali del primo ordine della funzione implicita definita da tale equazione avente z come variabile dipendente, nonché l'equazione del piano tangente alla corrispondente superficie nel punto $(x, y) = (2, 1)$.

I M 4) Data la funzione $f(x, y) = x e^{y^2-x^2}$ ed il versore $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, si calcolino le derivate direzionali $D_v f(1, 1)$ e $D_{v,-v}^2 f(1, 1)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = x^2 + y^2 \\ \text{s.v. } 1-x \leq y \leq 1-x^2 \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y + e^t \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y'' = y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$.

II M 4) Calcolare $\int \int_D y dx dy$, dove $\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, (1-x)^2 \leq y\}$.