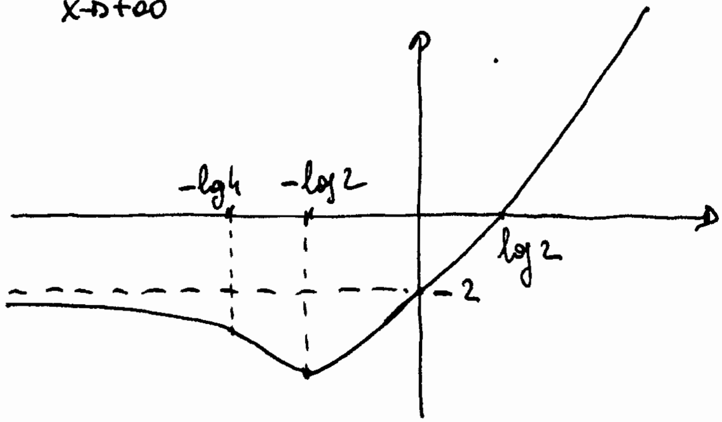
Compito di Matematica Generale del 12/2/2019 Compito A [MGA1]

1) $f(x)=e^{2x}-e^{x}-2$. C.E.: $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. $f(0)=-2$.



$f(x)\geq 0$: $t^2-t-2=(t-2)(t+1)\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^x\leq -1$: impossibile o per $e^x\geq 2$: $x\geq \log 2$.

$f'(x)=2e^{2x}-e^x=e^x(2e^x-1)\geq 0$ per $e^x\geq\frac{1}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow x\geq \log\frac{1}{2}=-\log 2$: $-\log 2$

$f''(x)=4e^{2x}-e^x=e^x(4e^x-1)\geq 0$ per $e^x\geq\frac{1}{4}\Rightarrow$

$\Rightarrow x\geq\log\frac{1}{4}=-\log 4$: $-\log 4$

$f(-\log 2)=-\frac{9}{4}$; $f(-\log 4)=-\frac{35}{16}$.

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-3x)}{3^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-3x)}{(-3x)}\cdot(-1)\cdot\frac{3x}{3^{3x}-1}=1\cdot(-1)\cdot\frac{1}{\log 3}=-\log_3 e=\log_3\frac{1}{e}$.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-e^{2x}+2^{-x}}{3^{x}-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{-x}}{-3x}=\left(\frac{\to+\infty}{\to+\infty}\right)=+\infty$ $\left(3x=o(2^{-x});\ e^{2x}\to 0;\ 3^{x}\to 0\right)$.

3) $\log x=o(e^x)$ se $\lim_{x\to x_0}\frac{\log x}{e^x}=0$: vera se $x\to 1$ e se $x\to+\infty$: $\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{e^x}=0$.

4) $f(x)=x^3\cdot e^{1-x^2}$: crescente dove $f'(x)\geq 0$: $3x^2e^{1-x^2}-2x^4e^{1-x^2}=x^2\cdot e^{1-x^2}\cdot(3-2x^2)\geq 0$ per

$3-2x^2\geq 0\Rightarrow x^2\leq\frac{3}{2}\Rightarrow -\sqrt{\frac{3}{2}}\leq x\leq\sqrt{\frac{3}{2}}$: $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ $\sqrt{\frac{3}{2}}$ crescente in $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$.

5) $f(x)=\frac{\log x-1}{\log x}=1-\frac{1}{\log x}$. C.E.: $x>0$ e $x\neq 1$. Convessa dove $f''(x)\geq 0$. $f'(x)=-\left(-\frac{\frac{1}{x}}{\log^2 x}\right)=$

$=f'(x)=\frac{1}{x\cdot\log^2 x}\Rightarrow f''(x)=-\frac{\log^2 x+x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}}{x^2\cdot\log^4 x}=-\frac{\log x(\log x+2)}{x^2\log^4 x}\geq 0$ per $\log x(\log x+2)\leq 0$.

$\log x\geq 0: x\geq 1$

$\log x+2\geq 0: x\geq e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

0	$\frac{1}{e^2}$	1	
	- - -	- - -	———
	- - -	———	———
	$-$	$+$	$-$

La funzione è convessa in $\left[\frac{1}{e^2};1\right[$.

6) Primitive di $f(x)$: $\int x\cdot e^{2-x^2}dx+k=-\frac{1}{2}\int -2x\cdot e^{2-x^2}dx+k=-\frac{1}{2}e^{2-x^2}+k$.

MGA2

$F(0)=2 \Rightarrow -\frac{1}{2}e^{2} + K = 2 \Rightarrow K = 2+\frac{1}{2}e^{2}$. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{2-x^2}+2+\frac{1}{2}e^{2}$.

7) $f(x;y)=x^2-y^3+3y$. Condizioni del I Ordine: $\nabla f(x;y)=(0;0)$.

$$\begin{cases} f'_x = 2x = 0 \\ f'_y = 3-3y^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \cup \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}. \quad H(x;y)=\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6y \end{Vmatrix}.$$

$H(0;1)=\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{Vmatrix}$: $\begin{cases} 2>0 \\ -6<0 \end{cases}$: Punto di Sella; $H(0;-1)=\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{Vmatrix}$: $\begin{cases} 2>0; 6>0 \\ 12>0 \end{cases}$: Punto di minimo.

8) $f(x)=x^2-3x+2$. Coefficiente angolare retta tangente: $m=f'(x_0)$.

$f'(x)=2x-3$. $2x-3=\frac{2}{3} \Rightarrow x=\frac{11}{6} \notin [2;3]$; $2x-3=\frac{4}{3} \Rightarrow x=\frac{13}{6} \in [2;3]$;

$2x-3=\frac{10}{3} \Rightarrow x=\frac{19}{6} \notin [2;3]$. Quindi $x_0=\frac{13}{6}$.

9) $A \cdot A = \begin{Vmatrix} 2 & k \\ k & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & k \\ k & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4+k^2 & 3k \\ 3k & k^2+1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}$ vera per $K=1$.

10)

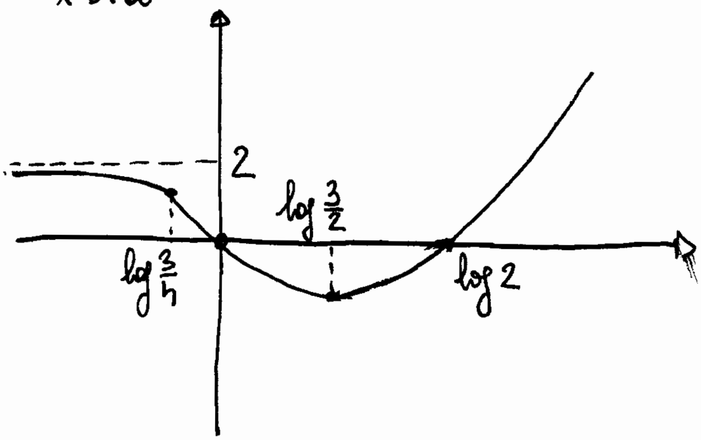
A B C	(A⇒B)	(A⇒C)	[(A⇒B) e (A⇒C)]	(B o C)	[(A⇒B) e (A⇒C)] ⇒ (B o C)
1 1 1	1	1	1	1	1
1 1 0	1	0	0	1	1
1 0 1	0	1	0	1	1
1 0 0	0	0	0	0	1
0 1 1	1	1	1	1	1
0 1 0	1	1	1	1	1
0 0 1	1	1	1	1	1
0 0 0	1	1	1	0	0

Dalla riga VIII risulta che la proposizione data non è sempre vera e quindi non è una tautologia.

Compito di Matematica Generale del 12/2/2019 Compito B [MGB1]

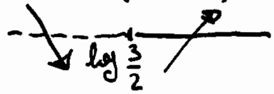
1) $f(x)=e^{2x}-3e^{x}+2$. C.E.: $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $f(0)=0$.

$f(x)\geq 0$: $t^2-3t+2=(t-1)(t-2)\geq 0$ vera per $e^x\leq 1 \Rightarrow x\leq 0$ o per $e^x\geq 2 \Rightarrow x\geq \log 2$.



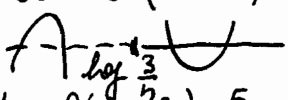
$f'(x)=2e^{2x}-3e^{x}=e^{x}(2e^{x}-3)\geq 0$ per $e^x\geq \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\geq \log\frac{3}{2}$:



$f''(x)=4e^{2x}-3e^{x}=e^{x}(4e^{x}-3)\geq 0$ per $e^x\geq \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\geq \log\frac{3}{4}$



$f\left(\log\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{4}$; $f\left(\log\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{16}$.

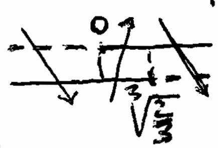
2) $\lim_{x\to 0}\frac{2^{4x}-1}{\log(1-2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2^{4x}-1}{4x}\cdot(-2)\cdot\frac{(-2x)}{\log(1-2x)}=\log 2\cdot(-2)\cdot 1=-2\log 2=\log\frac{1}{4}$.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-e^{2x}+3^{-x}}{x-2^{1-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^{-x}}{-2^{1-x}}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{-x}}{2^{-x}}=-\infty$. $\left(\begin{array}{l}2^{-x}=o(3^{-x});\ e^{2x}\to 0\\ 2x=o(3^{-x});\ x=o(2^{1-x})\end{array}\right)$.

3) $e^x=o(\log x)$ se $\lim_{x\to x_0}\frac{e^x}{\log x}=0$ vera solo se $x\to 0^+$. $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{\log x}=\frac{1}{(\to-\infty)}=0^-$.

4) $f(x)=x^2\cdot e^{1-x^3}$: crescente dove $f'(x)\geq 0$: $2xe^{1-x^3}-3x^4\cdot e^{1-x^3}=xe^{1-x^3}(2-3x^3)\geq 0$ per

$\begin{cases}x\geq 0\\ 2-3x^3\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x\leq\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\end{cases}$



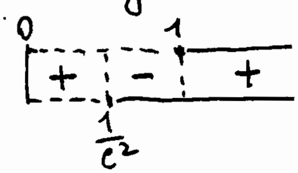
La funzione è crescente in $\left[0;\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right]$.

5) $f(x)=\frac{1+\log x}{\log x}=\frac{1}{\log x}+1$. C.E.: $x>0$ e $x\neq 1$. Convessa dove $f''(x)\geq 0$. $f'(x)=-\frac{\frac{1}{x}}{\log^2 x}=$

$=f'(x)=-\frac{1}{x\log^2 x}\Rightarrow f''(x)=+\frac{\log^2 x+2x\log x\cdot\frac{1}{x}}{x^2\log^4 x}=+\frac{\log x(\log x+2)}{x^2\log^4 x}\geq 0$ per $\log x(\log x+2)\geq 0$.

$\log x\geq 0$: $x\geq 1$

$\log x+2\geq 0$: $x\geq e^{-2}=\frac{1}{e^2}$



. La funzione è convessa in $\left]0;\frac{1}{e^2}\right]$ e $\left]1;+\infty\right[$.

6) Primitive di $f(x)$: $\int x\cdot e^{1+2x^2}dx+K=\frac{1}{4}\cdot\int 4xe^{1+2x^2}dx+K=\frac{1}{4}e^{1+2x^2}+K$.

$\boxed{MGB2}$

$F(0)=3 \Rightarrow \frac{1}{4}e^1+K=3 \Rightarrow K=3-\frac{1}{4}e$. $F(x)=\frac{1}{4}e^{1+2x^2}+3-\frac{1}{4}e$.

7) $f(x;y)=x^3-y^2-3x$. Condizioni del I Ordine: $\nabla f(x;y)=(0;0)$.

$\begin{cases} f'_x=3x^2-3=0 \\ f'_y=-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$. $H(x;y)=\begin{Vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$.

$H(1;0)=\begin{Vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}: \begin{cases} 6>0 \\ -2<0 \end{cases}$: Punto di Sella; $H(-1;0)=\begin{Vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}: \begin{cases} -6<0; -2<0 \\ 12>0 \end{cases}$: Punto di Massimo.

8) $f(x)=x^2-2x+5$. Coefficiente angolare retta tangente: $m=f'(x_0)$.

$f'(x)=2x-2$. $2x-2=1 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \notin [3;5]$; $2x-2=\frac{7}{3} \Rightarrow x=\frac{13}{6} \notin [3;5]$;

$2x-2=\frac{13}{3} \Rightarrow x=\frac{19}{6} \in [3;5]$. Quindi $x_0=\frac{19}{6}$.

9) $A \cdot A = \begin{Vmatrix} 1 & K \\ K & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & K \\ K & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1+K^2 & 3K \\ 3K & K^2+4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}$ vera per $K=1$.

10)

A	B	C	(B e C)	(A ⇒ B)	(A ⇒ C)	[(A ⇒ B) o (A ⇒ C)]	(B e C) ⇒ [(A ⇒ B) o (A ⇒ C)]
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1

La proposizione data è una tautologia.