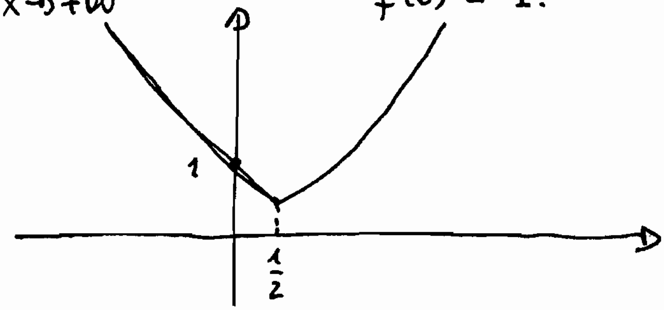
Compito di Matematica Generale del 4/6/2019 $\boxed{\text{CMG1}}$

1) $f(x)=e^{x^2-x}$. C.E.: $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ $f(0)=1$.

$f'(x)=(2x-1)\cdot e^{x^2-x}\geq 0$ per $x\geq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$



$f''(x)=\left(2+(2x-1)^2\right)\cdot e^{x^2-x}=(4x^2-4x+3)\cdot e^{x^2-x}\geq 0$

$4x^2-4x+3\geq 0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-12}}{4} \Rightarrow f''(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Funzione sempre convessa. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{-x}-1}{2^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{-x}-1}{-x}\cdot\frac{-x}{x}\cdot\frac{x}{2^x-1}=\log 3\cdot(-1)\cdot\frac{1}{\log 2}=-\frac{\log 3}{\log 2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+2\log x}{1+\log x}\right)^x=\left(\to 2\right)^{(\to+\infty)}=+\infty$.

3) $f(x)=x^2-2x+1$; $g(x)=1-x$. $F(x)=f(g(x))-g(f(x))=(1-x)^2-2(1-x)+1-\left(1-(x^2-2x+1)\right)=$

$=\cancel{1}+x^2-\cancel{2x}-\cancel{2}+\cancel{2x}+\cancel{1}-\cancel{1}+x^2-2x+\cancel{1}=2x^2-2x$. $F'(x)=4x-2\geq 0$ per $x\geq\frac{1}{2}$.

$F(x)$ è invertibile in $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ oppure in $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$. Da $2x^2-2x=y\Rightarrow$

$2x^2-2x-y=0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+2y}}{2}$. Due possibili inverse: $y=\frac{1-\sqrt{1+2x}}{2}$ e $y=\frac{1+\sqrt{1+2x}}{2}$.

La prima vale per $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[\to\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$, la seconda vale per $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[\to\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

4) $f(x)=x^2-4x+k \Rightarrow f'(x)=2x-4=f'(x_0)=m=2\Rightarrow x_0=3$.

Se $x=3\Rightarrow y=2x-1\Rightarrow y=6-1=5\Rightarrow f(3)=9-12+k=5\Rightarrow k=8$.

5) $\int_0^1 x\left(1-2e^{x^2}\right)dx=\int_0^1 x\,dx-\int_0^1 2x\,e^{x^2}dx=\left(\frac{x^2}{2}\right|_0^1-\left(e^{x^2}\right|_0^1=\frac{1}{2}-e+1=\frac{3}{2}-e$.

6) $f(x)=x\cdot e^{1-x^2}$. C.E.: $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^-$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0^+$.

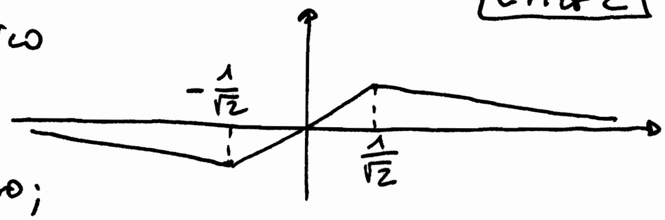
$f'(x)=1\cdot e^{1-x^2}+x(-2x)\cdot e^{1-x^2}=(1-2x^2)e^{1-x^2}\geq 0$ per $1-2x^2\geq 0\Rightarrow x^2\leq\frac{1}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\boxed{\text{EMG2}}$

Visti i limiti alla frontiera, il grafico della funzione è di questo tipo:



Quindi $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ è punto di minimo assoluto; mentre $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ è punto di massimo assoluto.

7) $f(x) = \log(\log(\log x)))$. C.E.: $\log(\log x) > 0 \Rightarrow \log x > 1 \Rightarrow x > e$.

8) $X = (1;2;4)$ e $Y = (-1;1;-1)$. Per essere ambedue perpendicolari a Z: dovrà essere $X \cdot Z = Y \cdot Z = 0 \Rightarrow \begin{cases} (1;2;4)\cdot(m;1;k) = m + 2 + 4k = 0 \\ (-1;1;-1)\cdot(m;1;k) = -m + 1 - k = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + 4k = -2 \\ m + k = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - k + 4k = -2 \\ m = 1 - k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3k = -3 \\ m = 1 - k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow Z = (2;1;-1).$$

9) $f(x;y) = (x-y)\cdot e^{x+y}$. $\nabla f(x;y) = \left(e^{x+y} + (x-y)\cdot e^{x+y}; -1e^{x+y} + (x-y)e^{x+y}\right)$

$$\nabla f(x;y) = (0;0) \Rightarrow \begin{cases} 1 + x - y = 0 \\ -1 + x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$: Sistema impossibile

quindi non ci sono punti stazionari.

10)

A	B	non A	(A δ B)	P_1: (non A) e (A δ B)	$P_1 \Rightarrow A$	$P_1 \Rightarrow B$
1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1

Se P_2 è la proposizione B allora $P_1 \Rightarrow P_2$ è una tautologia.