COMPITO di ANALISI MATEMATICA 5/07/2019

I M 1) Se $z_1 = e^{-1+3\pi\, i}$ e $z_2 = e\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$, calcolare $\sqrt{z_1 \cdot z_2}$.

Essendo $z_1 = e^{-1+3\pi\, i} = e^{-1} \cdot e^{3\pi\, i} = e^{-1}\left(\cos 3\pi + i\,\mathrm{sen}\,3\pi\right) =$
$= e^{-1}\left(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi\right) = -\,e^{-1}$, otteniamo:
$z_1 \cdot z_2 = e^{-1} \cdot \left(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi\right) \cdot e\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{3\pi}{4}\right) =$
$= e^{-1} \cdot e\left(\cos\left(\pi + \dfrac{3\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\pi + \dfrac{3\pi}{4}\right)\right) = 1 \cdot \left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{7\pi}{4}\right)$.
Quindi $\sqrt{z_1 \cdot z_2} = \sqrt{1} \cdot \left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{8} + k\,\dfrac{2\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{7\pi}{8} + k\,\dfrac{2\pi}{2}\right)\right), 0 \le k \le 1$.
Se $k = 0\,:\,\cos\dfrac{7\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{7\pi}{8}$, se $k = 1\,:\,\cos\dfrac{15\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{15\pi}{8}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \left|x^2 - y^2\right|$ determinare se essa risulta differenziabile nel punto $(0,0)$.
$f(x,y)$ è continua $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ed inoltre $f(x,y) = 0$. Risulta poi:
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h^2 - 0| - 0}{h} = 0\,;$
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|0 - h^2| - 0}{h} = 0\,.$
Per la differenziabilità dobbiamo verificare se:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0, y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0$ ovvero se
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|x^2 - y^2| - 0 - (0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ ovvero se, passando a coordinate polari:
$\lim\limits_{\varrho\to 0}\dfrac{\varrho^2|\cos^2\vartheta - \mathrm{sen}^2\,\vartheta|}{\varrho} = 0$ e questo limite è vero e la convergenza è uniforme in quanto $\left|\cos^2\vartheta - \mathrm{sen}^2\,\vartheta\right| < 2$ e quindi la funzione è differenziabile.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y,z) = x\,e^{y-z} - y\,e^{x-z} = 0$, soddisfatta in $P = (0,0,0)$, determinare le derivate parziali del primo ordine di una funzione implicita definibile con tale equazione avente l'opportuna variabile dipendente. Di tale funzione implicita si determini poi il differenziale totale del II ordine.
Da $\nabla f(x,y,z) = (e^{y-z} - y\,e^{x-z}\,; x\,e^{y-z} - e^{x-z};\, -x\,e^{y-z} + y\,e^{x-z})$ otteniamo :
$\nabla f(0,0,0) = (1\,;\,-1;0)$ e dato che $f'_y(0,0,0) = -1 \ne 0$ è possibile definire una funzione implicita $(x,z) \to y(x,z)$. Per le sue derivate prime abbiamo:
$\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{1}{-1} = 1;\ \dfrac{\partial y}{\partial z} = -\dfrac{0}{-1} = 0$ e quindi anche $\mathrm{d}y = 1\,\mathrm{d}x + 0\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$.
Per il differenziale totale d^2y usiamo la $\mathrm{d}^2y = -\dfrac{\mathrm{d}^2 f(x,y,z)}{f'_y}$.

Da $\mathbb{H}(x,y,z) = \left\|\begin{matrix} -\,y\,e^{x-z} & e^{y-z} - e^{x-z} & -\,e^{y-z} + y\,e^{x-z} \\ e^{y-z} - e^{x-z} & x\,e^{y-z} & -\,x\,e^{y-z} + e^{x-z} \\ -\,e^{y-z} + y\,e^{x-z} & -\,x\,e^{y-z} + e^{x-z} & x\,e^{y-z} - y\,e^{x-z} \end{matrix}\right\|$ otteniamo:

$$\mathbb{H}(0,0,0) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$ da cui $\mathrm{d}^2 y(0,0) = -\dfrac{-2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + 2\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{-1}$ e dato che $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$ otteniamo infine $\mathrm{d}^2 y(0,0) = -2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + 2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = 0$.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = x\,e^y - y\,e^x$, e dato il versore $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, determinare i valori di α per i quali risulta $D^2_{v,v} f(1,1) = 0$.

$f(x,y) = x\,e^y - y\,e^x$ è una funzione differenziabile due volte $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Quindi:

$D_v f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot v$ e $D^2_{v,v} f(1,1) = v \cdot \mathbb{H}(1,1) \cdot v^T$.

Risulta $\nabla f(x,y) = (e^y - y\,e^x\,; x\,e^y - e^x) \Rightarrow \nabla f(1,1) = (0,0)$;

Da $\nabla f(x,y) = (e^y - y\,e^x\,; x\,e^y - e^x)$ otteniamo $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} -y\,e^x & e^y - e^x \\ e^y - e^x & x\,e^y \end{Vmatrix}$ e quindi:

$$\mathbb{H}(1,1) = \begin{Vmatrix} -e & 0 \\ 0 & e \end{Vmatrix} \Rightarrow D^2_{v,v} f(1,1) = \| \cos\alpha \quad \operatorname{sen}\alpha \| \cdot \mathbb{H}(1,1) \cdot \begin{Vmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{Vmatrix} =$$

$$= \| \cos\alpha \quad \operatorname{sen}\alpha \| \cdot \begin{Vmatrix} -e & 0 \\ 0 & e \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{Vmatrix} = \| \cos\alpha \quad \operatorname{sen}\alpha \| \cdot \begin{Vmatrix} -e\cos\alpha \\ e\operatorname{sen}\alpha \end{Vmatrix} =$$

$= -e\cos^2\alpha + e\operatorname{sen}^2\alpha = -e\cos 2\alpha = 0$ per :

$\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$ oppure $2\alpha = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{3\pi}{4}$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x\,y^2 \\ \text{s.v.: } \begin{cases} 3y + x - 3 \le 0 \\ 0 \le x \\ 0 \le y \end{cases} \end{cases}$

La funzione $f(x,y)$ del problema è una funzione continua, la regione ammissibile è un triangolo nel primo quadrante del piano reale, cioè un insieme compatto, e quindi sicuramente esistono i valori massimo e minimo.

Non è conveniente usare le condizioni di Kuhn-Tucker. Controlliamo i punti di massimo o di minimo liberi e poi studiamo il problema nei punti di frontiera.

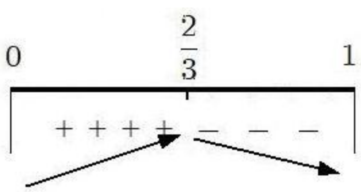
Nel primo quadrante, essendo $x \ge 0$ e $y \ge 0$, risulta $f(x,y) = x\,y^2 \ge 0$, e quindi tutti i punti appartenenti agli assi $x = 0$ e $y = 0$, dove $f(x,0) = f(0,y) = 0$, sono punti di minimo.

Per i punti di massimo o minimo liberi otteniamo: $\begin{cases} f'_x = y^2 = 0 \\ f'_y = 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall\,x \\ y = 0 \end{cases}$, ovvero i punti già studiati.

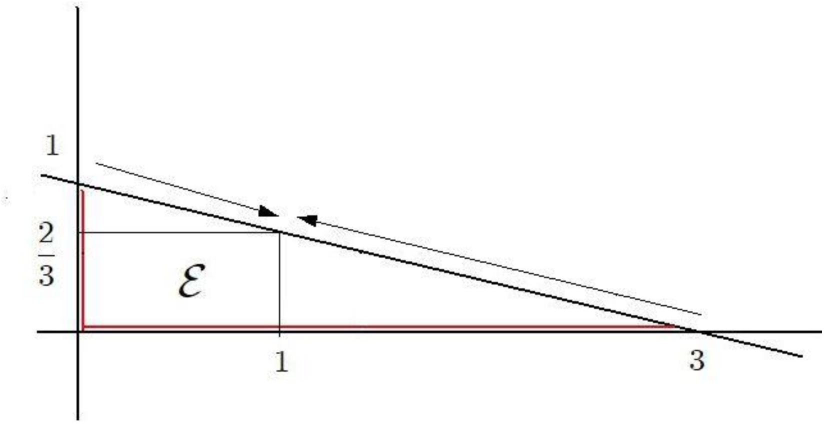
Resta solo da studiare i punti soddisfacenti alla $3y + x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 - 3y$.

Sostituendo otteniamo: $f(3-3y, y) = (3-3y)\,y^2 = 3y^2 - 3y^3$ e derivando otteniamo:

$f'(y) = 6y - 9y^2 = 3y\,(2 - 3y) \ge 0$ per $0 \le y \le \dfrac{2}{3}$.



Quindi il punto $\left(1; \dfrac{2}{3}\right)$ è il punto di massimo, con $f\left(1; \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{9}$ mentre tutti i punti $(x,0)$ e $(0,y)$ sono punti di minimo (linee rosse).



II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x - y + t \\ y' = x - t \end{cases}$.

$\begin{cases} x' = x - y + t \\ y' = x - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' - x + y = t \\ -x + y' = -t \end{cases} \Rightarrow \left\| \begin{matrix} D-1 & 1 \\ -1 & D \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} t \\ -t \end{matrix} \right\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} D-1 & 1 \\ -1 & D \end{vmatrix} \cdot (x) = \begin{vmatrix} t & 1 \\ -t & D \end{vmatrix} \Rightarrow ((D-1)\,D+1)(x) = D(t) + t \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(D^2 - D + 1\right)(x) = 1 + t$. Risolvendo l'equazione omogenea $x'' - x' + x = 0$ troviamo $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Quindi la soluzione generale dell'omogenea sarà: $x(t) = c_1\, e^{\frac{1}{2}t} \cdot \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, t + c_2\, e^{\frac{1}{2}t} \cdot \operatorname{sen} \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, t$. Per trovare una soluzione particolare della non omogenea poniamo $x_0(t) = at + b \Rightarrow x_0'(t) = a \Rightarrow x_0''(t) = 0$ e sostituendo avremo: $0 - a + at + b = 1 + t \Rightarrow a = 1$ e $b - a = 1 \Rightarrow b = 2$ e quindi la soluzione generale dell'equazione non omogenea sarà $x(t) = c_1\, e^{\frac{1}{2}t} \cdot \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, t + c_2\, e^{\frac{1}{2}t} \cdot \operatorname{sen} \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, t + t + 2$.

Per la soluzione generale per $y(t)$ usiamo la prima equazione $y = x - x' + t$ ed avremo:

$$y(t) = \frac{c_1}{2}\, e^{\frac{1}{2}t} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}\, t + \sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}\, t \right) + \frac{c_2}{2}\, e^{\frac{1}{2}t} \left(\operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}\, t - \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\, t \right) + 2t + 1\ .$$

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} (x^2 + 2x + 1)\, y' = (x+1)(1+y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

La $\left(x^2 + 4x + 1\right) y' = (x+2)\left(1+y^2\right)$ è una equazione a variabili separabili. Da

$\left(x^2 + 4x + 1\right) y' = (x+2)\left(1+y^2\right) \Rightarrow \dfrac{1}{1+y^2}\, y' = \dfrac{x+2}{x^2+4x+1} \Rightarrow$

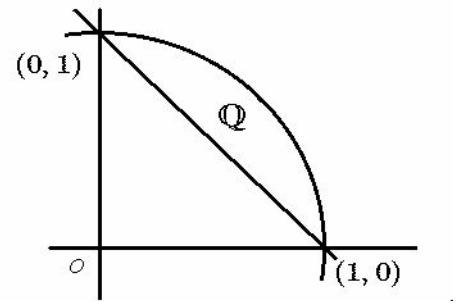
$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{1+y^2}\, \mathrm{d}y = \int \frac{x+2}{x^2+4x+1}\, \mathrm{d}x + k \Rightarrow \operatorname{arctg} y = \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+1}\, \mathrm{d}x + k \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{arctg} y = \dfrac{1}{2} \log\left(x^2 + 4x + 1\right) + k$. Quindi $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2} \log\left(x^2 + 4x + 1\right) + k \right)$.

Se $y(0) = 1$ avremo $1 = \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2} \log(0 + 0 + 1) + k \right) \Rightarrow 1 = \operatorname{tg}(k) \Rightarrow k = \dfrac{\pi}{4}$.

E quindi la soluzione sarà $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2} \log\left(x^2 + 4x + 1\right) + \dfrac{\pi}{4} \right)$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{Q}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 1-x\le y\,;x^2+y^2\le 1\right\}$.



$$\iint\limits_{\mathbb{Q}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\,xy^2\Big|_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(x\big(1-x^2\big) - x(1-x)^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x - x^3 - x - x^3 + 2x^2\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 2x^2 - 2x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{4}x^4\Big|_0^1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}\,.$$