COMPITO di ANALISI MATEMATICA 19/09/2019

I M 1) Calcolare $\sqrt{\dfrac{2(1-i)(2+3i)}{(5+i)(1+i)}}$.

$$\frac{2(1-i)(2+3i)}{(5+i)(1+i)}=\frac{2(2-2i+3i+3)}{5+5i+i-1}=\frac{2(5+i)}{4+6i}=\frac{5+i}{2+3i}=\frac{5+i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}=$$
$$=\frac{10+2i-15i+3}{4+9}=\frac{13-13i}{13}=1-i=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=$$
$=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{7\pi}{4}\right)$. Quindi:
$$\sqrt{\frac{2(1-i)(2+3i)}{(5+i)(1+i)}}=\sqrt{1-i}=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}+k\,\frac{2\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{8}+k\,\frac{2\pi}{2}\right)\right),0\le k\le 1$$
Per cui $c_1=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\dfrac{7\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{7\pi}{8}\right)$ e $c_2=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\dfrac{15\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{15\pi}{8}\right)$.

I M 2) Determinare se la funzione $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{sen}^2\,(xy)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ risulta differenziabile nel punto $(0,0)$.

Avremo $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\mathrm{sen}^2\,(xy)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\mathrm{sen}^2\,(xy)}{(xy)^2}\cdot\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ ed essendo:

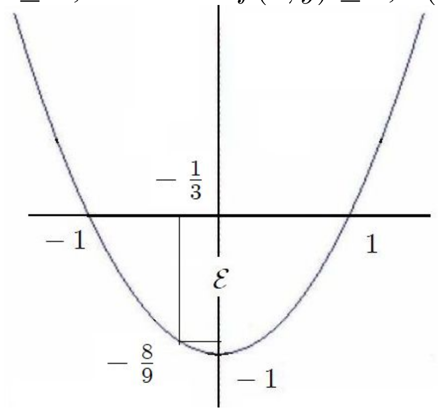
$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\mathrm{sen}^2\,(xy)}{(xy)^2}=\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{sen}^2\,t}{t^2}=1$ mentre $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\Rightarrow\lim_{\varrho\to0}\frac{\varrho^4\cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}{\varrho^2}=$
$=\displaystyle\lim_{\varrho\to0}\varrho^2\cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta=0$ con convergenza uniforme in quanto $\left|\cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta\right|<1$, risulta $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\mathrm{sen}^2\,(xy)}{x^2+y^2}=1\cdot0=0$ e quindi $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$. Risulta poi:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\left(\frac{\mathrm{sen}^2\,(h\cdot0)}{h^2+0^2}-0\right)\cdot\frac{1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0\,;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\left(\frac{\mathrm{sen}^2\,(0\cdot h)}{0^2+h^2}-0\right)\cdot\frac{1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0\,.$$
Per la differenziabilità dobbiamo infine verificare se:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=0 \text{ ovvero se}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{\mathrm{sen}^2\,(xy)}{x^2+y^2}-0-0\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\mathrm{sen}^2\,(xy)}{(xy)^2}\cdot\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=0$$
ovvero se, essendo $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\mathrm{sen}^2\,(xy)}{(xy)^2}=1$ e passando per l'altro a coordinate polari si ha:

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow\lim_{\varrho\to0}\frac{\varrho^4\cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}{\varrho^3}=\lim_{\varrho\to0}\varrho\cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta=0$ e la convergenza è uniforme e quindi la funzione è differenziabile.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = x^3y + xy^2 - 2y = 0$ ed il punto $\mathrm{P}_0 = (1,1)$ che la soddisfa, determinare derivata prima e seconda della funzione implicita $x \to y(x)$ definibile con esso e l'espressione del polinomio di Taylor di II grado nel punto opportuno.
Da $\nabla f(x,y) = \left(3x^2y + y^2; x^3 + 2xy - 2\right)$ otteniamo $\nabla f(1,1) = (4;1)$ e quindi:
$y'(1) = -\dfrac{4}{1} = -4$. Avremo poi:
$\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 6xy & 3x^2+2y \\ 3x^2+2y & 2x \end{Vmatrix} \Rightarrow \mathbb{H}(1;1) = \begin{Vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 2 \end{Vmatrix}$ e quindi, essendo:
$y'' = -\dfrac{f''_{xx} + 2f''_{xy}\,y' + f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$, otteniamo $y''(1) = -\dfrac{6 + 10\cdot(-4) + 2\,(-4)^2}{1} = 2$.
Quindi $P_2(x;1) = 1 + (-4)(x-1) + \dfrac{2}{2}(x-1)^2 = 1 - 4(x-1) + (x-1)^2$.

I M 4) Data $f(x,y) = x\,y^3 - 3x^2 + 3x - 2y$ e $P_0 = (1,-2)$, calcolare $\mathcal{D}_v f(0,0)$, dove v rappresenta la direzione che dall'origine $(0,0)$ porta a P_0.
$f(x,y) = x\,y^3 - 3x^2$ è una funzione differenziabile $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Quindi $D_v f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot v$.
Risulta $\nabla f(x,y) = \left(y^3 - 6x + 3\,; 3xy^2 - 2\right) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (3,-2)$.
Essendo $\|P_0\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ risulta $v = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ e quindi avremo:
$$\mathcal{D}_v f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot v = (3,-2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = y\,(x-1) \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2 - y - 1 \le 0 \\ y \le 0 \end{cases} \end{cases}$.
La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, la regione ammissibile $\mathcal{E}$ è un insieme compatto e quindi sicuramente esistono valori massimi e minimi.
Dato che in $\mathcal{E}$ risulta $y \le 0$ e $x \le 1$, sarà anche $f(x,y) \ge 0, \forall\,(x,y) \in \mathcal{E}$.



Usando le condizioni di Kuhn-Tucker, formiamo la funzione Lagrangiana:
$\Lambda(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = yx - y - \lambda_1\left(x^2 - y - 1\right) - \lambda_2\,(y)$.
1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$\begin{cases} \Lambda'_x = y = 0 \\ \Lambda'_y = x - 1 = 0 \\ x^2 - y - 1 \le 0 \\ y \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ x^2 - y - 1 \le 0 \\ y \le 0 \end{cases}$; ma $\mathbb{H}(x;y) = \mathbb{H}(1;0) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$ che ci indica un punto di sella, da ricontrollare comunque in quanto $(1;0)$ si trova sulla frontiera di $\mathcal{E}$.

2) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$:

$\begin{cases} \Lambda'_x = y - 2\lambda_1 x = 0 \\ \Lambda'_y = x - 1 + \lambda_1 = 0 \\ y = x^2 - 1 \\ y \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda_1 \\ y = (1-\lambda_1)^2 - 1 \\ (1-\lambda_1)^2 - 1 - 2\lambda_1(1-\lambda_1) = 0 \\ y \le 0 \end{cases}$ che porta all'equazione:

$\lambda_1^2 - 2\lambda_1 + 1 - 1 - 2\lambda_1 + 2\lambda_1^2 = 3\lambda_1^2 - 4\lambda_1 = \lambda_1(3\lambda_1 - 4) = 0$ da cui due soluzioni:

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ y \le 0; \text{ vera} \end{cases}$ già visto e $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{8}{9} \\ \lambda_1 = \frac{4}{3} > 0 \\ y \le 0; \text{ vera} \end{cases}$ possibile punto di Max.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$:

$\begin{cases} \Lambda'_x = y = 0 \\ \Lambda'_y = x - 1 - \lambda_2 = 0 \\ y = 0 \\ x^2 - y - 1 \le 0 \end{cases}$. Ma se $y = 0$ risulta $f(x;0) = 0$ ovvero funzione costante.

4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$:

$\begin{cases} \Lambda'_x = y - 2\lambda_1 x = 0 \\ \Lambda'_y = x - 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ y = x^2 - 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -2 < 0 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ possibile punto di Min e

$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ già visto. Per il Teorema di Weierstrass quindi $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{8}{9}\right)$ è il punto di Massimo, con $f\left(-\frac{1}{3}; -\frac{8}{9}\right) = \frac{32}{27}$ mentre $(-1;0)$, e tutti i punti dell'asse $y = 0$, sono punti di minimo, con $f(x;0) = 0$.

II M 2) Determinare, al variare del parametro k, la natura dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^3 - kxy + y^2$.

Per analizzare la natura dei punti stazionari della funzione applichiamo le condizioni del primo e del secondo ordine. Per le condizioni del primo ordine poniamo:

$\nabla f(x,y) = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 3x^2 - ky = 0 \\ f'_y = 2y - kx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - \frac{k^2}{2}x = x\left(3x - \frac{k^2}{2}\right) = 0 \\ y = \frac{k}{2}x \end{cases}$ e quindi otteniamo due punti stazionari: $P_1 = (0;0)$ e $P_2 = \left(\frac{k^2}{6}; \frac{k^3}{12}\right)$.

Per le condizioni del secondo ordine costruiamo la matrice Hessiana: $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 6x & -k \\ -k & 2 \end{Vmatrix}$.

Essendo $\mathbb{H}(0;0) = \begin{Vmatrix} 0 & -k \\ -k & 2 \end{Vmatrix}$, ed essendo $|\mathbb{H}_2| = -k^2 < 0$ il punto $P_1 = (0;0)$ è certamente un punto di sella se $k \neq 0$; se $k = 0$ abbiamo $f(x,y) = x^3 + y^2$ e dato che $f(x,0) < 0$ per $x < 0$ mentre $f(x,0) > 0$ per $x > 0$, anche per $k = 0$ il punto $P_1 = (0;0)$ è un punto di sella. Abbiamo poi:

$\mathbb{H}\left(\dfrac{k^2}{6}; \dfrac{k^3}{12}\right) = \begin{Vmatrix} k^2 & -k \\ -k & 2 \end{Vmatrix}$, ed essendo $\begin{cases} |\mathbb{H}_1| = k^2 \geq 0\,;\, 2 > 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 2k^2 - k^2 \geq 0 \end{cases}$ il punto P_2 è certamente un punto di minimo se $k \neq 0$. Se fosse $k = 0$ si riottiene il caso già studiato del punto $(0,0)$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = x + e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$.

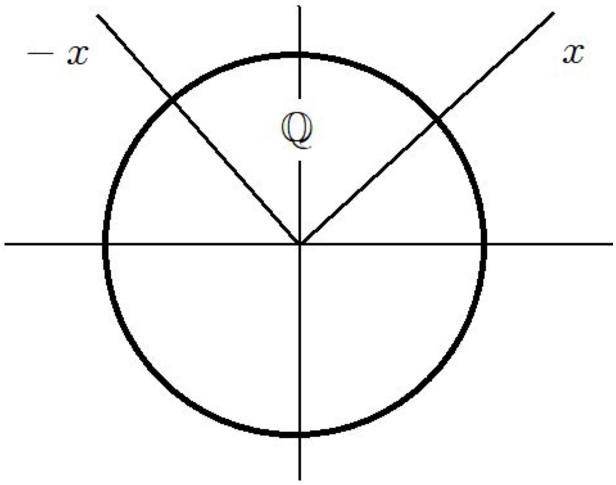
Determiniamo anzitutto la soluzione generale dell'equazione omogenea $y'' - 3y' + 2y = 0$.
Il suo polinomio caratteristico $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ha soluzioni $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.
Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea possiamo considerare separatamente il fattore x ed il fattore e^x.
Per il fattore x, annichilato dall'operatore D^2, scegliamo una soluzione particolare del tipo $y_0 = ax + b$. Derivando abbiamo $y_0' = a$ e $y_0'' = 0$ per cui, sostituendo, otteniamo:

$0 - 3a + 2ax + 2b = x$ e quindi $\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 3a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2}a = \frac{3}{4} \end{cases}$ e quindi $y_0 = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}$.

Dato che il fattore e^x è presente anche nella soluzione generale dell'omogenea, per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea relativa a questo fattore dovremo considerare la soluzione $\lambda = 1$ come doppia e quindi ipotizzare, come soluzione particolare, una soluzione del tipo $y_0 = me^x + kxe^x$. Derivando:
$y_0' = me^x + ke^x + kxe^x = (m+k)e^x + kxe^x$;
$y_0'' = (m+k)e^x + ke^x + kxe^x = (m+2k)e^x + kxe^x$. Sostituendo avremo:
$(m+2k)e^x + kxe^x - 3((m+k)e^x + kxe^x) + 2(me^x + kxe^x) = e^x$ da cui:
$(m + 2k - 3m - 3k + 2m)e^x + (k - 3k + 2k)xe^x = -ke^x = e^x \Rightarrow k = -1$.
Quindi $y_0 = -xe^x$.
La soluzione generale dell'equazione non omogenea sarà quindi:
$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4} - xe^x$.

Per soddisfare le condizioni $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$, essendo $y'(x) = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} + \dfrac{1}{2} - (x+1)e^x$ otteniamo il sistema: $\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + \frac{3}{4} = 0 \\ y'(0) = c_1 + 2c_2 + \frac{1}{2} - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{3}{4} \\ c_1 + 2c_2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -3 \\ c_2 = \frac{9}{4} \end{cases}$ da cui la soluzione del problema: $y(x) = -3e^x + \dfrac{9}{4}\,e^{2x} + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4} - xe^x$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leq y\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.



Conviene calcolare l'integrale per sostituzione in coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$ ed avremo:

$$\iint_{\mathbb{Q}} x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 \rho^2 \cos^2\vartheta \cdot \rho \operatorname{sen}\vartheta \cdot \rho \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 \rho^4 \cos^2\vartheta \cdot \operatorname{sen}\vartheta \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{1}{5}\rho^5\right|_0^1 \cos^2\vartheta \cdot \operatorname{sen}\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{5}\cos^2\vartheta \cdot \operatorname{sen}\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = -\frac{1}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2\vartheta \,\mathrm{d}(\cos\vartheta) =$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{15}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right) = \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{15\sqrt{2}}\,.$$