Prova Intermedia di ANALISI MATEMATICA 21/11/2019

I M 1) Data l'equazione polinomiale $x^2 - \sqrt{2}\,x + k = 0$, si determini il valore di k per il quale tale equazione ammette la soluzione $x = e^{\frac{\pi}{4}i}$. Si calcolino poi le radici quadrate dell'altra soluzione.

Da $x = e^{\frac{\pi}{4}i}$ otteniamo $x = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$; dalla $x^2 - \sqrt{2}\,x + k = 0$ si ha:

$$x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4k}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2-4k}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ se } 2-4k = -2 \Rightarrow k = 1\,.$$

La seconda soluzione dell'equazione è quindi $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4}$.

Quindi $\sqrt{x_2} = \cos\left(\frac{7\pi}{8} + k\,\frac{2\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{8} + k\,\frac{2\pi}{2}\right), 0 \le k \le 1$ da cui:

$c_1 = \cos\frac{7\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{8}$ e $c_2 = \cos\frac{15\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{15\pi}{8}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & : (x,y) \neq (0,0) \\ k & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$, determinare l'opportuno valore di k che rende la funzione continua nel punto $(0,0)$, e determinare poi se in tale punto risulta anche differenziabile.

Calcoliamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3 \cos^3\vartheta - \varrho^3\,\mathrm{sen}^3\,\vartheta}{\varrho} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho^2\left(\cos^3\vartheta - \mathrm{sen}^3\,\vartheta\right) = 0$$ con convergenza uniforme in quanto $\left|\cos^3\vartheta - \mathrm{sen}^3\,\vartheta\right| \le 2$. Quindi $k = 0$. Avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h^3 - 0}{\sqrt{h^2+0}} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{|h|\,h} = 0\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{0 - h^3}{\sqrt{0+h^2}} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h^3}{|h|\,h} = 0\,.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Per la differenziabilità dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0, y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^3-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0$$ ovvero se, passando a coordinate polari:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0}\frac{\varrho^3\left(\cos^3\vartheta - \mathrm{sen}^3\,\vartheta\right)}{\varrho^2} = \lim_{\varrho\to 0}\varrho\left(\cos^3\vartheta - \mathrm{sen}^3\,\vartheta\right) = 0$$ e la convergenza è uniforme e quindi la funzione è differenziabile.

I M 3) Data la funzione $f(x,y) = e^{y^2 - x^2} - e^{x^2 - y^2}$ ed il versore $v = (\cos\alpha, \mathrm{sen}\,\alpha)$, determinare i valori di α per i quali la derivata direzionale $D_v f(1,1)$ è nulla, e per tali valori di α si calcoli $D^2_{v,-v} f(1,1)$.

La funzione, essendo una composizione di esponenziali e polinomi, è certamente differenziabile $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Da $\nabla f(x,y)=\left(-2x\,e^{y^2-x^2}-2x\,e^{x^2-y^2};2y\,e^{y^2-x^2}+2y\,e^{x^2-y^2}\right)$ otteniamo :

$\nabla f(x,y)=\left(-2x\left(e^{y^2-x^2}+e^{x^2-y^2}\right);2y\left(e^{y^2-x^2}+e^{x^2-y^2}\right)\right)\Rightarrow\nabla f(1,1)=(-4;4)$.

Quindi :

$D_v f(1,1)=\nabla f(1,1)\cdot(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)=(-4;4)\cdot(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)=4(\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha)=0$

per $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ e $\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$. Dato che $D^2_{v,-v}f(1,1)=v\cdot\mathbb{H}(1,1)\cdot(-v)^T$, avremo:

$$\mathbb{H}(x,y)=\left\|\begin{matrix}(4x^2-2)e^{y^2-x^2}-(4x^2+2)e^{x^2-y^2} & 4xy\left(e^{x^2-y^2}-e^{y^2-x^2}\right)\\ 4xy\left(e^{x^2-y^2}-e^{y^2-x^2}\right) & (4y^2+2)e^{y^2-x^2}-(4y^2-2)e^{x^2-y^2}\end{matrix}\right\|.$$

Quindi $\mathbb{H}(1,1)=\left\|\begin{matrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{matrix}\right\|$ per cui:

$$D^2_{v,-v}f(1,1)=\|\cos\alpha\quad\operatorname{sen}\alpha\|\cdot\mathbb{H}(1,1)\cdot\left\|\begin{matrix}-\cos\alpha\\ -\operatorname{sen}\alpha\end{matrix}\right\|.$$

Se $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ si ha: $D^2_{v,-v}f(1,1)=\left\|\begin{matrix}\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2}\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}-\frac{\sqrt2}{2}\\ -\frac{\sqrt2}{2}\end{matrix}\right\|=2-2=0$;

Se $\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$ si ha: $D^2_{v,-v}f(1,1)=\left\|\begin{matrix}-\frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2}\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}\frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt2}{2}\end{matrix}\right\|=2-2=0$.

I M 4) L'equazione $f(x,y)=e^{x+y}-x+y=0$ è soddisfatta in un punto nel quale, con essa, si definisce una funzione implicita $x\to y(x)$ che presenta un punto stazionario. Determinare tale punto e la natura del punto stazionario.

Se poniamo $\begin{cases}x+y=0\\ x-y=1\end{cases}$ ottenimo $\begin{cases}x=\frac12\\ y=-\frac12\end{cases}$ ed infatti il punto $P_0=\left(\dfrac12,-\dfrac12\right)$ soddisfa l'equazione data.

Essendo $\nabla f(x,y)=(e^{x+y}-1;e^{x+y}+1)$ si ha $\nabla f\left(\dfrac12,-\dfrac12\right)=(0,2)$. E' quindi possibile definire una funzione implicita $x\to y(x)$ con $y'\left(\dfrac12\right)=-\dfrac02=0$. Quindi $x=\dfrac12$ è un punto stazionario per la funzione implicita.

Da $\mathbb{H}(x,y)=\left\|\begin{matrix}e^{x+y} & e^{x+y}\\ e^{x+y} & e^{x+y}\end{matrix}\right\|$ si ha $\mathbb{H}\left(\dfrac12,-\dfrac12\right)=\left\|\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\|$ e quindi, da:

$y''=-\dfrac{f''_{xx}+2f''_{xy}\,y'+f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$, otteniamo $y''\left(\dfrac12\right)=-\dfrac{1+2\cdot1\cdot0+1\cdot0^2}{2}=-\dfrac12$.

Da $y'\left(\dfrac12\right)=0$ e $y''\left(\dfrac12\right)=-\dfrac12<0$ si deduce che $x=\dfrac12$ è un punto di massimo per la funzione implicita.

I M 5) Data la composizione di funzioni $y=f(g(t_1;t_2))$, con $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ e $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g:(t_1;t_2)\to(x_1;x_2;x_3)$, $f:(x_1;x_2;x_3)\to y$, esprimere $\dfrac{\partial(y)}{\partial(t_1;t_2)}$ mediante prodotto di opportune matrici Jacobiane. Si applichi poi tale formula al caso:

$f(x_1;x_2;x_3)=2x_1x_2-3x_3$, $g(t_1;t_2)=\left(t_1\,t_2;2t_1-t_2;t_2^3\right)$ nel punto $(t_1;t_2)=(1;-1)$.

Da $(t_1;t_2) \to (x_1;x_2;x_3) \to y$, per la regola di derivazione della funzione composta, si ha:
$$\frac{\partial(y)}{\partial(t_1;t_2)} = \frac{\partial(y)}{\partial(x_1;x_2;x_3)} \cdot \frac{\partial(x_1;x_2;x_3)}{\partial(t_1;t_2)} = \frac{\partial(f)}{\partial(x_1;x_2;x_3)} \cdot \frac{\partial(x_1;x_2;x_3)}{\partial(t_1;t_2)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\| \begin{matrix} \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial y}{\partial t_2} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} \end{matrix} \right\|.$$
Se $f(x_1;x_2;x_3) = 2x_1x_2 - 3x_3$, risulta $\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{matrix} \right\| = \| \begin{matrix} 2x_2 & 2x_1 & -3 \end{matrix} \|$ per cui, sostituendo: $\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{matrix} \right\| = \| \begin{matrix} 4t_1 - 2t_2 & 2t_1\, t_2 & -3 \end{matrix} \|$;

se $g(t_1;t_2) = \left(t_1\, t_2; 2t_1 - t_2; t_2^3\right)$, risulta $\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} t_2 & t_1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3t_2^2 \end{matrix} \right\|$.

Passando al calcolo nel punto $(t_1;t_2) = (1;-1)$ otteniamo:
$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial y}{\partial t_2} \end{matrix} \right\| = \| \begin{matrix} 4t_1 - 2t_2 & 2t_1\, t_2 & -3 \end{matrix} \| \cdot \left\| \begin{matrix} t_2 & t_1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3t_2^2 \end{matrix} \right\| \Rightarrow$$
$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial y}{\partial t_2} \end{matrix} \right\| = \| \begin{matrix} 6 & -2 & -3 \end{matrix} \| \cdot \left\| \begin{matrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{matrix} \right\| = \| \begin{matrix} -10 & -1 \end{matrix} \|.$$