Prova Intermedia Matematica Generale 4/11/2019 $\boxed{\text{Compito A2}}$

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\log_2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)=1-\log_2 1=1.\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon): x>\delta(\varepsilon)\Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon.$

2) $\lim_{x\to0}\frac{\log(1+tg^2x^2)}{\log(1+x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{\log(1+tg^2x^2)}{tg^2x^2}\cdot\frac{tg^2x^2}{x^4}\cdot\frac{x^4}{\log(1+x^4)}=1\cdot1\cdot1=1.$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-3}\right)^{1-2x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-3+4}{3x-3}\right)^{1-2x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{4}{3x-3}\right)^{3x-3}\right]^{\frac{1-2x}{3x-3}}=\left(e^4\right)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e^8}}.$

3) $f(x)=\frac{\log x-2}{\log^2x-\log x-2}=\frac{\log x-2}{(\log x-2)(\log x+1)}.$ C.E.: $x>0$ e $x\neq e^2$ e $x\neq\frac{1}{e}$.

$\lim_{x\to0^+}f(x)=0^-$; in $x=0$ Discontinuità di III specie (da destra); $\lim_{x\to e^2}f(x)=\frac{1}{3}$; in $x=e^2$ Discontinuità di III specie; $\lim_{x\to\frac{1}{e}}f(x)=\left(\frac{\to-3}{\to0}\right)\to\infty$; in $x=\frac{1}{e}$ Discontinuità di II specie.

4) $f(x)=e^{1+x}=y\Rightarrow 1+x=\log y\Rightarrow x=\log y-1\Rightarrow f^{-1}(x)=\log x-1$;

$g(x)=\log x-2=y\Rightarrow\log x=y+2\Rightarrow x=e^{y+2}\Rightarrow g^{-1}(x)=e^{x+2}.$

$f^{-1}(g(x))=f^{-1}(\log x-2)=\log(\log x-2)-1$;

$f(g^{-1}(x))=f(e^{x+2})=e^{1+e^{x+2}}.$

5)

A	B	C	D	(C o D)	(A⇒B)	(B o D)	[(C o D) e (A⇒B)]	[(C o D) e (A⇒B)] ⇒ (B o D)
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1

La proposizione [(C o D) e (A⇒B)] ⇒ (B o D) risulta una tautologia solo sotto l'ipotesi che la proposizione D sia sempre vera.

Prova Intermedia Matematica Generale 4/11/2019 $\boxed{\text{Compito B2}}$

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\log_2\left(\frac{2x}{x-1}\right)\right)=1+\log_2 2=2.\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon):\ x>\delta(\varepsilon)\Rightarrow|f(x)-2|<\varepsilon.$

2) $\lim_{x\to0}\frac{\cos(\operatorname{sen}x)-\cos(\operatorname{tg}x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}^2x}\cdot\frac{\operatorname{tg}^2x}{x^2}-\frac{1-\cos(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}^2x}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2x}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot1-\frac{1}{2}\cdot1=0.$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{2x-3}\right)^{1-x}=\left(\to\frac{3}{2}\right)^{(\to-\infty)}=0^+.$

3) $f(x)=\frac{\log x+1}{\log^2x-\log x-2}=\frac{\log x+1}{(\log x+1)(\log x-2)}$. C.E.: $x>0$ e $x\neq\frac{1}{e}$ e $x\neq e^2$.

$\lim_{x\to0^+}f(x)=0^-$; in $x=0$ Discontinuità di III specie (da destra); $\lim_{x\to\frac{1}{e}}f(x)=-\frac{1}{3}$; in $x=\frac{1}{e}$ Discontinuità di III specie; $\lim_{x\to e^2}f(x)=\left(\frac{\to3}{\to0}\right)\to\infty$; in $x=e^2$ Discontinuità di II specie.

4) $f(x)=\log x+1=y\Rightarrow\log x=y-1\Rightarrow x=e^{y-1}\Rightarrow f^{-1}(x)=e^{x-1}$;

$g(x)=e^{1-x}=y\Rightarrow1-x=\log y\Rightarrow x=1-\log y\Rightarrow g^{-1}(x)=1-\log x.$

$f^{-1}(g(x))=f^{-1}(e^{1-x})=e^{e^{1-x}-1}$;

$f(g^{-1}(x))=f(1-\log x)=\log(1-\log x)+1.$

5)

A	B	C	D	$(C\,o\,D)$	$(B\Rightarrow A)$	$(A\,o\,D)$	$[(C\,o\,D)\,e\,(B\Rightarrow A)]$	$[(C\,o\,D)\,e\,(B\Rightarrow A)]\Rightarrow(A\,o\,D)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0

La proposizione $[(C\,o\,D)\,e\,(B\Rightarrow A)]\Rightarrow(A\,o\,D)$, nell'ipotesi che C sia sempre vera, NON risulta una tautologia.

Prova Intermedia Matematica Generale 4/11/2019 $\boxed{\text{Compito C2}}$

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\log_3\left(\frac{x+6}{x-1}\right)\right)=1+\log_3 1=1$. $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta(\varepsilon):\ x>\delta(\varepsilon)\Rightarrow|f(x)-1|<\varepsilon$.

2) $\lim_{x\to0}\frac{3^{\sin x}-2^{\arcsin x}}{x+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{x+x^2}-\frac{2^{\arcsin x}-1}{\arcsin x}\cdot\frac{\arcsin x}{x}\cdot\frac{x}{x^2+4}=$

$=\log 3\cdot1\cdot1-\log 2\cdot1\cdot1=\log 3-\log 2=\log\frac{3}{2}$.

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-3+4}{2x-3}\right)^{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{2x-3}\right]^{\frac{1+x}{2x-3}}=\left(e^4\right)^{\frac12}=e^2$.

3) $f(x)=\frac{\log x+2}{\log^2x+\log x-2}=\frac{\log x+2}{(\log x+2)(\log x-1)}$. C.E.: $x>0$ e $x\neq e^{-2}$ e $x\neq e$.

$\lim_{x\to0^+}f(x)=0^-$; in $x=0$ Discontinuità di III specie (da destra); $\lim_{x\to e^{-2}}f(x)=-\frac13$; in $x=\frac{1}{e^2}$ discontinuità di III specie; $\lim_{x\to e}f(x)=\left(\frac{\to3}{\to0}\right)\to\infty$; in $x=e$ Discontinuità di II specie.

4) $f(x)=e^{2-x}=y\Rightarrow 2-x=\log y\Rightarrow x=2-\log y\Rightarrow f^{-1}(x)=2-\log x$;

$g(x)=\log x+3=y\Rightarrow \log x=y-3\Rightarrow x=e^{y-3}\Rightarrow g^{-1}(x)=e^{x-3}$;

$f^{-1}(g(x))=f^{-1}(\log x+3)=2-\log(\log x+3)$;

$f(g^{-1}(x))=f\left(e^{x-3}\right)=e^{2-e^{x-3}}$.

5)

A	B	C	D	$(A\vee D)$	$(B\Rightarrow C)$	$(C\vee D)$	$[(A\vee D)$ e $(B\Rightarrow C)]$	$[(A\vee D)$ e $(B\Rightarrow C)]\Rightarrow(C\vee D)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0

La proposizione $[(A\vee D)$ e $(B\Rightarrow C)]\Rightarrow(C\vee D)$, nell'ipotesi che A sia sempre vera, NON è una tautologia.

Prova Intermedia Matematica Generale 4/11/2019 $\boxed{\text{Compito D2}}$

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\log_3\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)\right)=1-\log_3 3=0.$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon): x>\delta(\varepsilon)\Rightarrow|f(x)-0|<\varepsilon.$

2) $\lim_{x\to0}\frac{(1+2x)^{10}-(1-x)^{10}}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+2x)^{10}-1}{2x}\cdot\frac{2}{3}-\frac{(1-x)^{10}-1}{(-x)}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=10\cdot\frac{2}{3}+10\cdot\frac{1}{3}=10.$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)^{3-x}=\left(\to\frac{2}{3}\right)^{\to-\infty}=+\infty.$

3) $f(x)=\frac{\log x-1}{\log^2x+\log x-2}=\frac{\log x-1}{(\log x-1)(\log x+2)}.$ C.E.: $x>0$ e $x\neq e$ e $x\neq e^{-2}$.

$\lim_{x\to0^+}f(x)=0^-$; in $x=0$ Discontinuità di III Specie (da destra); $\lim_{x\to e}f(x)=\frac{1}{3}$; in $x=e$ Discontinuità di III Specie; $\lim_{x\to e^{-2}}f(x)=\left(\frac{\to-3}{\to0}\right)\to\infty$; in $x=\frac{1}{e^2}$ Discontinuità di II Specie.

4) $f(x)=\log x-3=y\Rightarrow\log x=y+3\Rightarrow x=e^{y+3}\Rightarrow f^{-1}(x)=e^{x+3}$;

$g(x)=e^{x+1}=y\Rightarrow x+1=\log y\Rightarrow x=\log y-1\Rightarrow g^{-1}(x)=\log x-1.$

$f^{-1}(g(x))=f^{-1}(e^{x+1})=e^{e^{x+1}+3}$;

$f(g^{-1}(x))=f(\log x-1)=\log(\log x-1)-3.$

5)

A	B	C	D	$(A\delta B)$	$(A\Rightarrow C)$	$(A\delta D)$	$[(A\delta B)$ e $(A\Rightarrow C)]$	$[(A\delta B)$ e $(A\Rightarrow C)]\Rightarrow(A\delta D)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	0

La proposizione $[(A\delta B)$e$(A\Rightarrow C)]\Rightarrow(A\delta D)$, nell'ipotesi che B sia sempre vera, NON risulta una tautologia.