COMPITO di ANALISI MATEMATICA 8/01/2020

I M 1) Sia $z = \sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right)e^{\frac{\pi}{4}i} - 2\left(1+\sqrt{3}\right)e^{\frac{\pi}{3}i}$. Calcolare $\sqrt{z}$.

Essendo $e^{\frac{\pi}{4}i} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$ e

$e^{\frac{\pi}{3}i} = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ sarà:

$$z = \sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$
$$= \left(2+\sqrt{3}\right)(1+i) - \left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right) =$$
$$= \left(2+\sqrt{3}-1-\sqrt{3}\right) + i\left(2+\sqrt{3}-\sqrt{3}-3\right) = 1-i\,.$$

Essendo $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$ avremo:

$$\sqrt{z} = \sqrt{1-i} = \sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8} + k\,\frac{2\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{8} + k\,\frac{2\pi}{2}\right)\right), 0 \le k \le 1\,;$$

Per cui $c_1 = \sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{8}\right)$ e $c_2 = \sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{15\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{15\pi}{8}\right)$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & : (x,y) \ne (0,0) \\ k & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$, determinare l'opportuno valore di k che rende la funzione continua nel punto $(0,0)$, e determinare poi se in tale punto risulta anche differenziabile.

Avremo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim\limits_{\varrho\to 0} \dfrac{\varrho^4\left(\cos^4\vartheta + \mathrm{sen}^4\vartheta\right)}{\varrho^2} = 0$ ed essendo la convergenza uniforme in quanto $\cos^4\vartheta + \mathrm{sen}^4\vartheta < 2$, sarà $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0$ e quindi la funzione risulta continua in $(0,0)$ se $k = 0$. Quindi $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & : (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Risulta poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^4}{h^2}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0\,;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^4}{h^2}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0\,.$$

Per la differenziabilità dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} - 0 - 0\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Passando a coordinate polari si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0}\frac{\varrho^4\left(\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta\right)}{\varrho^3} = \lim_{\varrho\to 0}\varrho\left(\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta\right)=0$$ e la convergenza è uniforme e quindi la funzione è differenziabile.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y,z)=x^3y+xy^3-4xyz+2z^3=0$, soddisfatta in $(1,1,1)$, verificare che con essa si può definire una funzione implicita $(x,y)\to z(x,y)$ che presenta un punto stazionario. Determinare la natura di tale punto stazionario.

Da $\nabla f(x,y,z)=\left(3x^2y+y^3-4yz;x^3+3xy^2-4xz;6z^2-4xy\right)$ otteniamo : $\nabla f(1,1,1)=(0,0,2)$ e quindi si può definire una funzione implicita $(x,y)\to z(x,y)$ per la quale: $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)=\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)=-\dfrac{0}{2}=0$. Il punto $(1,1)$ è quindi un punto stazionario.

Essendo $\mathbb{H}(x,y,z)=\left\|\begin{matrix}6xy & 3x^2+3y^2-4z & -4y\\ 3x^2+3y^2-4z & 6xy & -4x\\ -4y & -4x & 12z\end{matrix}\right\|$ risulta:

$\mathbb{H}(1,1,1)=\left\|\begin{matrix}6 & 2 & -4\\ 2 & 6 & -4\\ -4 & -4 & 12\end{matrix}\right\|$. Essendo $\mathrm{d}^2z=-\dfrac{\mathrm{d}^2f(x,y,z)}{f'_z}$ avremo:

$$\mathrm{d}^2z=-\frac{f''_{xx}(\mathrm{d}x)^2+f''_{yy}(\mathrm{d}y)^2+f''_{zz}(\mathrm{d}z)^2+2f''_{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+2f''_{xz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+2f''_{yz}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{f'_z}.$$

Essendo però $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)\,\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)\,\mathrm{d}y=0$, sostituendo, avremo:

$$\mathrm{d}^2z\,(1,1)=-\frac{6\,(\mathrm{d}x)^2+6\,(\mathrm{d}y)^2+12\,(0)^2+4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-8\,\mathrm{d}x\,(0)-8\,\mathrm{d}y\,(0)}{2}.$$

Quindi $\mathrm{d}^2z\,(1,1)=-3\,(\mathrm{d}x)^2-3\,(\mathrm{d}y)^2-2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Risulta quindi $\mathbb{H}(1;1)=\left\|\begin{matrix}-3 & -1\\ -1 & -3\end{matrix}\right\|$, per cui, essendo $\begin{cases}|\mathbb{H}_1|=-3<0\\ |\mathbb{H}_2|=9-1>0\end{cases}$, il punto stazionario $(1,1)$ è per la funzione implicita $(x,y)\to z(x,y)$ un punto di massimo.

I M 4) Data $f(x,y)=x^2y-xy+xy^2$ e $v=(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)$, si determinino almeno due valori di α per i quali risulti $D_vf(1,1)=D^2_{v,v}f(1,1)$.

$f(x,y)=x^2y-xy+xy^2$ è una funzione differenziabile due volte $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
Quindi $D_vf(1,1)=\nabla f(1,1)\cdot v$ e $D^2_{v,v}f(1,1)=v\cdot\mathbb{H}(1;1)\cdot v^T$.
Risulta $\nabla f(x,y)=\left(2xy-y+y^2\,;x^2-x+2xy\right)\Rightarrow\nabla f(1,1)=(2,2)$.
Quindi avremo: $D_vf(1,1)=\nabla f(1,1)\cdot v=(2,2)\cdot(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)=2\,(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)$.
Essendo poi $\mathbb{H}(x,y)=\left\|\begin{matrix}2y & 2x-1+2y\\ 2x-1+2y & 2x\end{matrix}\right\|$ sarà $\mathbb{H}(1,1)=\left\|\begin{matrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{matrix}\right\|$ e quindi:

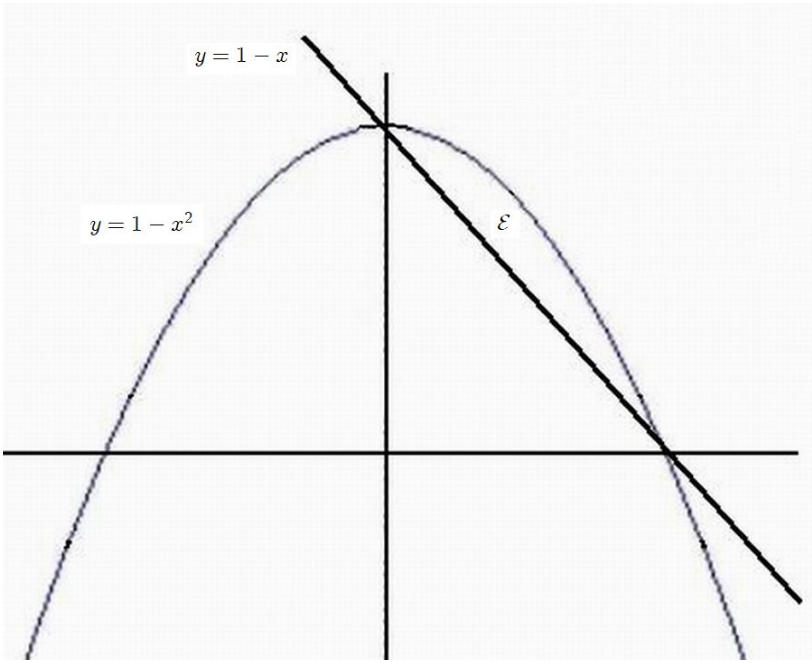
$$D^2_{v,v}f(1,1)=\|\cos\alpha\quad\operatorname{sen}\alpha\|\cdot\left\|\begin{matrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}\cos\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha\end{matrix}\right\|=2\cos^2\alpha+6\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}^2\alpha.$$

Quindi $D^2_{v,v}f(1,1)=2+6\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha=2\,(1+3\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha)$. Dovendo allora risultare: $D_vf(1,1)=D^2_{v,v}f(1,1)$ dovrà essere $\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha=1+3\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha$ e tale uguaglianza è sicuramente verificata almeno per $\alpha=0$ e per $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \text{s.v.: } \begin{cases} y \le 1 - x^2 \\ 1 - x \le y \end{cases} \end{cases}$.

Riscriviamo il problema come $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2 + y - 1 \le 0 \\ 1 - x - y \le 0 \end{cases} \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, la regione ammissibile $\mathcal{E}$ è un insieme compatto e quindi sicuramente esistono valori massimi e minimi.



Come si vede dalla figura, risulta $f(x,y) \ge 0, \forall\,(x,y) \in \mathcal{E}$.

Usando le condizioni di Kuhn-Tucker, formiamo la funzione Lagrangiana:
$\Lambda(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + y^2 - \lambda_1\left(x^2 + y - 1\right) - \lambda_2\left(1 - x - y\right)$.

1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x = 0 \\ \Lambda'_y = 2y = 0 \\ x^2 + y - 1 \le 0 \\ 1 - x - y \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0 - 0 - 1 \le 0 \\ 1 - 0 - 0 \le 0 : \text{ falsa} \end{cases} \quad \text{infatti } (0;0) \notin \mathcal{E}.$$

2) caso $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 2\lambda_1 x = 2x\left(1 - \lambda_1\right) = 0 \\ \Lambda'_y = 2y - \lambda_1 = 0 \\ y = 1 - x^2 \\ 1 - x \le y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ \lambda_1 = 2 > 0 \\ 1 \le 1 \end{cases} :$$

$(0,1)$ è un possibile punto di Massimo; oppure:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 2\lambda_1 x = 2x\,(1-\lambda_1) = 0 \\ \Lambda'_y = 2y - \lambda_1 = 0 \\ y = 1 - x^2 \\ 1 - x \le y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ \lambda_1 = 1 \\ 1 - x \le y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ \lambda_1 = 1 \\ 1 - x \le y \end{cases}$$ da cui:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{2} \\ \lambda_1 = 1 > 0 \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{\sqrt{2}} : \text{ vera} \end{cases}$$ per cui $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ è un possibile punto di Massimo,

mentre $\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{2} \\ \lambda_1 = 1 \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{2} : \text{falsa} \end{cases}$, infatti $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) \notin \mathcal{E}$.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \ne 0$:

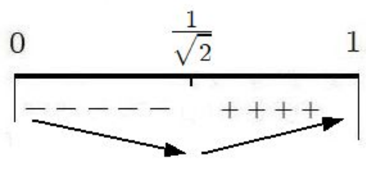
$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = 2y + \lambda_2 = 0 \\ y = 1 - x \\ y \le 1 - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\lambda_2}{2} \\ y = -\frac{\lambda_2}{2} \\ -\frac{\lambda_2}{2} = 1 + \frac{\lambda_2}{2} \\ y \le 1 - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = -1 < 0 \\ \frac{1}{2} \le 1 - \frac{1}{4} : \text{ vera} \end{cases}$$; da $\lambda_2 < 0$ segue che il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è un probabile punto di minimo.

4) caso $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 \ne 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = 2y - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ y = 1 - x^2 \\ y = 1 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ \lambda_2 = 0 \\ 2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$: $(0,1)$ già visto, e:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ 2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \lambda_1 = 2 > 0 \\ \lambda_2 = 2 > 0 \end{cases}$$ per cui $(1,0)$ è un possibile punto di Massimo.

Studiamo la funzione obiettivo $f(x,y) = x^2 + y^2$ sui punti del primo vincolo $y = 1 - x^2$. Essendo $f(x, 1-x^2) = x^2 + (1-x^2)^2 = x^4 - x^2 + 1$ sarà $f'(x, 1-x^2) = 4x^3 - 2x$ da cui $f'(x, 1-x^2) = 2x\,(2x^2-1) \ge 0$ per $x \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$ (in $\mathcal{E}$ risulta $0 \le x \le 1$. Quindi:



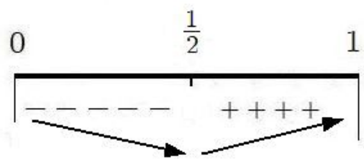
e quindi il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ risulta, relativamente ai soli punti di frontiera, un punto di minimo, contraddicendo la precedente indicazione $(\lambda_1 = 1 > 0)$ che lo segnalava come un possibile punto di massimo. Quindi il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ non è nè di massimo nè di minimo.

Si poteva giungere alla stessa conclusione usando la matrice Hessiana orlata della funzione Lagrangiana $\Lambda(x, y, \lambda_1) = x^2 + y^2 - \lambda_1\left(x^2 + y - 1\right)$. Essendo (per $\lambda_1 = 1$):

$$\overline{\mathbb{H}}(x,y) = \left\|\begin{matrix} 0 & 2x & 1 \\ 2x & 2-2\lambda_1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}\right\| \Rightarrow \left|\overline{\mathbb{H}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)\right| = \left|\begin{matrix} 0 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}\right| = -\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} < 0\,,$$

risultato che ci indica nuovamente $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ come un punto di minimo.

Studiamo la funzione obiettivo $f(x,y) = x^2 + y^2$ sui punti del secondo vincolo $y = 1 - x$. Essendo $f(x, 1-x) = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$ sarà $f'(x, 1-x) = 4x - 2$ da cui $f'(x, 1-x) = 2(2x-1) \geq 0$ per $x \geq \frac{1}{2}$ (in $\mathcal{E}$ risulta $0 \leq x \leq 1$. Quindi:

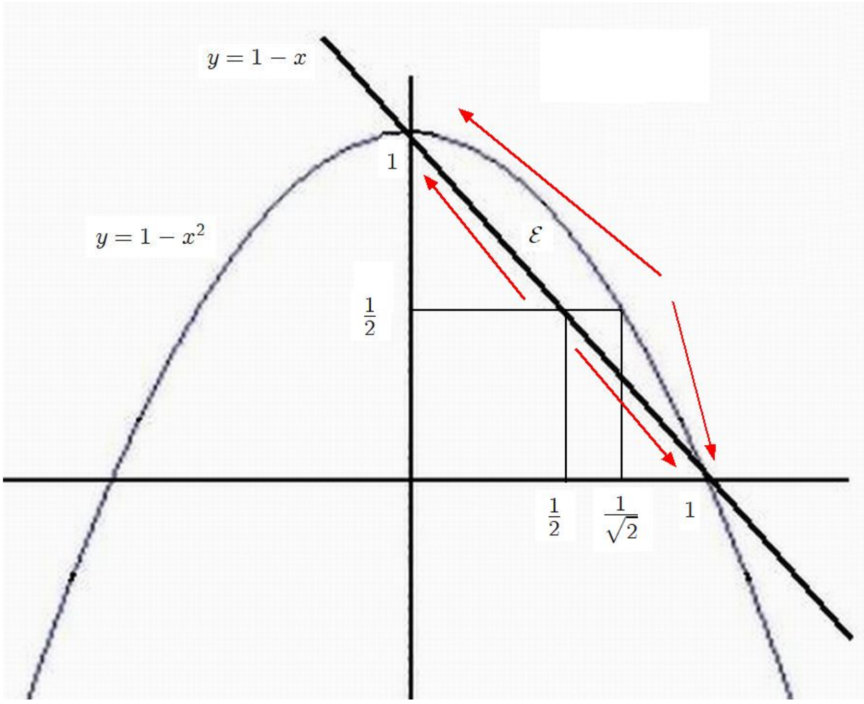


per cui abbiamo la conferma che il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è un punto di minimo, conclusione già assicurata dal Teorema di Weierstrass, visto che il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è stato l'unico candidato trovato a punto di minimo. Anche qui potevamo avere conferma usando la matrice Hessiana orlata della funzione Lagrangiana $\Lambda(x, y, \lambda_2) = x^2 + y^2 - \lambda_2(1 - x - y)$. Essendo:

$$\overline{\mathbb{H}}(x,y) = \left\|\begin{matrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{matrix}\right\| \Rightarrow \left|\overline{\mathbb{H}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right| = \left|\begin{matrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{matrix}\right| = -4 < 0,$$

risultato che ci indica nuovamente $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ come un punto di minimo.

Quindi $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è il punto di minimo con $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$; $(0,1)$ e $(1,0)$ sono punti di massimo, con $f(0,1) = f(1,0) = 1$.



II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x'+y=e^t \\ y'+x=1 \end{cases}$.

$\begin{cases} x'+y=e^t \\ y'+x=1 \end{cases} \Rightarrow \left\| \begin{matrix} D & 1 \\ 1 & D \end{matrix} \right\| (x) = \left\| \begin{matrix} e^t \\ 1 \end{matrix} \right\| \Rightarrow \left| \begin{matrix} D & 1 \\ 1 & D \end{matrix} \right| (x) = \left| \begin{matrix} e^t & 1 \\ 1 & D \end{matrix} \right| \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(D^2-1\right)(x) = D\left(e^t\right) - 1 \Rightarrow x'' - x = e^t - 1\,.$

Da $\lambda^2-1=0$ otteniamo $\lambda=\pm 1$ e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea per $x(t)$ sarà: $x(t)=c_1\,e^t+c_2\,e^{-t}$.

Essendo il termine noto dell'equazione non omogenea uguale a e^t-1, ed essendo il fattore e^t già presente nella soluzione generale dell'equazione omogenea, se usiamo il metodo degli annichilatori per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, dovremo ipotizzare una soluzione del tipo $x_0(t)=a\,e^t+bt\,e^t+k$. Sarà quindi:
$x_0'(t)=a\,e^t+b\,e^t+bt\,e^t$ e $x_0''(t)=a\,e^t+2b\,e^t+bt\,e^t$.

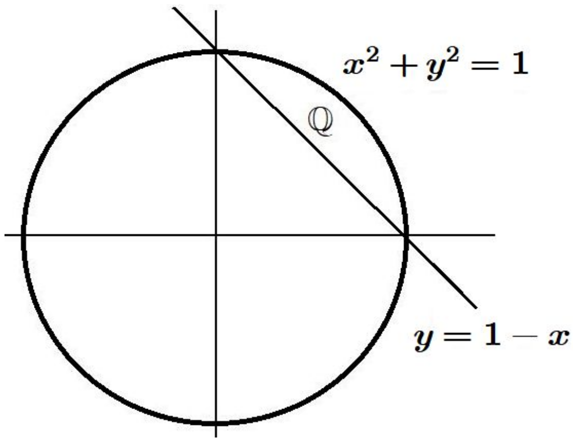
Sostituendo nell'equazione non omogenea otteniamo:
$x_0''(t)-x_0(t)=a\,e^t+2b\,e^t+bt\,e^t-a\,e^t-bt\,e^t-k=2b\,e^t-k=e^t-1$ da cui si ha:
$\begin{cases} 2b=1 \\ k=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ k=1 \end{cases}$ e quindi avremo $x(t)=c_1\,e^t+c_2\,e^{-t}+\dfrac{1}{2}t\,e^t+1\,.$

Dalla prima equazione otteniamo $y=e^t-x'$ e quindi, sostituendo :
$y(t)=e^t-c_1\,e^t+c_2\,e^{-t}-\dfrac{1}{2}\,e^t-\dfrac{1}{2}t\,e^t$ per cui sarà:
$y(t)=\left(\dfrac{1}{2}-c_1\right)e^t+c_2\,e^{-t}-\dfrac{1}{2}t\,e^t\,.$

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} x\,y\,y'=\log x \\ y(1)=2 \end{cases}$.

Da $x\,y\,y' = \log x$ segue, posto $x > 0$, $\int y\,y'\,\mathrm{d}x = \int y\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\log x\,\mathrm{d}x + k$ e quindi:
$\frac{y^2}{2} = \int \log x\,\mathrm{d}(\log x) + k \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{\log^2 x}{2} + k \Rightarrow y^2 = \log^2 x + m$, $(m = 2k) \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \pm\sqrt{\log^2 x + m}$. Dovendo essere $y(1) = 2$ va scelta la $y = \sqrt{\log^2 x + m}$ per la quale dovrà essere $2 = \sqrt{\log^2 1 + m} \Rightarrow 2 = \sqrt{m} \Rightarrow m = 4$.
Quindi la soluzione del problema di Cauchy sarà la funzione $y = \sqrt{\log^2 x + 4}$.

II M 4) Calcolare $\iint_{\mathbb{Q}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 - x \le y\,; x^2 + y^2 \le 1\right\}$.



Dato che risulta $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 - x \le y \le \sqrt{1 - x^2}\right\}$, la regione $\mathbb{Q}$ risulta normale rispetto all'asse x e quindi avremo:

$$\iint_{\mathbb{Q}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\,y^2\right|_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\left[\left(1 - x^2\right) - (1 - x)^2\right] x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - x^2 - 1 - x^2 + 2x\right) x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2x - 2x^2\right) x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 - x^3\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$