COMPITI DI ANALISI MATEMATICA
AA. 2016/17

Prova Intermedia 2016

I M 1) Dati tre numeri complessi z_1, z_2 e z_3, rispettivamente con modulo uguale a $\frac{4}{3}, \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ ed argomento rispettivamente uguale a $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$ e $\frac{2}{3}\pi$, si calcoli $\sqrt[3]{\frac{z_1}{z_2 \cdot z_3}}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^k}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$, determinare per quali valori del parametro $k > 0$ la funzione, nel punto $(0,0)$, risulta continua, per quali ammette derivate parziali e per quali risulta poi differenziabile.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y,z) = xyz - xy + xz - yz = 0$ che risulta soddisfatta nel punto $P = (1,1,1)$, dopo aver verificato che con essa si può definire una funzione implicita $(x,y) \to z$, si calcolino $\nabla z(1,1)$, $\mathrm{d}z(1,1)$ e $\mathrm{d}^2 z(1,1)$.

I M 4) Si determini l'equazione della retta tangente nel punto $y = 0$ alla curva grafico della funzione $F : y \to (x(y), z(y))$ definita implicitamente dal sistema:

$$\begin{cases} f(x,y,z) = e^{x^2+y^2-z^2} - e^{xyz} = 0 \\ g(x,y,z) = xyz + \log\left(\dfrac{1+x^2+y^2+z^2}{3}\right) = 0 \end{cases}$$, soddisfatto nel punto $P_0 = (1,0,1)$.

I M 5) Dati la funzione $f(x,y) = (x+y) \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ ed i due versori $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $w = (-\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, si determinino i valori di α per i quali risulta soddisfatta la condizione $\mathcal{D}_v f(1,1) = \mathcal{D}^2_{v,w} f(1,1)$.

I Appello Sessione Invernale 2017

I M 1) Determinare le tre soluzioni dell'equazione $(x-i)^3 = \dfrac{1-i}{1+i}$.

I M 2) Verificare per quali valori di $k > 0$ la funzione $f(x,y) = |x|^k \cdot \sqrt[10]{|y|^3}$ risulta differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z) = xyz + x^2y - xz^2 - yz = 0 \\ g(x,y,z) = e^{x-y} - 2e^{y-z} + e^{z-x} = 0 \end{cases}$, si verifichi che con esso si può definire in un intorno del punto $(1,1,1)$ una funzione implicita $x \to (y(x), z(x))$ e di tale funzione si calcoli poi l'equazione della retta tangente in $x = 1$.

I M 4) Data $f(x,y) = xy\,e^{x-y}$ ed i due versori $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $w = (\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha)$, determinare per quali valori di α la $D^2_{v,w} f(1,1)$ risulta massima.

II M 1) Risolvere il problema: $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = y - x \\ \text{s.v.} \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 - 1 \leq y \end{cases} \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' - xy = x \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + t \end{cases}$.

II M 4) Data $f(x,y)=xy$ e date la regione $D_1=\left\{(x,y):x\leq 0;0\leq y\leq 1-x^2\right\}$ e la regione $D_2=\left\{(x,y):0\leq x;0\leq y;x^2+y^2\leq 1\right\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

II Appello Sessione Invernale 2017

I M 1) Calcolare le radici quarte del numero complesso $z=(i-1)^5\cdot(i+1)^3$.
I M 2) Determinare, al variare del parametro reale $\alpha>0$, se la funzione:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(|x|^\alpha+|y|^\alpha)^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & :(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & :\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ è differenziabile nel punto $(0,0)$.

I M 3) L'equazione $f(x,y)=e^{y^2-x^2}-e^{x-y}=0$ definisce, nel punto $P=(1,1)$, una funzione implicita $x\rightarrow y(x)$. Si determini l'espressione del polinomio di Taylor di grado 2 della funzione $y(x)$ nel punto $x=1$.
I M 4) Data $f(x,y)=x^2y+xy^2$, $P_0=(1,-1)$, v e w i versori di $(1,1)$ e $(-1,1)$, calcolare $D_vf(P_0)$ e $D^2_{v,w}f(P_0)$.
II M 1) Risolvere il problema: $\begin{cases}\text{Max/min } f(x,y)=x^3+y^3\\ \text{s.v. } x^2+y^2\leq 4\end{cases}$.
II M 2) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases}y'\cdot\log^2 y=2xy\\ y(0)=1\end{cases}$.
II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases}x'=x+2y\\ y'=-x+3y\end{cases}$.
II M 4) Data la regione $D=\left\{(x,y):0\leq x;x^2+y^2\leq 2y\right\}$, calcolare $\displaystyle\iint_D xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Appello Sessione Straordinaria I 2017

I M 1) Determinare la forma algebrica del numero complesso $z=e^{1-6i}$ e disegnarlo poi nel piano complesso.
I M 2) Determinare se la funzione $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\cdot(x+y)}{x^2+y^2} & :(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & :\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è differenziabile nel punto $(0,0)$.
I M 3) L'equazione $f(x,y,z)=xe^{y+z}-ye^{x+z}+ze^{x+y}=0$ definisce in $P=(1,1,0)$ una funzione implicita $z=z(x,y)$. Determinare $\nabla z(1,1)$.
I M 4) Data la funzione $f(x,y)=(x+y)e^{x-y}$, determinare l'espressione del suo polinomio di Mac Laurin di secondo grado.
II M 1) Risolvere il problema: $\begin{cases}\text{Max/min } f(x,y)=x^2+xy^2\\ \text{s.v. } 4x^2+y^2\leq 4\end{cases}$.
II M 2) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases}y''-4y=3\,(y'+x)\\ y(0)=\dfrac{9}{16}\\ y'(0)=\dfrac{1}{4}\end{cases}$.
II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases}x'=y\\ y'=x\end{cases}$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_D x^2+y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $D=\left\{(x,y):x^2-1\le y\le 1-x^2\right\}$.

II Appello Sessione Autunnale 2017

I M 1) Dato il numero complesso $z=i-2$, si calcolino le radici terze di $w=\dfrac{i-z}{i-\overline{z}}$, dove $\overline{z}$ è il coniugato di z.

I M 2) Determinare se la funzione $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & :(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & :(x,y)=(0,0)\end{cases}$ è differenziabile nel punto $(0,0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases}f(x,y,z)=2xy+e^{x-z}+e^{z+y}=0\\ g(x,y,z)=3yz+e^{z-x}+2e^{z+y}=0\end{cases}$, si verifichi che con esso si può definire in un intorno del punto $(1,-1,1)$ una funzione implicita $z\to(x(z),y(z))$ e di tale funzione si calcolino poi le derivate prime nel punto $z=1$.

I M 4) Data $f(x,y)=x^2y-xy^2$, sia poi $v=(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)$ un generico versore. Determinare α se $D_vf(1,1)=0$ e calcolare poi $D^2_{v,w}f(1,1)$ con $w=(\cos\beta,\operatorname{sen}\beta)$ versore qualsiasi.

II M 1) Risolvere il problema: $\begin{cases}\text{Max/min } f(x,y)=xy\\ \text{s.v. } x^2-2x\le y\le 0\end{cases}$.

II M 2) Risolvere l'equazione differenziale $y'=y\cdot\log x\cdot\log y$.

II M 3) Il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases}x'=ky\\ y'=x+y\end{cases}$ ha, tra le soluzioni per $x(t)$, la funzione $x=e^{2t}$. Determinare il valore di k e risolvere il sistema.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_D x^2+y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D=\{(x,y):x\ge 0,y\ge 0,y\le x+1,y\le 3-x\}$.

Appello Sessione Straordinaria II 2017

I M 1) Calcolare le radici cubiche del numero $z=\dfrac{9}{i-1}+\dfrac{9}{1+i}$.

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^6-y^6}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ risulta differenziabile nel punto $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y)=xy-e^{y-x}=0$, verificare che, con essa, è possibile definire, in un intorno del punto $(1,1)$, una funzione implicita e calcolare la derivata prima e seconda di tale funzione nel punto opportuno.

I M 4) Siano v e w i versori di $(1,1)$ e $(1,-1)$. Sapendo che $f(x,y)$ è differenziabile in $\mathbb{X}_0$, che $\mathcal{D}_vf(\mathbb{X}_0)=2$ e che $\mathcal{D}_wf(\mathbb{X}_0)=-3$, calcolare $\nabla f(\mathbb{X}_0)$.

II M 1) Data la funzione $f(x,y)=x^2+y^2-xy^2-x$, analizzare la natura dei suoi punti stazionari.

II M 2) Risolvere il problema: $\begin{cases}\text{Max/min } f(x,y)=x^2+y^2\\ \text{s.v. } 0\le y\le 1-x^2\end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - y' = \operatorname{sen} x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_D x^2 + y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,\ D = \left\{(x,y) : (x-1)^2 \le y \le 2x+1\right\}$.