COMPITO di ANALISI MATEMATICA 3/02/2020

I M 1) Dopo aver semplificato e ridotto a forma algebrica, si esprima in forma di esponenziale complessa il numero $z = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1+i} + \dfrac{1-\sqrt{3}}{1-i}$.

$$z = \frac{1+\sqrt{3}}{1+i} + \frac{1-\sqrt{3}}{1-i} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)(1-i) + \left(1-\sqrt{3}\right)(1+i)}{(1+i)(1-i)} =$$
$$= \frac{\left(1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}\right) + \left(-1-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}\right)i}{1+1} = \frac{2-2\sqrt{3}\,i}{2} = 1-\sqrt{3}\,i =$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right) = e^{\log 2 + \frac{5\pi}{3}i}.$$

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = x\sqrt{|y|} - y\sqrt{|x|}$, si verifichi se essa risulta differenziabile nel punto $(0,0)$.

Risulta $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\sqrt{|y|} - y\sqrt{|x|} = 0$. Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(h\sqrt{0} - 0\sqrt{|h|}\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(0\sqrt{|h|} - h\sqrt{0}\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Per la differenziabilità dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sqrt{|y|} - y\sqrt{|x|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$ Passando a coordinate polari si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sqrt{|y|} - y\sqrt{|x|}}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0}\frac{\varrho\sqrt{\varrho}\left(\cos\vartheta\sqrt{|\mathrm{sen}\,\vartheta|} - \mathrm{sen}\,\vartheta\sqrt{|\cos\vartheta|}\right)}{\varrho} =$$

$= \lim\limits_{\varrho\to 0}\sqrt{\varrho}\left(\cos\vartheta\sqrt{|\mathrm{sen}\,\vartheta|} - \mathrm{sen}\,\vartheta\sqrt{|\cos\vartheta|}\right) = 0$ e la convergenza è uniforme in quanto $\left|\cos\vartheta\sqrt{|\mathrm{sen}\,\vartheta|} - \mathrm{sen}\,\vartheta\sqrt{|\cos\vartheta|}\right| < 2$ e quindi la funzione è differenziabile.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z) = x\,e^{y-z} - 2y\,e^{x-z} + z\,e^{x-y} = 0 \\ g(x,y,z) = x^2y + xz^2 - 2xyz = 0 \end{cases}$ soddisfatto nel punto $\mathrm{P}_0 = (1,1,1)$, verificare che con esso è possibile definire una funzione implicita $x \to (y,z)$ e calcolare poi le derivate prime di tale funzione.

Le funzioni $f(x,y,z)$ e $g(x,y,z)$ sono funzioni differenziabili $\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Sarà poi:

$$\mathbb{J} = \left\|\begin{matrix} e^{y-z} - 2ye^{x-z} + ze^{x-y} & xe^{y-z} - 2e^{x-z} - ze^{x-y} & -x\,e^{y-z} + 2y\,e^{x-z} + e^{x-y} \\ 2xy + z^2 - 2yz & x^2 - 2xz & 2xz - 2xy \end{matrix}\right\|$$

per cui $\mathbb{J}(1,1,1) = \left\| \begin{matrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix} \right\|$. Essendo $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ è possibile definire una funzione implicita $x \to (y,z)$. Per le sue derivate avremo:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{-2}{2} = 1 \text{ e } \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{-2}{2} = 1\,.$$

I M 4) Data $f(x,y) = x\,y$ ed i vettori $\mathbb{V} = (1,1)$ e $\mathbb{W} = (-1,1)$, detti rispettivamente v e w i loro versori, sapendo che $\mathcal{D}_v f(x_0,y_0) = \sqrt{2}$ e che $\mathcal{D}_w f(x_0,y_0) = 0$, determinare le coordinate del punto (x_0,y_0).

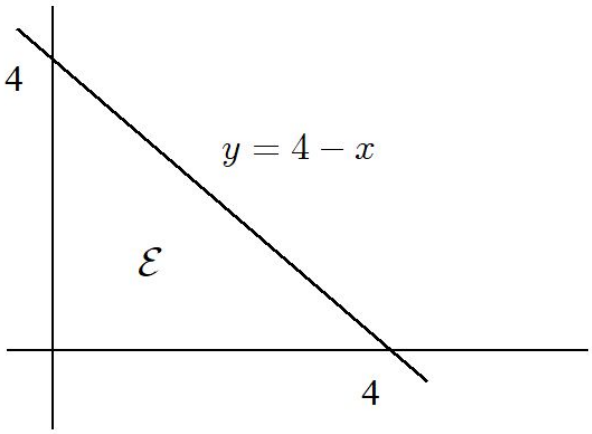
La funzione $f(x,y) = x\,y$ è un polinomio e quindi è differenziabile di qualsiasi ordine.
Quindi $D_v f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot v$ e $D_w f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot w$.
Essendo $\nabla f(x,y) = (y\,;x) \Rightarrow \nabla f(x_0,y_0) = (y_0,x_0)$.
Sarà poi $v = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $w = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Quindi:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_v f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot v = (y_0,x_0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \\ D_w f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot w = (y_0,x_0) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (y_0,x_0) \cdot (1,1) = 2 \\ (y_0,x_0) \cdot (-1,1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 = 2 \\ x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}.$$

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 + y^2 - x\,y - 3x \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 4 - x \end{cases} \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, la regione ammissibile $\mathcal{E}$ è un insieme compatto e quindi sicuramente esistono valori massimi e minimi.
Vista la numerosità dei vincoli non conviene usare le condizioni di Kuhn-Tucker che richiederebbero la risoluzione di 8 sistemi.



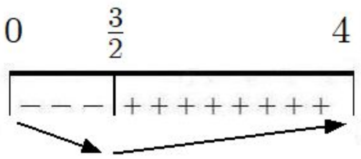
Studiamo anzitutto gli eventuali punti di massimo e/o minimo relativi liberi.
Applicando le condizioni del primo ordine avremo:

$$\nabla f(x,y) = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 2x - y - 3 = 0 \\ f'_y = 2y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 3 = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ e } (2,1) \in \mathcal{E}.$$

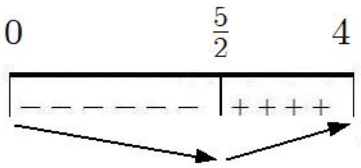
Per le condizioni del secondo ordine avremo, usando la matrice Hessiana:

$\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} = \mathbb{H}(2,1)$. Dato che $\begin{cases} |\mathbb{H}_1| = 2 > 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 4 - 1 = 3 > 0 \end{cases}$, il punto $(2,1)$ risulta essere un punto di minimo, con $f(2,1) = -3$.

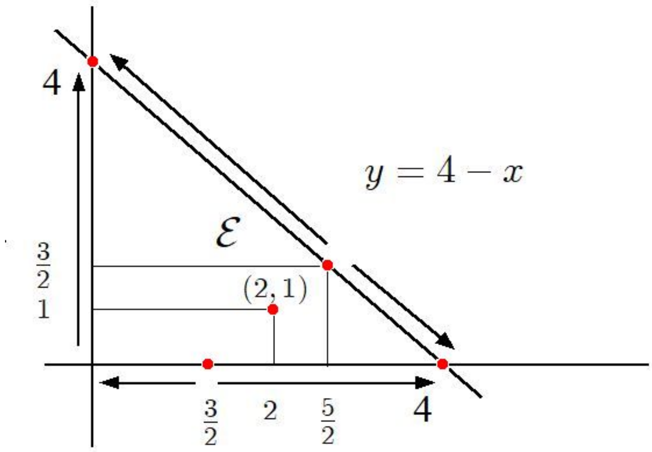
Studiamo la funzione obiettivo $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 3x$ sui punti del primo vincolo $x = 0$. Risulta $f(0,y) = y^2$ che per $y > 0$ risulta una funzione sempre crescente.
Studiamo la funzione obiettivo $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 3x$ sui punti del secondo vincolo $y = 0$. Risulta $f(x,0) = x^2 - 3x \Rightarrow f'(x) = 2x - 3 \geq 0$ e quindi la funzione risulta crescente per $x \geq \frac{3}{2}$.



Studiamo infine la funzione obiettivo $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 3x$ sui punti del terzo vincolo $y = 4 - x$. Risulta :
$f(x, 4-x) = x^2 + 16 + x^2 - 8x - 4x + x^2 - 3x = 3x^2 - 15x + 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x) = 6x - 15 \geq 0$ e quindi la funzione risulta crescente per $x \geq \frac{5}{2}$.



Abbiamo quindi la seguente situazione:



dalla quale vediamo che:
- $(0,4)$ risulta un punto di massimo, con $f(0,4) = 16$, ed è il massimo assoluto;
- $(4,0)$ risulta un punto di massimo, con $f(4,0) = 4$, ed è un massimo relativo;
- $(2,1)$ risulta un punto di minimo, con $f(2,1) = -3$, ed è il minimo assoluto.

Il punto $\left(\frac{3}{2},0\right)$ risulta un punto di minimo, con $f\left(\frac{3}{2},0\right) = -\frac{9}{4}$, relativamente ai punti del vincolo $y=0$. Per una analisi completa formiamo la funzione Lagrangiana relativamente a questo solo vincolo.
Avremo: $\Lambda(x,y,\lambda) = x^2+y^2-x\,y-3x-\lambda(-y)$. Quindi :
$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x-y-3=0 \\ \Lambda'_y = 2y-x+\lambda=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=0 \\ \lambda=\frac{3}{2}>0 \end{cases}$ e quindi il punto $\left(\frac{3}{2},0\right)$ risulterebbe, essendo $\lambda = \frac{3}{2} > 0$, rispetto ai punti interni alla regione ammissibile $\mathcal{E}$, un punto di massimo e quindi non è nè punto di massimo nè punto di minimo.

Il punto $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ risulta un punto di minimo, con $f\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right) = -\frac{11}{4}$ relativamente ai punti del vincolo $y=4-x$. Per una analisi completa formiamo la funzione Lagrangiana relativamente a questo solo vincolo.
Avremo: $\Lambda(x,y,\lambda) = x^2+y^2-x\,y-3x-\lambda(x+y-4)$. Quindi :
$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x-y-3-\lambda=0 \\ \Lambda'_y = 2y-x-\lambda=0 \\ y=4-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x=15 \\ y=4-x \\ \lambda=8-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{3}{2} \\ \lambda=\frac{1}{2}>0 \end{cases}$ e quindi il punto $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ risulterebbe, essendo $\lambda = \frac{1}{2} > 0$, rispetto ai punti interni alla regione ammissibile $\mathcal{E}$, un punto di massimo e quindi non è nè punto di massimo nè punto di minimo.

II M 2) Analizzare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = xy - xy^3 - x^3y$.

Applicando le condizioni del primo ordine avremo:

$$\nabla f(x,y) = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = y-y^3-3x^2y = y\,(1-y^2-3x^2)=0 \\ f'_y = x-3xy^2-x^3 = x\,(1-3y^2-x^2)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y^2=1-3x^2 \\ 1-3+9x^2-x^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x^2=2 \\ y^2=1-3x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2=\frac{1}{4} \\ y^2=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\frac{1}{2} \\ y=\pm\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Abbiamo quindi nove punti stazionari:
$(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.
Per le condizioni del secondo ordine avremo, usando la matrice Hessiana:
$\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} -6xy & 1-3y^2-3x^2 \\ 1-3y^2-3x^2 & -6xy \end{Vmatrix}$ da cui si ha:

$\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow |\mathbb{H}_2| = -1 < 0$: $(0,0)$ è un punto di Sella;

$\mathbb{H}(0,\pm 1) = \begin{Vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow |\mathbb{H}_2| = -4 < 0$: $(0,1)$ e $(0,-1)$ sono punti di Sella;

$\mathbb{H}(\pm 1,0) = \begin{Vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow |\mathbb{H}_2| = -4 < 0$: $(1,0)$ e $(-1,0)$ sono punti di Sella;

$$\mathbb{H}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\mathbb{H}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left\|\begin{matrix}-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{matrix}\right\|\Rightarrow\begin{cases}|\mathbb{H}_1|=-\frac{3}{2}<0\\ |\mathbb{H}_2|=2>0\end{cases}:$$

$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ sono punti di Massimo;

$$\mathbb{H}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\mathbb{H}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left\|\begin{matrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{matrix}\right\|\Rightarrow\begin{cases}|\mathbb{H}_1|=\frac{3}{2}>0\\ |\mathbb{H}_2|=2>0\end{cases}:$$

$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ sono punti di Minimo.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases}y'''+y'=x\,e^x\\ y(0)=1\\ y'(0)=0\\ y''(0)=0\end{cases}$.

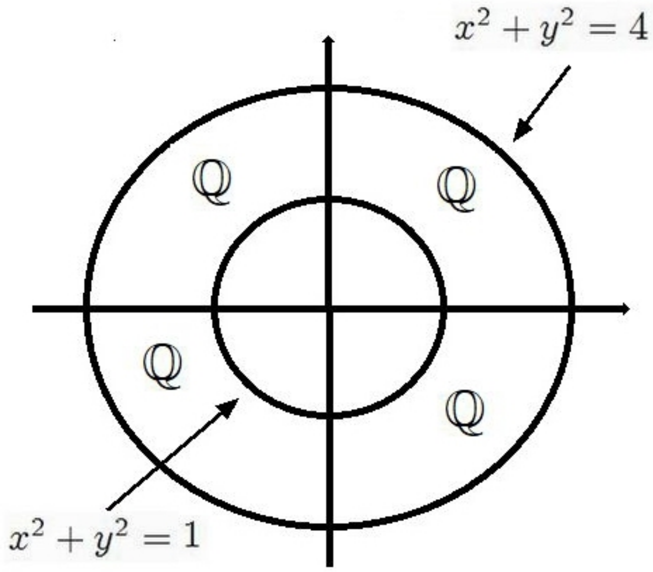
Iniziamo risolvendo l'equazione omogenea $y'''+y'=0$ e trovando le radici del suo polinomio caratteristico. Avremo $\lambda^3+\lambda=\lambda\left(\lambda^2+1\right)=0$ e quindi la radice reale $\lambda=0$ e le due radici complesse $\lambda=\pm\,i$. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà data da $y(x)=c_1+c_2\operatorname{sen}x+c_3\cos x$. Troviamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea ricorrendo al metodo degli annichilatori. Il fattore $y=x\,e^x$ è annichilato dall'operatore $(D-1)^2$, ovvero corrisponde ad una radice reale doppia $\lambda=1$. Dovremo quindi ipotizzare una soluzione particolare del tipo $y_0=ae^x+bx\,e^x$. Avremo quindi:
$y_0'=(a+b)e^x+bx\,e^x\Rightarrow y_0''=(a+2b)e^x+bx\,e^x\Rightarrow y_0'''=(a+3b)e^x+bx\,e^x$
per cui sostituendo nell'equazione non omogenea avremo:
$(a+3b)e^x+bx\,e^x+(a+b)e^x+bx\,e^x=x\,e^x$ ovvero:
$(2a+4b)e^x+2bx\,e^x=x\,e^x$ da cui: $\begin{cases}a+2b=0\\ 2b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2b=-1\\ b=\frac{1}{2}\end{cases}$.

La soluzione generale dell'equazione non omogenea sarà quindi data da:
$y(x)=c_1+c_2\operatorname{sen}x+c_3\cos x-e^x+\frac{1}{2}x\,e^x$. Da questa si ha:
$y'(x)=c_2\cos x-c_3\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}x\,e^x$
$y''(x)=-c_2\operatorname{sen}x-c_3\cos x+\frac{1}{2}x\,e^x$.

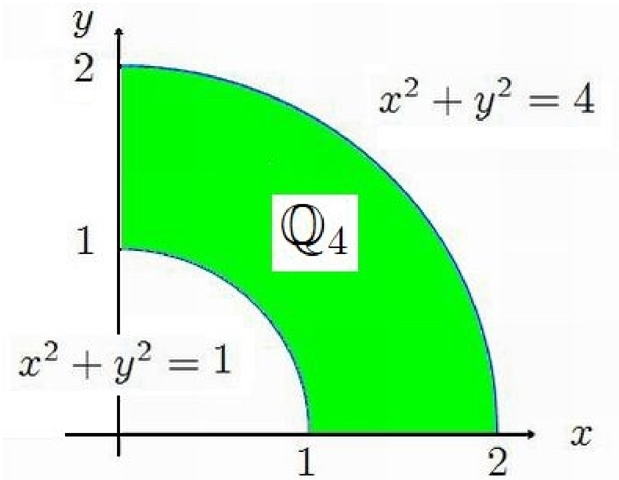
Applicando le condizioni del problema avremo allora:
$\begin{cases}y(0)=1\\ y'(0)=0\\ y''(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1+c_3-1=1\\ c_2-\frac{1}{2}=0\\ -c_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=2\\ c_2=\frac{1}{2}\\ c_3=0\end{cases}$. E quindi la soluzione generale del problema di Cauchy sarà data da: $y(x)=2+\frac{1}{2}\operatorname{sen}x-e^x+\frac{1}{2}x\,e^x$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}}|x\,y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$, anche usando opportunamente le simmetrie della funzione e del dominio di integrazione.

Vista la regione di integrazione:



data la sua simmetria e data la simmetria della funzione integranda $f(x,y)=|x\,y|$, possiamo calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}_4}|x\,y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q}_4=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x\geq 0, y\geq 0, 1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$ e poi moltiplicare per 4 il risultato trovato.



Avremo quindi, passando subito a coordinate polari:

$$\iint_{\mathbb{Q}_4}|x\,y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2\left(\varrho^2\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta\right)\cdot\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2\varrho^3\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}\varrho^4\Big|_1^2\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4-\frac{1}{4}\right)\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=\frac{15}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=$$

$$=\frac{15}{4}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{15}{8}(1-0)=\frac{15}{8}$$. Quindi $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}}|x\,y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\cdot\frac{15}{8}=\frac{15}{2}$.