COMPITO di ANALISI MATEMATICA 22/04/2020

I M 1) Dopo aver determinato il numero complesso z che risulta soluzione dell'equazione $\frac{z}{1+i}+\frac{z}{1-i}=2i$, calcolare le sue radici cubiche $\sqrt[3]{z}$.

$$\frac{z}{1+i}+\frac{z}{1-i}=z\left(\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}\right)=z\left(\frac{1-i+1+i}{(1+i)(1-i)}\right)=z\,\frac{2}{2}=2i\Rightarrow z=2i\,.$$

Essendo $2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ si ha :

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\,\frac{2\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+k\,\frac{2\pi}{3}\right)\right),\ 0\le k\le 2\,.$$

Per $k=0$ si ha $z_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}\right)$;

per $k=1$ si ha $z_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}\right)$;

per $k=2$ si ha $z_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)=\sqrt[3]{2}\,(-i)\,.$

I M 2) Data la funzione $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\left(x^4+y^4\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^3} & (x,y)\neq(0,0)\\ k & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, determinare il valore di k che la rende continua in $(0,0)$ e verificare poi se tale funzione risulta differenziabile nel punto $(0,0)$.

Calcoliamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left(x^4+y^4\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}$ passando a coordinate polari ed avremo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left(x^4+y^4\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}\Rightarrow\lim_{\varrho\to0}\frac{\varrho^8\left(\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta\right)^2}{\varrho^6}=\lim_{\varrho\to0}\varrho^2\left(\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta\right)^2=0\,.$$

La convergenza è uniforme in quanto $\varrho^2\left(\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta\right)^2\le 4\,\varrho^2$.

Quindi la funzione è continua in $(0,0)$ se $k=0$.

Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left(h^4+0^4\right)^2}{\left(h^2+0^2\right)^3}\cdot\frac{1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^8}{h^7}=\lim_{h\to0}h=0\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left(0^4+h^4\right)^2}{\left(0^2+h^2\right)^3}\cdot\frac{1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^8}{h^7}=\lim_{h\to0}h=0\,.$$

Quindi $\nabla f(0,0)=(0,0)$.

Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=0 \text{ ovvero se:}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left(x^4+y^4\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\,.$$ Passando a coordinate polari si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^4+y^4\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^3\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^8\left(\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta\right)^2}{\varrho^7} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho\left(\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta\right)^2 = 0$$

e la convergenza è uniforme in quanto $\varrho\left(\cos^4\vartheta+\operatorname{sen}^4\vartheta\right)^2 \le 4\,\varrho$ e quindi la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = e^{x^2+y^2} - e^{x-y} = 0$ soddisfatta nel punto $(0,0)$, verificare che con essa risulta definibile una funzione implicita $y = y(x)$ e calcolare poi, nel punto considerato, la derivata prima e la derivata seconda di tale funzione implicita.

La funzione $f(x,y)$ è funzione differenziabile $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Risulta poi:
$\nabla f(x,y) = \left(2x\,e^{x^2+y^2} - e^{x-y}; 2y\,e^{x^2+y^2} + e^{x-y}\right)$ per cui $\nabla f(0,0) = (-1;1)$.
Essendo $f_y'(0,0) = 1 \ne 0$ è possibile definire una funzione implicita $x \to y(x)$.
Per le sue derivate avremo: $y'(0) = -\dfrac{-1}{1} = 1$. Essendo:

$\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} (2+4x^2)\,e^{x^2+y^2} - e^{x-y} & 4xy\,e^{x^2+y^2} + e^{x-y} \\ 4xy\,e^{x^2+y^2} + e^{x-y} & (2+4y^2)\,e^{x^2+y^2} - e^{x-y} \end{Vmatrix}$ sarà $\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$ e

dalla $y'' = -\dfrac{f_{xx}'' + 2f_{xy}''\,y' + f_{yy}''\,(y')^2}{f_y'}$ otteniamo $y''(0) = -\dfrac{1+2+1}{1} = -4$.

I M 4) Date $f(x,y) = x\,y$ e $g(x,y) = x^2+y^2$ determinare per quali valori del parametro α risulta $\mathcal{D}_v f(1,1) = \mathcal{D}_v g(1,1)$, dove $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

Le funzioni $f(x,y) = x\,y$ e $g(x,y) = x^2+y^2$ sono dei polinomi e quindi sono differenziabili di qualsiasi ordine $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
Quindi $D_v f(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot v$ e $D_v g(1,1) = \nabla g(1,1)\cdot v$. Essendo:
$\nabla f(x,y) = (y\,;x) \Rightarrow \nabla f(1,1) = (1,1)$ e $\nabla g(x,y) = (2x;2y) \Rightarrow \nabla g(1,1) = (2;2)$
per avere $\mathcal{D}_v f(1,1) = \mathcal{D}_v g(1,1)$ dovrà essere:
$(1,1)(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) = (2;2)(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \Rightarrow \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha = 0$
per cui $\alpha = \dfrac{3}{4}\pi$ oppure $\alpha = \dfrac{7}{4}\pi$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y,z) = x - 2y + 3z \\ \text{s.v. } x^2+y^2+z^2 = 14 \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, il vincolo definisce una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che risulta un insieme compatto in quanto costituito da soli punti di frontiera (la superficie di una sfera) e quindi sicuramente esistono il valore massimo ed il valore minimo.
Essendo un problema con vincoli di uguaglianza costruiamo la funzione Lagrangiana ed applichiamo ad essa le condizioni del I e quelle del II ordine. Avremo:
$\Lambda(x,y,z,\lambda) = x - 2y + 3z - \lambda\left(x^2+y^2+z^2-14\right)$.
Applicando le condizioni del primo ordine avremo:

$$\nabla\Lambda(x,y,z,\lambda)=\mathbb{O}\Rightarrow\begin{cases}\Lambda'_x=1-2\lambda x=0\\ \Lambda'_y=-2-2\lambda y=0\\ \Lambda'_z=3-2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2=14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2\lambda}\\ y=-\dfrac{1}{\lambda}\\ z=\dfrac{3}{2\lambda}\\ \dfrac{1}{4\lambda^2}+\dfrac{1}{\lambda^2}+\dfrac{9}{4\lambda^2}=14\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2\lambda}\\ y=-\dfrac{1}{\lambda}\\ z=\dfrac{3}{2\lambda}\\ \dfrac{14}{4\lambda^2}=14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2\lambda}\\ y=-\dfrac{1}{\lambda}\\ z=\dfrac{3}{2\lambda}\\ \lambda^2=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-2\\ z=3\\ \lambda=\dfrac{1}{2}\end{cases}\cup\begin{cases}x=-1\\ y=2\\ z=-3\\ \lambda=-\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Abbiamo due soli punti stazionari: $P_1=(1,-2,3)$ e $P_2=(-1,2,-3)$.
Per il Teorema di Weierstrass, essendo $f(1,-2,3)=14$ e $f(-1,2,-3)=-14$ risulta ovviamente che P_1 è il punto di massimo mentre P_2 è il punto di minimo.
Se avessimo voluto applicare le condizioni del II ordine avremmo costruito la matrice Hessiana orlata: $\overline{\mathbb{H}}(x,y,z,\lambda)=\begin{Vmatrix}0&2x&2y&2z\\ 2x&-2\lambda&0&0\\ 2y&0&-2\lambda&0\\ 2z&0&0&-2\lambda\end{Vmatrix}$ per calcolare poi di questa, nei punti P_1 e P_2, i minori $\overline{\mathbb{H}}_3$ e $\overline{\mathbb{H}}_4$.

Essendo $\overline{\mathbb{H}}(P_1)=\begin{Vmatrix}0&2&-4&6\\ 2&-1&0&0\\ -4&0&-1&0\\ 6&0&0&-1\end{Vmatrix}$ risulta :

$\overline{\mathbb{H}}_3(P_1)=20>0$ e $\overline{\mathbb{H}}_4(P_1)=-56<0$ e quindi P_1 è punto di massimo;
$\overline{\mathbb{H}}_3(P_2)=-20<0$ e $\overline{\mathbb{H}}_4(P_2)=-56<0$ e quindi P_1 è punto di minimo.

II M 2) Risolvere il sistema omogeneo di equazioni differenziali: $\begin{cases}x'=x-y\\ y'=x+3y\end{cases}$, determinando poi la soluzione che soddisfa alla condizione $\begin{cases}x(0)=1\\ y(0)=-1\end{cases}$.

$$\begin{cases}x'=x-y\\ y'=x+3y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'-x+y=0\\ -x+y'-3y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{vmatrix}D-1&1\\ -1&D-3\end{vmatrix}(x)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\big(D^2-4D+4\big)(x)=0\Rightarrow(D-2)^2(x)=0\Rightarrow x''-4x'+4x=0.$$

Da $(\lambda-2)^2=0$ otteniamo $\lambda_1=\lambda_2=2$ e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea per $x(t)$ sarà: $x(t)=c_1\,e^{2t}+c_2\,t\,e^{2t}$.
Dalla prima equazione otteniamo: $y=x-x'$ e quindi:
$y(t)=c_1\,e^{2t}+c_2\,t\,e^{2t}-\big(2c_1\,e^{2t}+c_2\,e^{2t}+2c_2\,t\,e^{2t}\big)=-c_1\,e^{2t}-c_2\,(1+t)\,e^{2t}$.
Quindi la soluzione generale $\begin{cases}x(t)=c_1\,e^{2t}+c_2\,t\,e^{2t}\\ y(t)=-c_1\,e^{2t}-c_2\,(1+t)\,e^{2t}\end{cases}$ o anche:

$$\begin{Vmatrix}x(t)\\ y(t)\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}e^{2t}&t\,e^{2t}\\ -e^{2t}&-(1+t)\,e^{2t}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}c_1\\ c_2\end{Vmatrix}.$$

Imponendo ora le condizioni $\begin{cases}x(0)=1\\ y(0)=-1\end{cases}$ otteniamo:

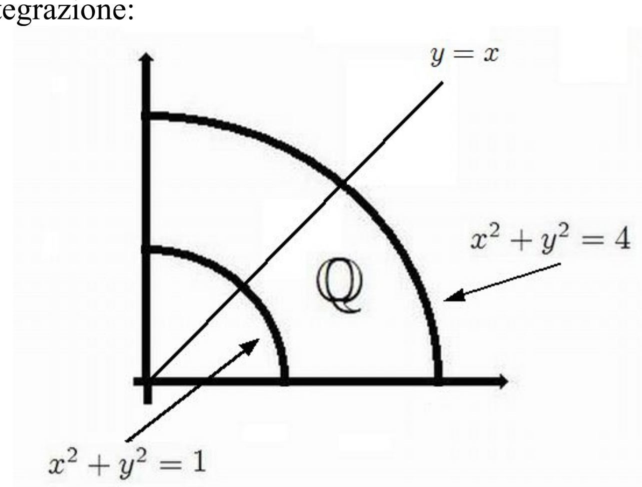
$\begin{cases} x(0) = c_1 = 1 \\ y(0) = -c_1 - c_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ -1 - c_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$ e quindi la soluzione particolare: $\begin{cases} x(t) = e^{2t} \\ y(t) = -e^{2t} \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y' - y^2 = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Da $y' - y^2 = 1 \Rightarrow y' = 1 + y^2$, equazione a variabili separabili per cui:
$\frac{1}{1+y^2}\, y' = 1 \Rightarrow \int \frac{1}{1+y^2}\, y'\, dx = \int \frac{1}{1+y^2}\, dy = \int 1\, dx + k \Rightarrow \operatorname{arctg} y = x + k$.
Quindi la soluzione generale $y = \operatorname{tg}(x+k)$. Dalla $y(0) = 1$ otteniamo: $\operatorname{tg}(k) = 1$ e quindi $k = \frac{\pi}{4}$ da cui la soluzione particolare del problema $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le x; 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}$ calcolare:
$\iint\limits_{\mathbb{Q}} \sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

Vista la regione di integrazione:



conviene calcolare l'integrale passando subito a coordinate polari:

$$\iint\limits_{\mathbb{Q}} \sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 \varrho \cdot \varrho\, \mathrm{d}\varrho\, \mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 \varrho^2\, \mathrm{d}\varrho\, \mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{3}\varrho^3\Big|_1^2\right) \mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) \mathrm{d}\vartheta = \frac{7}{3}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{7\pi}{12}.$$