COMPITO di ANALISI MATEMATICA 17/06/2020

I M 1) Calcolare le radici cubiche del numero $z = \dfrac{\sqrt{2}\,i}{1-i}$.

Essendo $\sqrt{2}i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ e $1-i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{4}\right)$ si ha :

$$z = \frac{\sqrt{2}\,i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{4}\right) =$$

$z = \cos\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i$. Avremo quindi:

$\sqrt[3]{z} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + k\,\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + k\,\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $0 \le k \le 2$.

Per $k=0$ si ha $z_0 = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i$;

per $k=1$ si ha $z_1 = \cos\dfrac{11\,\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\dfrac{11\,\pi}{12}$;

per $k=2$ si ha $z_2 = \cos\dfrac{19\,\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\dfrac{19\,\pi}{12}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \ne (0,0) \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, determinare il valore di k che la rende continua in $(0,0)$ e verificare poi se tale funzione risulta differenziabile nel punto $(0,0)$.

Calcoliamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$ passando a coordinate polari ed avremo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3\cos^3\vartheta}{\varrho} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho^2\cos^3\vartheta = 0\,.$$

La convergenza è uniforme in quanto $\left|\varrho^2\cos^3\vartheta\right| \le \varrho^2$.

Quindi la funzione è continua in $(0,0)$ se $k=0$.

Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{\sqrt{h^2}}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{|h|} = 0\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0^3}{\sqrt{h^2}}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Passando a coordinate polari si ha:

$\lim\limits_{\varrho\to 0}\dfrac{\varrho^3\cos^3\vartheta}{\varrho^2}=\lim\limits_{\varrho\to 0}\varrho\cos^3\vartheta=0$ e la convergenza è uniforme in quanto $\left|\varrho\cos^3\vartheta\right|\le\varrho$ e quindi la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y)=x\,e^{x-y}-y\,e^{y-x}=0$ soddisfatta nel punto $(1,1)$, verificare che con essa risulta definibile una funzione implicita $y=y(x)$ e calcolare poi, nel punto considerato, la derivata prima e la derivata seconda di tale funzione implicita.

La funzione $f(x,y)$ è funzione differenziabile $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Risulta poi:
$\nabla f(x,y)=(e^{x-y}+x\,e^{x-y}+y\,e^{y-x};\,-x\,e^{x-y}-e^{y-x}-y\,e^{y-x})=$
$\nabla f(x,y)=((1+x)\,e^{x-y}+y\,e^{y-x};\,-x\,e^{x-y}-(1+y)\,e^{y-x})\Rightarrow\nabla f(1,1)=(3;\,-3)$.
Essendo $f'_y(1,1)=-3\neq 0$ è possibile definire una funzione implicita $x\to y(x)$.
Per le sue derivate avremo: $y'(1)=-\dfrac{3}{-3}=1$. Essendo poi :

$$\mathbb{H}(x,y)=\left\|\begin{matrix}(2+x)\,e^{x-y}-y\,e^{y-x} & -(1+x)\,e^{x-y}+(1+y)\,e^{y-x}\\ -(1+x)\,e^{x-y}+(1+y)\,e^{y-x} & x\,e^{x-y}-(2+y)\,e^{y-x}\end{matrix}\right\|$$ sarà :

$\mathbb{H}(1,1)=\left\|\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{matrix}\right\|$ e dalla $y''=-\dfrac{f''_{xx}+2f''_{xy}\,y'+f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$ otteniamo :

$y''(1)=-\dfrac{2+0-2}{-3}=0$.

I M 4) Data la funzione $f(x,y)=e^{x-y}$, determinare le direzioni $v=(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)$ per cui risulta $\mathcal{D}_v f(k,k)=0$.

La funzione $f(x,y)=e^{x-y}$ risulta palesemente differenziabile $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
Quindi $D_v f(k,k)=\nabla f(k,k)\cdot v$. Essendo:
$\nabla f(x,y)=(e^{x-y};\,-e^{x-y})\Rightarrow\nabla f(k,k)=(1,\,-1)$, per avere $\mathcal{D}_v f(k,k)=0$ dovrà essere:
$(1,\,-1)(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)=\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha=0\Rightarrow\cos\alpha=\operatorname{sen}\alpha\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{4}\,;\alpha=\dfrac{5}{4}\pi$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases}\text{Max/min } f(x,y)=x^2+y\\ \text{s.v. : }(x-1)^2-1\le y\le 1\end{cases}$.

Scriviamo il problema come $\begin{cases}\text{Max/min } f(x,y)=x^2+y\\ \text{s.v.: }\begin{cases}(x-1)^2-1-y\le 0\\ y-1\le 0\end{cases}\end{cases}$. La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che risulta un insieme compatto in quanto limitato e chiuso e quindi sicuramente esistono il valore massimo ed il valore minimo. Essendo un problema con vincoli di disuguaglianza applichiamo le condizioni di Kuhn-Tucker, troviamo le soluzioni e poi studiamo la funzione obiettivo sulla frontiera di $\mathcal{E}$.
Per applicare le condizioni di Kuhn-Tucker, costruiamo la funzione Lagrangiana :
$\Lambda(x,y,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y-\lambda_1\big((x-1)^2-1-y\big)-\lambda_2\,(y-1)$.
Applicando le condizioni del primo ordine avremo:
1) caso $\lambda_1=0,\lambda_2=0$:

$\begin{cases}\Lambda'_x=2x=0\\ \Lambda'_y=1\neq 0\\ (x-1)^2-1-y\le 0\\ y-1\le 0\end{cases}$ non ci sono soluzioni.

2) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 2\lambda_1(x-1) = 0 \\ \Lambda'_y = 1 + \lambda_1 = 0 \\ y = (x-1)^2 - 1 \\ y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2 = 0 \\ \lambda_1 = -1 \\ y = (x-1)^2 - 1 \\ y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \lambda_1 = -1 < 0 \\ y = -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \leq 1 \end{cases}$$: da $\lambda_1 < 0$ segue che $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ è un possibile punto di Minimo.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x = 0 \\ \Lambda'_y = 1 - \lambda_2 = 0 \\ y = 1 \\ (x-1)^2 - 1 \leq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ \lambda_2 = 1 > 0 \\ 0 \leq 1 \end{cases}$$; da $\lambda_2 > 0$ segue che il punto $(0,1)$ è un possibile punto di Massimo.

4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 2\lambda_1(x-1) = 0 \\ \Lambda'_y = 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ y = (x-1)^2 - 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ y = 1 \\ 2x - 2\lambda_1(x-1) = 0 \\ 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ y = 1 \\ 2x - 2\lambda_1(x-1) = 0 \\ 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases};$$

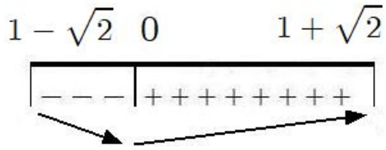
$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ y = 1 \\ 2x - 2\lambda_1(x-1) = 0 \\ 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ y = 1 \\ 2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 + \lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ y = 1 \\ \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} > 0 \\ \lambda_2 = \frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} > 0 \end{cases} :$$

da $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ segue che il punto $\left(1+\sqrt{2}, 1\right)$ è un possibile punto di Massimo;

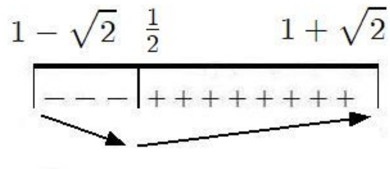
$$\begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ y = 1 \\ 2x - 2\lambda_1(x-1) = 0 \\ 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ y = 1 \\ 2 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 + \lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ y = 1 \\ \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} > 0 \\ \lambda_2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} > 0 \end{cases};$$

da $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ segue che il punto $\left(1-\sqrt{2}, 1\right)$ è un possibile punto di Massimo.

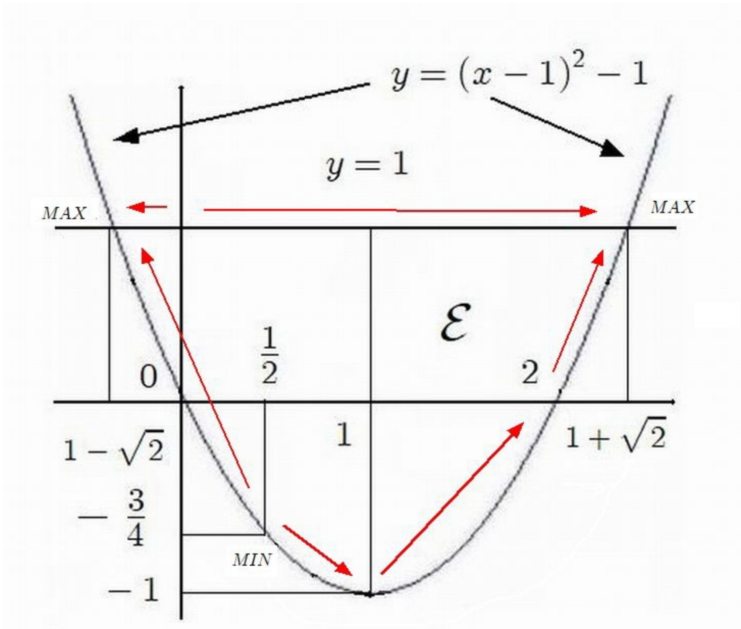
Studiamo la funzione obiettivo sul vincolo $y = 1$.
Risulta $f(x,1) = x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x \geq 0$ per $x \geq 0$.
Quindi la funzione decresce in $1 - \sqrt{2} \leq x \leq 0$ e cresce in $0 \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$.
Quindi ha in $x = 0$ un punto di minimo.



Ma il punto $(0,1)$ era stato segnalato come un possibile punto di massimo e quindi $(0,1)$ non è né punto di massimo né punto di minimo.
Studiamo la funzione obiettivo sul vincolo $y=(x-1)^2-1$.
Risulta $f\left(x,(x-1)^2-1\right)=2x^2-2x \Rightarrow f'(x)=4x-2\geq 0$ per $x\geq \dfrac{1}{2}$.
Quindi la funzione decresce in $1-\sqrt{2}\leq x\leq \dfrac{1}{2}$ e cresce in $\dfrac{1}{2}\leq x\leq 1+\sqrt{2}$.
Quindi ha in $x=\dfrac{1}{2}$ un punto di minimo.



Il punto $P_1=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{4}\right)$ era stato segnalato come un possibile punto di minimo e quindi esso è il punto di Minimo con $f(P_1)=-\dfrac{1}{2}$;
Il punto $P_2=\left(1-\sqrt{2},1\right)$, con $f(P_2)=4-2\sqrt{2}$ è un punto di massimo, il punto $P_3=\left(1+\sqrt{2},1\right)$, con $f(P_3)=4+2\sqrt{2}$ è un punto di massimo, P_2 è un punto di massimo relativo, P_3 è il punto di massimo assoluto.



II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x'=y+e^t \\ y'=2x+y \end{cases}$.

$\begin{cases} x'-y=e^t \\ -2x+y'-y=0 \end{cases} \Rightarrow \left\|\begin{matrix} D & -1 \\ -2 & D-1 \end{matrix}\right\|(x)=\left\|\begin{matrix} e^t \\ 0 \end{matrix}\right\| \Rightarrow \begin{vmatrix} D & -1 \\ -2 & D-1 \end{vmatrix}(x)=\begin{vmatrix} e^t & -1 \\ 0 & D-1 \end{vmatrix}$
$\Rightarrow \left(D^2-D-2\right)(x)=D\left(e^t\right)-e^t \Rightarrow x''-x'-2x=0$.
Da $\lambda^2-\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda+1)=0$ otteniamo $\lambda_1=2, \lambda_2=-1$ e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea per $x(t)$ sarà: $x(t)=c_1\,e^{2t}+c_2\,e^{-t}$.
Dalla prima equazione otteniamo $y=x'-e^t \Rightarrow y(t)=2c_1\,e^{2t}-c_2\,e^{-t}-e^t$.

II M 3) Data la funzione $f(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-2xy$, determinare la natura dei suoi punti stazionari.

Applicando le condizioni del primo ordine otteniamo:

$$\nabla f(x,y,z)=\mathbb{O}\Rightarrow\begin{cases}f'_x=2x-2y=0\\ f'_y=4y-2x=0\\ f'_z=2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=0\end{cases}$$

. Sarà poi:

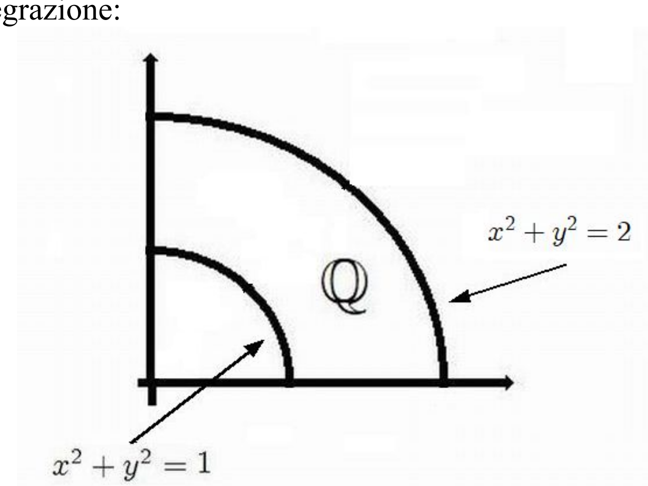
$$\mathbb{H}(x,y,z)=\mathbb{H}(0,0,0)=\begin{Vmatrix}2&-2&0\\-2&4&0\\0&0&2\end{Vmatrix}.$$

Essendo $\begin{cases}|\mathbb{H}_1|=2>0;\ |\mathbb{H}_1|=4>0\\ |\mathbb{H}_2|=8-4>0;\ |\mathbb{H}_2|=8-0>0\\ |\mathbb{H}_3|=2\,(8-4)>0\end{cases}$ il punto $(0,0,0)$ risulta un punto di minimo.

II M 4) Data $\mathbb{Q}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 0\le x; 0\le y; 1\le x^2+y^2\le 2\right\}$, calcolare:

$$\iint\limits_{\mathbb{Q}}\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Vista la regione di integrazione:



conviene calcolare l'integrale passando subito a coordinate polari:

$$\iint\limits_{\mathbb{Q}}\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\varrho\cos\vartheta}{\varrho^2}\cdot\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\sqrt{2}}\cos\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\varrho\right|_1^{\sqrt{2}}\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\operatorname{sen}\vartheta\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}-1\,.$$