COMPITO di ANALISI MATEMATICA 15/07/2020

I M 1) Calcolare le radici cubiche del numero $z = \dfrac{1-i}{1+i}$.

Essendo $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right)$ e $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$ si ha :

$z = \dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)} = \cos\left(\dfrac{7\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4}\right) =$

$z = \cos\dfrac{6\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{6\pi}{4} = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2} = -i$. Avremo quindi:

$\sqrt[3]{z} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + k\,\dfrac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + k\,\dfrac{2\pi}{3}\right),\ 0 \le k \le 2$.

Per $k = 0$ si ha $z_0 = \cos\dfrac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = i$;

per $k = 1$ si ha $z_1 = \cos\dfrac{7\,\pi}{6} + i \operatorname{sen}\dfrac{7\,\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,i$;

per $k = 2$ si ha $z_2 = \cos\dfrac{11\,\pi}{6} + i \operatorname{sen}\dfrac{11\,\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,i$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y - xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, determinare il valore di k che la rende continua in $(0,0)$ e verificare poi se tale funzione risulta differenziabile nel punto $(0,0)$.

Calcoliamo $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y - xy^2}{x^2+y^2}$ passando a coordinate polari ed avremo:

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y - xy^2}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3\,(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta)\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta}{\varrho^2} =$

$\displaystyle= \lim_{\varrho\to 0} \varrho\,(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta)\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta = 0$.

La convergenza è uniforme in quanto $|\varrho\,(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta)\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta| \le 2\varrho$.

Quindi la funzione è continua in $(0,0)$ se $k = 0$.

Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} \cdot \frac{1}{h} = 0$;

$\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} \cdot \frac{1}{h} = 0$.

Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0$ ovvero se:

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y - xy^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Passando a coordinate polari si ha:

$$\lim_{\varrho\to 0}\frac{\varrho^3(\cos\vartheta-\operatorname{sen}\vartheta)\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta}{\varrho^2}\cdot\frac{1}{\varrho}=\frac{\varrho^3(\cos\vartheta-\operatorname{sen}\vartheta)\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta}{\varrho^3}=$$

$=(\cos\vartheta-\operatorname{sen}\vartheta)\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta=0$ solo per particolari valori di ϑ e quindi la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z)=\operatorname{sen}(xy)+\cos(xz)=1 \\ g(x,y,z)=x^3y^2-xz^3+zy^3=1\end{cases}$ soddisfatto in $P_0=(0,1,1)$, verificare che con esso si può definire una funzione implicita $z\to(x,y)$ e di questa si calcolino le derivate prime in $z=1$.

Le funzioni $f(x,y,z)$ e $g(x,y,z)$ sono funzioni differenziabili $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Risulta poi:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}=\begin{Vmatrix} y\cos(xy)-z\operatorname{sen}(xz) & x\cos(xy) & -x\operatorname{sen}(xz) \\ 3x^2y^2-z^3 & 2x^3y+3zy^2 & -3xz^2+y^3\end{Vmatrix}$$ e quindi:

$\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}(P_0)=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1\end{Vmatrix}$. Dato che $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3\end{vmatrix}=3\neq 0$ si può definire una funzione implicita $z\to(x,y)$ per le cui derivate avremo:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3\end{vmatrix}}=-\frac{0}{3}=0;\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3\end{vmatrix}}=-\frac{1}{3}.$$

I M 4) Data $f(x,y)=x\,y$ ed i vettori $\mathbb{V}=(1,1)$ e $\mathbb{W}=(1,-1)$, siano v e w i loro versori; determinare il punto (x_0,y_0) sapendo che $\mathcal{D}_vf(x_0,y_0)=\sqrt{2}$ e che $\mathcal{D}_wf(x_0,y_0)=0$.

La funzione $f(x,y)=x\,y$ risulta palesemente differenziabile $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
Quindi $D_vf(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot v$ e $D_wf(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot w$.
Essendo: $\nabla f(x,y)=(y\,;x)\Rightarrow\nabla f(x_0,y_0)=(y_0,x_0)$; inoltre:
$v=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $w=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, e quindi avremo:

$$\begin{cases}\mathcal{D}_vf(x_0,y_0)=\sqrt{2} \\ \mathcal{D}_wf(x_0,y_0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(y_0,x_0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2} \\ (y_0,x_0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_0+x_0=2 \\ y_0-x_0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=1 \\ y_0=1\end{cases}.$$

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases}\text{Max/min } f(x,y)=x^2+x\,y^2 \\ \text{s.v.: } 4x^2+y^2\le 4\end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, il vincolo definisce una regione ammissibile $\mathcal{E}$ (ellisse) che risulta un insieme compatto in quanto limitato e chiuso e quindi sicuramente esistono il valore massimo ed il valore minimo. Essendo un problema con vincolo di disuguaglianza applichiamo le condizioni di Kuhn-Tucker, troviamo le soluzioni e poi studiamo la funzione obiettivo sulla frontiera di $\mathcal{E}$.
Per applicare le condizioni di Kuhn-Tucker, costruiamo la funzione Lagrangiana :
$\Lambda(x,y,\lambda)=x^2+x\,y^2-\lambda\left(4x^2+y^2-4\right)$.
Applicando le condizioni del primo ordine avremo:
1) caso $\lambda=0$:

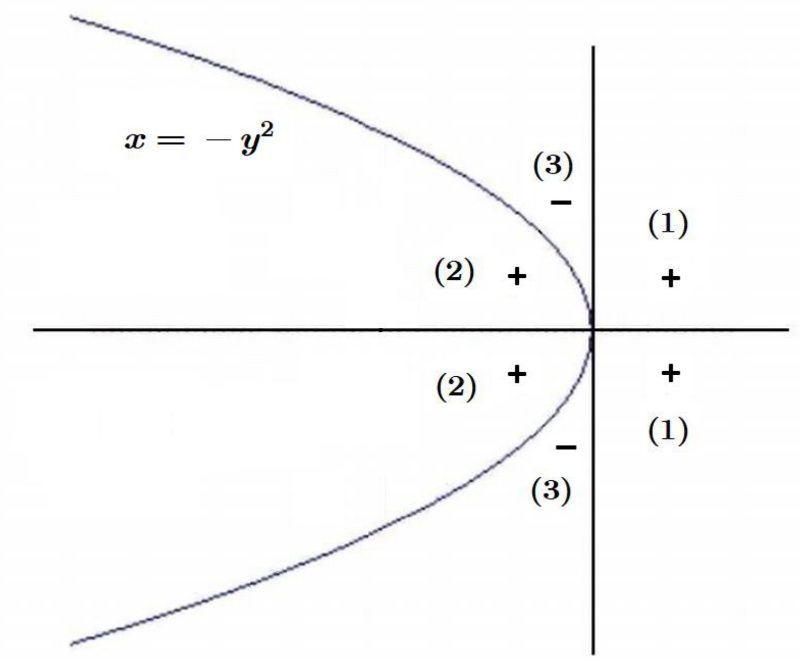
$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x + y^2 = 0 \\ \Lambda'_y = 2xy = 0 \\ 4x^2 + y^2 \le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0 \le 4 \end{cases} ; \ \mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 2x \end{Vmatrix} \Rightarrow \mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Possiamo solo per ora dire che $(0,0)$ non è un punto di Massimo.
Essendo $f(0,0) = 0$ studiamo il segno della funzione in un intorno di $(0,0)$.
Essendo $f(x,y) = x\left(x + y^2\right)$ avremo:

$f(x,y) > 0$ per $\begin{cases} x > 0 \\ x > -y^2 \end{cases}$ (1) oppure per $\begin{cases} x < 0 \\ x < -y^2 \end{cases}$ (2) mentre risulta:

$f(x,y) < 0$ per $\begin{cases} x > 0 \\ x < -y^2 \end{cases}$ (impossibile) oppure per $\begin{cases} x < 0 \\ x > -y^2 \end{cases}$ (3).

Graficamente avremo:



Quindi, come si vede dalla figura, in ogni intorno di $(0,0)$ ci sono punti in cui $f(x,y) > 0$ e punti in cui $f(x,y) < 0$. Il punto $(0,0)$ è quindi un punto di sella.

2) caso $\lambda \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x + y^2 - 8\lambda x = 0 \\ \Lambda'_y = 2xy - 2\lambda y = 2y\,(x - \lambda) = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x\,(1 - 4\lambda) = 0 \\ y = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \lambda = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ \lambda = \frac{1}{4} \end{cases}$$

dato che in ambedue risulta $\lambda = \dfrac{1}{4} > 0$ questi potrebbero essere punti di Massimo; oppure:

$$\begin{cases} 2x + y^2 - 8\lambda x = 0 \\ 2y\,(x - \lambda) = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y^2 - 8x^2 = 0 \\ x = \lambda \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y^2 = 8x^2 - 2x \\ 4x^2 + 8x^2 - 2x = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y^2 = 8x^2 - 2x \\ 12x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y^2 = 8x^2 - 2x \\ 6x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} .$$

Da $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} = \dfrac{1 \pm 7}{12}$ si ha $x = \dfrac{2}{3}$ oppure $x = -\dfrac{1}{2}$ e quindi:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y^2 = 8\,\frac{4}{9} - 2\,\frac{2}{3} \\ \lambda = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y^2 = \frac{20}{9} \\ \lambda = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{\sqrt{20}}{3} \\ \lambda = \frac{2}{3} \end{cases} \cup \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{\sqrt{20}}{3} \\ \lambda = \frac{2}{3} \end{cases}$$

e dato che in ambedue risulta $\lambda = \dfrac{2}{3} > 0$ questi potrebbero essere punti di Massimo; oppure:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y^2 = 8\,\frac{1}{4} - 2\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y^2 = 3 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \sqrt{3} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\sqrt{3} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

e dato che in ambedue risulta $\lambda = -\dfrac{1}{2} < 0$ questi potrebbero essere punti di Minimo.

Studiamo la funzione obiettivo sul vincolo $4x^2 + y^2 = 4$ usando la trasformazione in coordinate polari: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\operatorname{sen} t \end{cases}$. Risulta quindi: $f(t) = \cos^2 t + \cos t \cdot 4\operatorname{sen}^2 t \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(t) = 2\cos t\,(-\operatorname{sen} t) + (-\operatorname{sen} t)\left(4\operatorname{sen}^2 t\right) + \cos t \cdot 8\operatorname{sen} t \cos t \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(t) = -2\operatorname{sen} t\cos t - 4\operatorname{sen}^3 t + 8\operatorname{sen} t\cos^2 t \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(t) = 2\operatorname{sen} t\left(-\cos t - 2\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t\right) \Rightarrow$

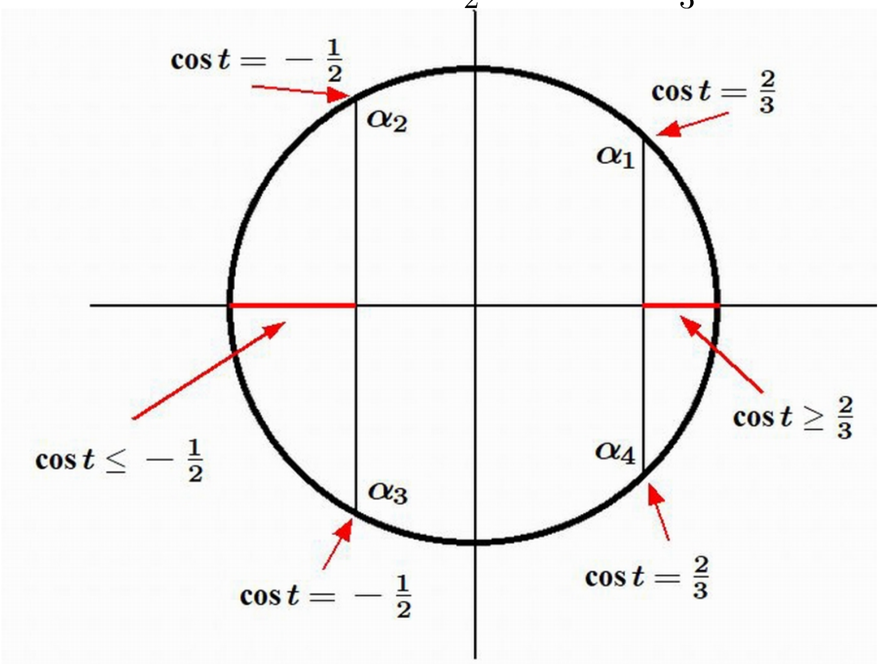
$\Rightarrow f'(t) = 2\operatorname{sen} t\left(-\cos t - 2\left(1 - \cos^2 t\right) + 4\cos^2 t\right) = 2\operatorname{sen} t\left(6\cos^2 t - \cos t - 2\right)$.

Quindi $f'(t) \geq 0$ per $\begin{cases} \operatorname{sen} t \geq 0 \\ 6\cos^2 t - \cos t - 2 \geq 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} \operatorname{sen} t \leq 0 \\ 6\cos^2 t - \cos t - 2 \leq 0 \end{cases}$.

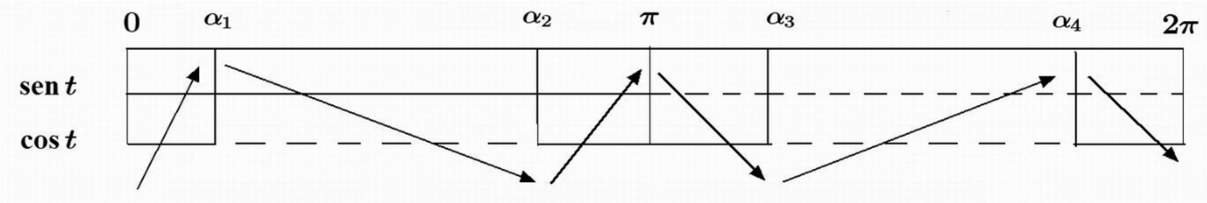
Risulta $\operatorname{sen} t \geq 0$ per $0 \leq t \leq \pi$ e $\operatorname{sen} t \leq 0$ per $\pi \leq t \leq 2\pi$.

Si ha $6\cos^2 t - \cos t - 2 = 0$ per $\cos t = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} \Rightarrow \cos t = \dfrac{2}{3}$ e $\cos t = -\dfrac{1}{2}$.

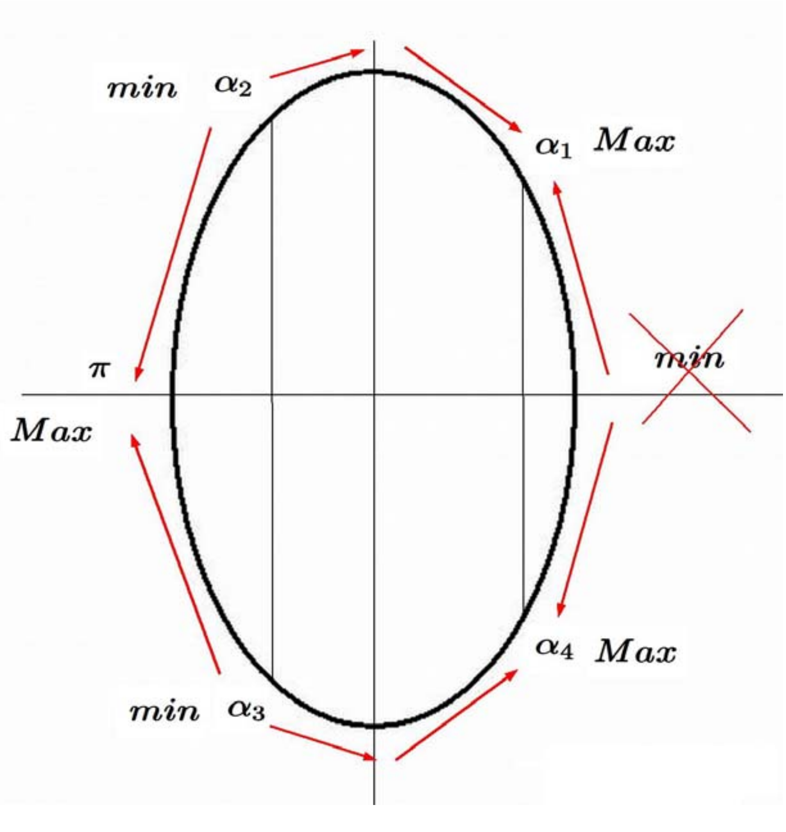
Quindi $6\cos^2 t - \cos t - 2 \geq 0$ per $\cos t \leq -\dfrac{1}{2}$ e per $\cos t \geq \dfrac{2}{3}$.



e quindi otteniamo:



La funzione $f(t)$ quindi sulla frontiera di $\mathcal{E}$:
cresce per $0 \leq t \leq \alpha_1$; decresce per $\alpha_1 \leq t \leq \alpha_2$; cresce per $\alpha_2 \leq t \leq \pi$; decresce per $\pi \leq t \leq \alpha_3$; cresce per $\alpha_3 \leq t \leq \alpha_4$; decresce per $\alpha_4 \leq t \leq 2\pi$.
E quindi, relativamente ai punti della frontiera di $\mathcal{E}$:
$\left(\frac{2}{3}; \frac{\sqrt{20}}{3}\right)$ è punto di massimo, $\left(-\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$ è punto di minimo, $(-1;0)$ è punto di massimo, $\left(-\frac{1}{2}; -\sqrt{3}\right)$ è punto di minimo, $\left(\frac{2}{3}; -\frac{\sqrt{20}}{3}\right)$ è punto di massimo, $(1;0)$ è punto di minimo.
Tutte le conclusioni ottenute studiando la frontiera coincidono con quelle ipotizzate mediante il segno del moltiplicatore, eccetto che per il punto $(1,0)$ che per l'analisi sulla frontiera sarebbe minimo mentre per il moltiplicatore sarebbe massimo e quindi non è nulla.
Essendo $f(-1,0)=1$ e $f\left(\frac{2}{3}:\frac{\sqrt{20}}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}:-\frac{\sqrt{20}}{3}\right) = \frac{52}{27}$ i punti $\left(\frac{2}{3}:\frac{\sqrt{20}}{3}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}:-\frac{\sqrt{20}}{3}\right)$ sono punti di massimo assoluto, il punto $(-1,0)$ è di massimo relativo.
Il valore minimo assoluto si ottiene con $f\left(-\frac{1}{2}:\sqrt{3}\right) = f\left(-\frac{1}{2}:-\sqrt{3}\right) = -\frac{5}{4}$.
In conclusione:



II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x' - x - y = 1 \\ -x + y' + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \left\| \begin{matrix} D-1 & -1 \\ -1 & D+1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right\| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left| \begin{matrix} D-1 & -1 \\ -1 & D+1 \end{matrix} \right| (x) = \left| \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & D+1 \end{matrix} \right| \Rightarrow \big(D^2 - 1 - 1\big)(x) = (D+1)(1) - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \big(D^2 - 1 - 1\big)(x) = (D+1)(1) - 1 \Rightarrow \big(D^2 - 2\big)(x) = 1 - 1 \Rightarrow x'' - 2x = 0\,.$$

Da $\lambda^2 - 2 = 0$ otteniamo $\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}$ e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea per $x(t)$ sarà: $x(t) = c_1\, e^{\sqrt{2}\,t} + c_2\, e^{-\sqrt{2}\,t}$.

Dalla prima equazione otteniamo :

$y = x' - x - 1 \Rightarrow y(t) = \sqrt{2}\, c_1\, e^{\sqrt{2}\,t} - \sqrt{2}\, c_2\, e^{-\sqrt{2}\,t} - c_1\, e^{\sqrt{2}\,t} - c_2\, e^{-\sqrt{2}\,t} - 1$

e quindi

$y(t) = \left(\sqrt{2} - 1\right) c_1\, e^{\sqrt{2}\,t} - \left(\sqrt{2} + 1\right) c_2\, e^{-\sqrt{2}\,t} - 1\,.$

II M 3) Risolvere l'equazione differenziale di Bernoulli $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y}$.

Riscriviamo l'equazione come $y' - \dfrac{1}{x}\, y = x\, y^{-1}$. Quindi:

$p(x) = \dfrac{1}{x}$, $q(x) = x$ e $\alpha = -1$. Posto $y^{1-\alpha} = y^2 = w$ otteniamo $y = \sqrt{w}$ da cui poi $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{w}} \cdot w'$ e quindi sostituendo: $\dfrac{1}{2\sqrt{w}} \cdot w' - \dfrac{1}{x}\sqrt{w} = x\, \dfrac{1}{\sqrt{w}}$.

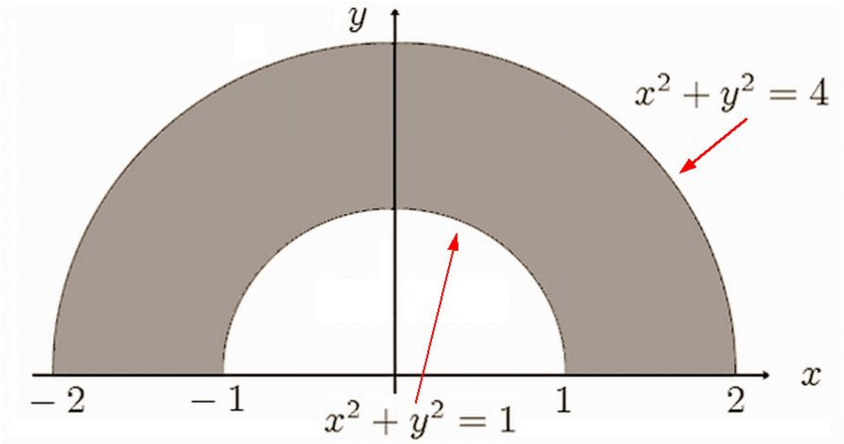
Moltiplicando tutto per $2\sqrt{w}$ otteniamo infine: $w' - \dfrac{2}{x}\, w = 2x$ che integriamo come equazione lineare del I ordine non omogenea ottenendo:

$$w(x) = e^{\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x} \left(\int 2x\, e^{-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x + k \right) = e^{2\log x} \left(\int 2x\, e^{-2\log x}\, \mathrm{d}x + k \right) =$$
$$w(x) = x^2 \left(\int 2x\, \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x + k \right) = x^2 \left(\int 2\, \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x + k \right) = x^2\,(2\log x + k)\,.$$

E dalla $y = \sqrt{w}$ otteniamo la soluzione finale $y = \sqrt{x^2\,(2\log x + k)}$.

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y\,; 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} \frac{|xy|}{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

Vista la regione di integrazione:



e le simmetrie della funzione integranda: $f(x,y) = f(-x,-y) = f(-x,y) = f(x,-y)$

l'integrale dato corrisponde a : $2 \cdot \displaystyle\iint_{\mathbb{Q}_1} \frac{xy}{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, dove:

$\mathbb{Q}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \,; 0 \le y \,; 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}$.

Operando la sostituzione in coordinate polari avremo:

$$2 \iint_{\mathbb{Q}_1} \frac{xy}{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \frac{\varrho^2 \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta}{\varrho^2}\, \varrho\, \mathrm{d}\varrho\, \mathrm{d}\vartheta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \cdot \varrho\, \mathrm{d}\varrho\, \mathrm{d}\vartheta =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\varrho^2\right|_1^2 \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4-1) \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta\,.$$

Dato che: $\displaystyle\int \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta = \int \operatorname{sen}\vartheta\, \mathrm{d}(\operatorname{sen}\vartheta) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\vartheta$ avremo infine:

$$2 \iint_{\mathbb{Q}_1} \frac{xy}{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 3 \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\vartheta\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}(1-0) = \frac{3}{2}\,.$$