COMPITO di ANALISI MATEMATICA 2/09/2020

I M 1) Trovare le radici quadrate della soluzione reale dell'equazione $x^3 + x^2 + x = -1$.

Da $x^3 + x^2 + x = -1 \Rightarrow x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^2(x+1) + x + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2+1)(x+1) = 0$. Quindi $x = -1$ è l'unica soluzione reale.
Dato che $-1 = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi$ si ha :
$\sqrt{-1} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\,\frac{2\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\,\frac{2\pi}{2}\right),\ 0 \le k \le 1$.
Per $k = 0$ otteniamo $z_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = i$;
per $k = 1$ otteniamo $z_1 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -i$.

I M 2) Si verifichi che la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3\,y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ può, mediante un opportuno valore di k, essere resa continua $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, determinando se essa risulti anche differenziabile in $(0,0)$.

Calcoliamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3\,y}{x^2+y^2}$ passando a coordinate polari ed avremo:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3\,y}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim\limits_{\varrho\to 0} \dfrac{\varrho^4\cos^3\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{\varrho^2} = \lim\limits_{\varrho\to 0} \varrho^2\cos^3\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta = 0$.
La convergenza è uniforme in quanto $\left|\varrho^2\cos^3\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right| \le \varrho^2$.
Quindi la funzione è continua in $(0,0)$ se $k = 0$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h^2} \cdot \dfrac{1}{h} = 0$;
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h^2} \cdot \dfrac{1}{h} = 0$.
Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0, y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0$ ovvero se:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3\,y}{x^2+y^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Passando a coordinate polari si ha:
$\lim\limits_{\varrho\to 0} \dfrac{\varrho^4\cos^3\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{\varrho^2} \cdot \dfrac{1}{\varrho} = \lim\limits_{\varrho\to 0} \varrho\cos^3\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta = 0$.
La convergenza è uniforme in quanto $\left|\varrho\cos^3\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right| \le \varrho$ e quindi la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y,z) = x\,e^{y+z} - y\,e^{x+z} = 0$, verificare che in $\mathrm{P}_0 = (0,0,1)$ è possibile definire una funzione implicita avente y come variabile dipendente da x e z, e quindi calcolare le due derivate parziali del primo ordine di $y(x,z)$ in $(0,1)$.

La funzione $f(x,y,z)$ è funzione differenziabile $\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ con $f(0,0,1) = 0$.

Risulta poi: $\nabla f(x, y.z) = \left(e^{y+z} - y\, e^{x+z}; x\, e^{y+z} - e^{x+z}; x\, e^{y+z} - y\, e^{x+z}\right)$ da cui: $\nabla f(0,0,1) = (e; -e; 0)$. Dato che $f'_y = -e \neq 0$ si può definire una funzione implicita $(x, z) \to y$ le cui derivate del primo ordine sono:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{e}{-e} = 1\,;\ \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{f'_z}{f'_y} = -\frac{0}{-e} = 0\,.$$

I M 4) Data la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ ed il versore $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, verificare che è impossibile che risulti $\mathcal{D}^2_{v,v} f(x_0, y_0) = 0$.

La funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ risulta palesemente differenziabile due volte $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Quindi $D_v f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v$ e $\mathcal{D}^2_{v,v} f(x_0, y_0) = v \cdot \mathbb{H} f(x_0, y_0) \cdot v^T$.

Da $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ segue $\mathbb{H}(x, y) = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$ e quindi:

$$\mathcal{D}^2_{v,v} f(x_0, y_0) = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{Vmatrix} = 2\cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2 \neq 0\ \ \forall\alpha\,.$$

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - x + y \\ \text{s.v.:} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli sono funzioni lineari ma non definiscono una regione ammissibile che è un insieme compatto in quanto è una linea retta, quindi non possiamo applicare il Teorema di Weierstrass.

Da $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ si ha $\begin{cases} z = 1 - x + y \\ y = 2 - x + z = 2 - x + 1 - x + y \end{cases}$ e quindi:

$\begin{cases} z = 1 - x + y \\ y = 3 - 2x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = y - \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$. Per risolvere il problema, sostituendo avremo:

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - x + y = f\left(\frac{3}{2}, y, y - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} + y^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} + y$ da cui $f(y) = 2y^2 + 1$. Da $f'(y) = 4y \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$ si vede che $y = 0$ è un punto di minimo per $f(y)$ e quindi $\left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ è un punto di minimo per $f(x, y, z)$ s.v.: $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$.

II M 2) Data la funzione $f(x, y) = x^2 - 2k\,xy + y^3$ determinare, al variare del parametro k, l'esistenza e la natura dei suoi punti stazionari.

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

$\nabla f(x, y) = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 2x - 2ky = 0 \\ f'_y = 3y^2 - 2kx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ky \\ 3y^2 - 2k^2 y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ky \\ y\,(3y - 2k^2) = 0 \end{cases}$ da cui le soluzioni $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = \frac{2}{3}k^3 \\ y = \frac{2}{3}k^2 \end{cases}$. Essendo $\mathbb{H}(x, y) = \begin{Vmatrix} 2 & -2k \\ -2k & 6y \end{Vmatrix}$ si ha:

- $\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 2 & -2k \\ -2k & 0 \end{Vmatrix}$; per $k \neq 0$ risulta $|\mathbb{H}_2| < 0$ e $(0,0)$ è un punto di sella;

per $k = 0$ si ha $\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ da cui $|\mathbb{H}_2| = 0$; essendo $|\mathbb{H}_1| = 2 > 0$ sicuramente $(0,0)$ non è un punto di massimo. Ma per $x \neq 0$, $y = 0$ si ha $f(x, 0) = x^2 > 0$ mentre per

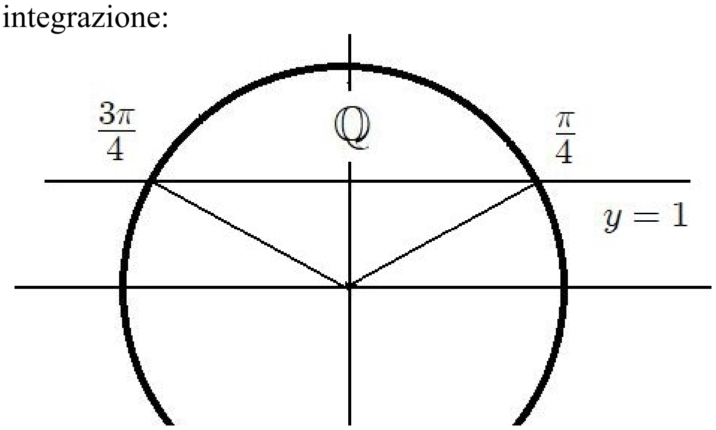
$x=0,\, y\neq 0$ risulta $f(0,y)=y^3$ e quindi $f(0,y)=y^3>0$ per $y>0$ mentre $f(0,y)=y^3<0$ per $y<0$.
In ogni intorno del punto $(0,0)$ ci sono punti in cui la funzione è positiva e punti in cui la funzione è negativa. Essendo $f(0,0)=0$, anche per $k=0$ si ha che $(0,0)$ è un punto di sella.
- $\mathbb{H}\left(\frac{2}{3}k^3,\frac{2}{3}k^2\right)=\left\|\begin{matrix}2 & -2k\\ -2k & 4k^2\end{matrix}\right\| \Rightarrow \begin{cases}|\mathbb{H}_1|=2>0,\ |\mathbb{H}_1|=4k^2>0 \text{ if } k\neq 0\\ |\mathbb{H}_2|=8k^2-4k^2=4k^2>0 \text{ if } k\neq 0\end{cases}$.
Quindi $\left(\frac{2}{3}k^3,\frac{2}{3}k^2\right)$ è un punto di minimo $\forall\, k\neq 0$. Il caso $k=0$ è già stato studiato.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases}x'(t)=2x-y-e^{2t}\\ y'(t)=-x+2y+t\end{cases}$.

$$\begin{cases}x'-2x+y=-e^{2t}\\ x+y'-2y=t\end{cases} \Rightarrow \left\|\begin{matrix}D-2 & 1\\ 1 & D-2\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}-e^{2t}\\ t\end{matrix}\right\| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix}D-2 & 1\\ 1 & D-2\end{vmatrix}(x)=\begin{vmatrix}-e^{2t} & 1\\ t & D-2\end{vmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(D^2-4D+3\right)(x)=(D-2)\left(-e^{2t}\right)-t=-2e^{2t}+2e^{2t}-t=-t\,.$$
Da $x''-4x'+3x=0$ otteniamo $\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)=0$ e quindi le soluzioni $\lambda_1=1,\lambda_2=3$, da cui la soluzione generale dell'equazione omogenea per $x(t)$ che sarà: $x(t)=c_1\,e^t+c_2\,e^{3\,t}$. Per trovare una soluzione della non omogenea usiamo $x_0=at+b$ da cui $x_0'=a$ e $x_0''=0$. Sostituendo in $x''-4x'+3x=0$ si ha $0-4a+3at+3b=-t$ e quindi: $\begin{cases}3a=-1\\ 3b-4a=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-\frac{1}{3}\\ b=-\frac{4}{9}\end{cases}$. La soluzione generale per $x(t)$ sarà quindi:
$x(t)=c_1\,e^t+c_2\,e^{3\,t}-\frac{1}{3}\,t-\frac{4}{9}$. Da $x'-2x+y=-e^{2t}\Rightarrow y=-x'+2x-e^{2t}$ e quindi:
$$y=-\left(c_1\,e^t+3c_2\,e^{3\,t}-\frac{1}{3}\right)+2\left(c_1\,e^t+c_2\,e^{3\,t}-\frac{1}{3}\,t-\frac{4}{9}\right)-e^{2t}\Rightarrow$$
$$y=c_1\,e^t-c_2\,e^{3\,t}-e^{2t}-\frac{2}{3}\,t-\frac{5}{9}\,.$$

II M 4) Data $\mathbb{Q}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 1\leq y; x^2+y^2\leq 4\right\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}}\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Vista la regione di integrazione:



operando la sostituzione in coordinate polari, da $y=1\Rightarrow \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta=1\Rightarrow\varrho=\dfrac{1}{\mathrm{sen}\,\vartheta}$, si ha:

$$\iint_{\mathbb{Q}} \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}}^{2} \frac{\varrho \operatorname{sen}\vartheta}{\varrho^2}\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}}^{2} \operatorname{sen}\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\varrho|_{\frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}}^{2} \operatorname{sen}\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(2 - \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}\right) \operatorname{sen}\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2\operatorname{sen}\vartheta - 1\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= (-2\cos\vartheta - \vartheta|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \left(\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}\right) - \left(-\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}\,.$$