COMPITI DI ANALISI MATEMATICA
AA. 2019/20

Prova Intermedia 2019

I M 1) Data l'equazione polinomiale $x^2 - \sqrt{2}\,x + k = 0$, si determini il valore di k per il quale tale equazione ammette la soluzione $x = e^{\frac{\pi}{4}i}$. Si calcolino poi le radici quadrate dell'altra soluzione.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & : (x,y) \neq (0,0) \\ k & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$, determinare l'opportuno valore di k che rende la funzione continua nel punto $(0,0)$, e determinare poi se in tale punto risulta anche differenziabile.

I M 3) Data la funzione $f(x,y) = e^{y^2-x^2} - e^{x^2-y^2}$ ed il versore $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, determinare i valori di α per i quali la derivata direzionale $D_v f(1,1)$ è nulla, e per tali valori di α si calcoli $D^2_{v,-v} f(1,1)$.

I M 4) Data l'equazione $f(x,y) = e^{x+y} - x + y = 0$, si trovi un punto (x_0, y_0) che la soddisfa e nel quale, con essa, si può definire una funzione implicita $x \to y(x)$ che presenta in x_0 un punto stazionario. Determinare (x_0, y_0) e la natura di tale punto stazionario.

I M 5) Data la composizione di funzioni $y = f(g(t_1;t_2))$, con $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g : (t_1;t_2) \to (x_1;x_2;x_3)$, $f : (x_1;x_2;x_3) \to y$, esprimere $\dfrac{\partial(y)}{\partial(t_1;t_2)}$ mediante prodotto di opportune matrici Jacobiane. Si applichi poi tale formula al caso:
$f(x_1;x_2;x_3) = 2x_1x_2 - 3x_3$, $g(t_1;t_2) = \left(t_1\,t_2; 2t_1 - t_2; t_2^3\right)$ nel punto $(t_1;t_2) = (1;\,-1)$.

I Appello Sessione Invernale 2020

I M 1) Sia $z = \sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right)e^{\frac{\pi}{4}i} - 2\left(1+\sqrt{3}\right)e^{\frac{\pi}{3}i}$. Calcolare $\sqrt{z}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^4}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ k & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$, determinare l'opportuno valore di k che rende la funzione continua nel punto $(0,0)$, e determinare poi se in tale punto risulta anche differenziabile.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y,z) = x^3y + xy^3 - 4xyz + 2z^3 = 0$, soddisfatta in $(1,1,1)$, verificare che con essa si può definire una funzione implicita $(x,y) \to z(x,y)$ che presenta un punto stazionario. Determinare la natura di tale punto stazionario.

I M 4) Data $f(x,y) = x^2y - xy + xy^2$ e $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, si determinino almeno due valori di α per i quali risulti $D_v f(1,1) = D^2_{v,v} f(1,1)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \text{s.v.: } \begin{cases} y \leq 1 - x^2 \\ 1 - x \leq y \end{cases} \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' + y = e^t \\ y' + x = 1 \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} x\,y\,y' = \log x \\ y(1) = 2 \end{cases}$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 - x \leq y\,; x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

II Appello Sessione Invernale 2020

I M 1) Dopo aver semplificato e ridotto a forma algebrica, si esprima in forma di esponenziale complessa il numero $z = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1+i} + \dfrac{1-\sqrt{3}}{1-i}$.

I M 2) Data la funzione $f(x, y) = x\sqrt{|y|} - y\sqrt{|x|}$, si verifichi se essa risulta differenziabile nel punto $(0, 0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x, y, z) = x\,e^{y-z} - 2y\,e^{x-z} + z\,e^{x-y} = 0 \\ g(x, y, z) = x^2y + xz^2 - 2xyz = 0 \end{cases}$ soddisfatto nel punto $\mathrm{P}_0 = (1, 1, 1)$, verificare che con esso è possibile definire una funzione implicita $x \to (y, z)$ e calcolare poi le derivate prime di tale funzione.

I M 4) Data $f(x, y) = x\,y$ ed i vettori $\mathbb{V} = (1, 1)$ e $\mathbb{W} = (-1, 1)$, detti rispettivamente v e w i loro versori, sapendo che $\mathcal{D}_v f(x_0, y_0) = \sqrt{2}$ e che $\mathcal{D}_w f(x_0, y_0) = 0$, determinare le coordinate del punto (x_0, y_0).

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = x^2 + y^2 - x\,y - 3x \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 4 - x \end{cases} \end{cases}$.

II M 2) Analizzare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x, y) = xy - xy^3 - x^3y$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y''' + y' = x\,e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} |x\,y| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$, anche usando opportunamente le simmetrie della funzione e del dominio di integrazione.

Appello Sessione Straordinaria I 2020

I M 1) Dopo aver determinato il numero complesso z che risulta soluzione dell'equazione $\dfrac{z}{1+i} + \dfrac{z}{1-i} = 2i$, calcolare le sue radici cubiche $\sqrt[3]{z}$.

I M 2) Data la funzione $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\left(x^4 + y^4\right)^2}{\left(x^2 + y^2\right)^3} & (x, y) \neq (0, 0) \\ k & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, determinare il valore di k che la rende continua in $(0, 0)$ e verificare poi se tale funzione risulta differenziabile nel punto $(0, 0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x, y) = e^{x^2+y^2} - e^{x-y} = 0$ soddisfatta nel punto $(0, 0)$, verificare che con essa risulta definibile una funzione implicita $y = y(x)$ e calcolare poi, nel punto considerato, la derivata prima e la derivata seconda di tale funzione implicita.

I M 4) Date $f(x, y) = x\,y$ e $g(x, y) = x^2 + y^2$ determinare per quali valori del parametro α risulta $\mathcal{D}_v f(1, 1) = \mathcal{D}_v g(1, 1)$, dove $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y,z) = x - 2y + 3z \\ \text{s.v. } x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il sistema omogeneo di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$, determinando poi la soluzione che soddisfa alla condizione $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y' - y^2 = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le x; 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ calcolare:
$\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

I Appello Sessione Estiva 2020

I M 1) Calcolare le radici cubiche del numero $z = \dfrac{\sqrt{2}\, i}{1 - i}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, determinare il valore di k che la rende continua in $(0,0)$ e verificare poi se tale funzione risulta differenziabile nel punto $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = x\, e^{x-y} - y\, e^{y-x} = 0$ soddisfatta nel punto $(1,1)$, verificare che con essa risulta definibile una funzione implicita $y = y(x)$ e calcolare poi, nel punto considerato, la derivata prima e la derivata seconda di tale funzione implicita.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = e^{x-y}$, determinare le direzioni $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ per cui risulta $\mathcal{D}_v f(k,k) = 0$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 + y \\ \text{s.v. : } (x-1)^2 - 1 \le y \le 1 \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = y + e^t \\ y' = 2x + y \end{cases}$.

II M 3) Data la funzione $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy$, determinare la natura dei suoi punti stazionari.

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x; 0 \le y; 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$, calcolare:
$\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} \frac{x}{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

II Appello Sessione Estiva 2020

I M 1) Calcolare le radici cubiche del numero $z = \dfrac{1 - i}{1 + i}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y - x y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, determinare il valore di k che la rende continua in $(0,0)$ e verificare poi se tale funzione risulta differenziabile nel punto $(0,0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z) = \text{sen}\,(xy) + \cos\,(xz) = 1 \\ g(x,y,z) = x^3y^2 - xz^3 + zy^3 = 1 \end{cases}$ soddisfatto in $P_0 = (0,1,1)$, verificare che con esso si può definire una funzione implicita $z \to (x,y)$ e di questa si calcolino le derivate prime in $z = 1$.

I M 4) Data $f(x,y) = x\,y$ ed i vettori $\mathbb{V} = (1,1)$ e $\mathbb{W} = (1,-1)$, siano v e w i loro versori; determinare il punto (x_0,y_0) sapendo che $\mathcal{D}_v f(x_0,y_0) = \sqrt{2}$ e che $\mathcal{D}_w f(x_0,y_0) = 0$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 + x\,y^2 \\ \text{s.v.: } 4x^2 + y^2 \le 4 \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$.

II M 3) Risolvere l'equazione differenziale di Bernoulli $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y}$.

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y; 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} \frac{|xy|}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

I Appello Sessione Autunnale 2020

I M 1) Trovare le radici quadrate della soluzione reale dell'equazione $x^3 + x^2 + x = -1$.

I M 2) Si verifichi che la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3\,y}{x^2+y^2} & (x,y) \ne (0,0) \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ può, mediante un opportuno valore di k, essere resa continua $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, determinando se essa risulti anche differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y,z) = x\,e^{y+z} - y\,e^{x+z} = 0$, verificare che in $\mathrm{P}_0 = (0,0,1)$ è possibile definire una funzione implicita avente y come variabile dipendente da x e z, e quindi calcolare le due derivate parziali del primo ordine di $y(x,z)$ in $(0,1)$.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ ed il versore $v = (\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$, verificare che è impossibile che risulti $\mathcal{D}^2_{v,v} f(x_0,y_0) = 0$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - x + y \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \end{cases}$.

II M 2) Data la funzione $f(x,y) = x^2 - 2k\,xy + y^3$ determinare, al variare del parametro k, l'esistenza e la natura dei suoi punti stazionari.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x'(t) = 2x - y - e^{2t} \\ y'(t) = -x + 2y + t \end{cases}$.

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le y; x^2 + y^2 \le 4\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Appello Sessione Straordinaria II 2020

I M 1) Calcolare $\sqrt{\left(1 + \sqrt{3}\,i\right)^3}$.

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y\,\text{sen}\,x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ può, mediante un opportuno valore di k, essere resa continua $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, determinando poi se essa risulti anche differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = x\,\text{sen}\,y - y\cos x = 0$, verificare che in $P_0 = (0,0)$ è possibile definire una funzione implicita avente y come variabile dipendente da x, e quindi calcolare le derivate prima e seconda di $y(x)$ in $x = 0$.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ ed il versore $v = (\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$ calcolare le sue derivate direzionali $\mathcal{D}^2_{vv} f(0,0)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 - y^2 \\ \text{s.v.}: x^2 \leq y \leq 1 \end{cases}$.

II M 2) Data la funzione $f(x,y,z) = x^2 - xy + y^2 + z^2$ determinare esistenza e natura degli eventuali punti stazionari.

II M 3) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale lineare non omogenea $y''' - y'' + y' - y = x$.

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x \leq y \leq 1 - x^2\right\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.