COMPITO di ANALISI MATEMATICA 6/10/2020

I M 1) Calcolare $\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3}$.

Dato che $1+\sqrt{3}\,i = 2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{3}\right)$ si ha:

$\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3 = 8\left(\cos 3\,\dfrac{\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\,3\,\dfrac{\pi}{3}\right) = 8\left(\cos\pi+i\,\mathrm{sen}\,\pi\right) = -8\,.$

Quindi:

$\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3} = \sqrt{-8} = \sqrt{8}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+k\,\dfrac{2\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+k\,\dfrac{2\pi}{2}\right)\right],\ 0\le k\le 1\,.$

Per $k=0$ si ha $z_0 = \sqrt{8}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}\,i\,;$

per $k=1$ si ha $z_1 = \sqrt{8}\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{3\pi}{2}\right) = -2\sqrt{2}\,i\,.$

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y\,\mathrm{sen}\,x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ k & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ può, mediante un opportuno valore di k, essere resa continua $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$, determinando poi se essa risulti anche differenziabile in $(0,0)$.

Calcoliamo $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\,y\,\mathrm{sen}\,x}{x^2+y^2}$ passando a coordinate polari ed avremo:

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\,y\,\mathrm{sen}\,x}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{\varrho\to0}\frac{\varrho^2\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,(\varrho\cos\vartheta)}{\varrho^2} = \lim_{\varrho\to0}\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,(\varrho\cos\vartheta) = 0\,.$

La convergenza è uniforme in quanto $|\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,(\varrho\cos\vartheta)|\le\varrho\,.$

Quindi la funzione è continua in $(0,0)$ se $k=0\,.$

Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{0}{h^2}\cdot\frac{1}{h} = 0\,;$

$\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{0}{h^2}\cdot\frac{1}{h} = 0\,.$

Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)\,.$

Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = 0$ ovvero se:

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\,y\,\mathrm{sen}\,x}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$ Passando a coordinate polari si ha:

$\displaystyle\lim_{\varrho\to0}\frac{\varrho^2\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,(\varrho\cos\vartheta)}{\varrho^2}\cdot\frac{1}{\varrho} = \lim_{\varrho\to0}\frac{\mathrm{sen}\,(\varrho\cos\vartheta)}{\varrho\cos\vartheta}\cdot\cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta = 1\cdot\cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,.$

Dato che il limite è uguale a 0 solo per particolari valori di ϑ, la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = x\,\mathrm{sen}\,y - y\cos x = 0$, verificare che in $\mathrm{P}_0 = (0,0)$ è possibile definire una funzione implicita avente y come variabile dipendente da x, e quindi calcolare le derivate prima e seconda di $y(x)$ in $x = 0$.

La funzione $f(x,y)$ è funzione differenziabile $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, con $f(0,0) = 0 - 0 = 0$.
Risulta poi: $\nabla f(x,y) = (\mathrm{sen}\,y + y\,\mathrm{sen}\,x; x\cos y - \cos x)$. Quindi $\nabla f(0,0) = (0;\,-1)$.
Dato che $f'_y(0,0) = -1 \neq 0$ si può definire una funzione implicita $x \to y(x)$ la cui derivata prima sarà uguale a: $y'(0) = -\dfrac{f'_x(0,0)}{f'_y(0,0)} = -\dfrac{0}{-1} = 0$.

Abbiamo poi $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} y\cos x & \cos y + \mathrm{sen}\,x \\ \cos y + \mathrm{sen}\,x & -x\,\mathrm{sen}\,y \end{Vmatrix}$ da cui $\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$ e dalla:
$y'' = -\dfrac{f''_{xx} + 2f''_{xy}\,y' + f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$ avremo: $y''(0) = -\dfrac{0 + 2\cdot 1\cdot 0 + 0}{-1} = 0$.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ ed il versore $v = (\cos\alpha, \mathrm{sen}\,\alpha)$ calcolare le sue derivate direzionali $\mathcal{D}^2_{v\,v} f(0,0)$.

La funzione $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ risulta palesemente differenziabile due volte $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Quindi $\mathcal{D}^2_{v,v} f(0,0) = v \cdot \mathbb{H}f(0,0) \cdot v^T$.
Da $\nabla f(x,y) = \left(2x\,e^{x^2+y^2}; 2y\,e^{x^2+y^2}\right)$ otteniamo :

$$\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 2(1+2x^2)\,e^{x^2+y^2} & 4xy\,e^{x^2+y^2} \\ 4xy\,e^{x^2+y^2} & 2(1+2y^2)\,e^{x^2+y^2} \end{Vmatrix} \Rightarrow \mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} \text{ per cui:}$$

$$\mathcal{D}^2_{v,v} f(0,0) = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & \mathrm{sen}\,\alpha \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha \end{Vmatrix} = 2\cos^2\alpha + 2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha = 2.$$

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 - y^2 \\ \text{s.v. : } x^2 \le y \le 1 \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile che è un insieme compatto, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.
Per risolvere il problema utilizziamo le condizioni di Kuhn-Tucker.

Scriviamo il problema nella forma $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 - y^2 \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2 - y \le 0 \\ y - 1 \le 0 \end{cases} \end{cases}$

$\Lambda(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 - y^2 - \lambda_1\big(x^2 - y\big) - \lambda_2\,(y - 1)$.
Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:
1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x = 0 \\ \Lambda'_y = -2y = 0 \\ x^2 - y \le 0 \\ y - 1 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0 \le 0 \\ -1 \le 0 \end{cases}.$$

Essendo $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix} = \mathbb{H}(0,0)$ si ha che, globalmente, il punto $(0,0)$ è un punto di sella. Lo studieremo più precisamente in seguito.

2) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 2\lambda_1 x = 2x\,(1-\lambda_1) = 0 \\ \Lambda'_y = -2y + \lambda_1 = 0 \\ y = x^2 \\ y \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ 0 \le 1 \end{cases}$$: lo studieremo più precisamente dopo;

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 2\lambda_1 x = 2x\,(1-\lambda_1) = 0 \\ \Lambda'_y = -2y + \lambda_1 = 0 \\ y = x^2 \\ y \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ \lambda_1 = 1 \\ \frac{1}{2} \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{2} \\ \lambda_1 = 1 \\ \frac{1}{2} \le 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{2} \\ \lambda_1 = 1 \\ \frac{1}{2} \le 1 \end{cases}.$$

Dato che $\lambda_1 > 0$ i punti $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ potrebbero essere punti di massimo.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \ne 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x = 0 \\ \Lambda'_y = -2y - \lambda_2 = 0 \\ y = 1 \\ x^2 \le y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ \lambda_2 = -2 < 0 \\ 0 \le 1 \end{cases}.$$

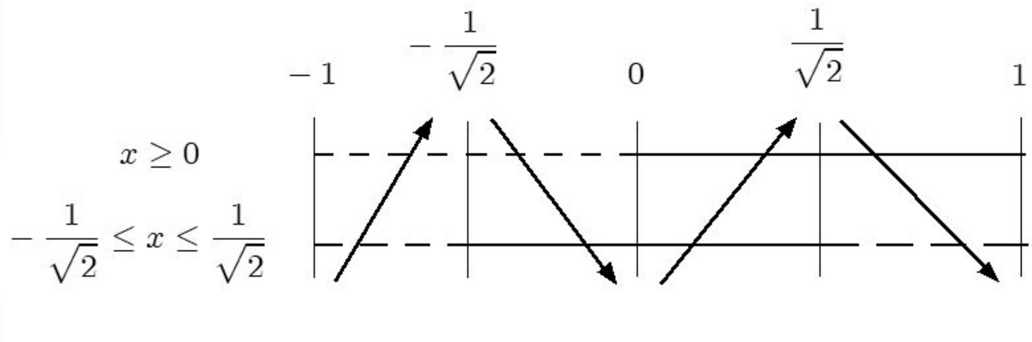
Dato che $\lambda_2 < 0$ il punto $(0,1)$ potrebbe essere un punto di minimo.

4) caso $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 \ne 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 2\lambda_1 x = 0 \\ \Lambda'_y = -2y + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ y = x^2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ 2 - 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ -2 + 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

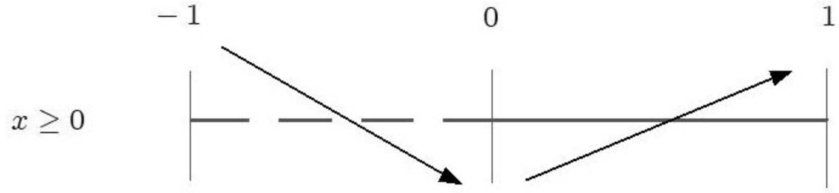
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$. I punti $(1,1)$ e $(-1,1)$ non sono né di massimo né di minimo.

Studiamo la funzione obiettivo sul vincolo $y = x^2$.
Risulta $f\left(x, x^2\right) = x^2 - x^4 \Rightarrow f'(x) = 2x - 4x^3 = 2x\left(1 - 2x^2\right) \ge 0$.
Si ha $1 - 2x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 \le \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ per cui:



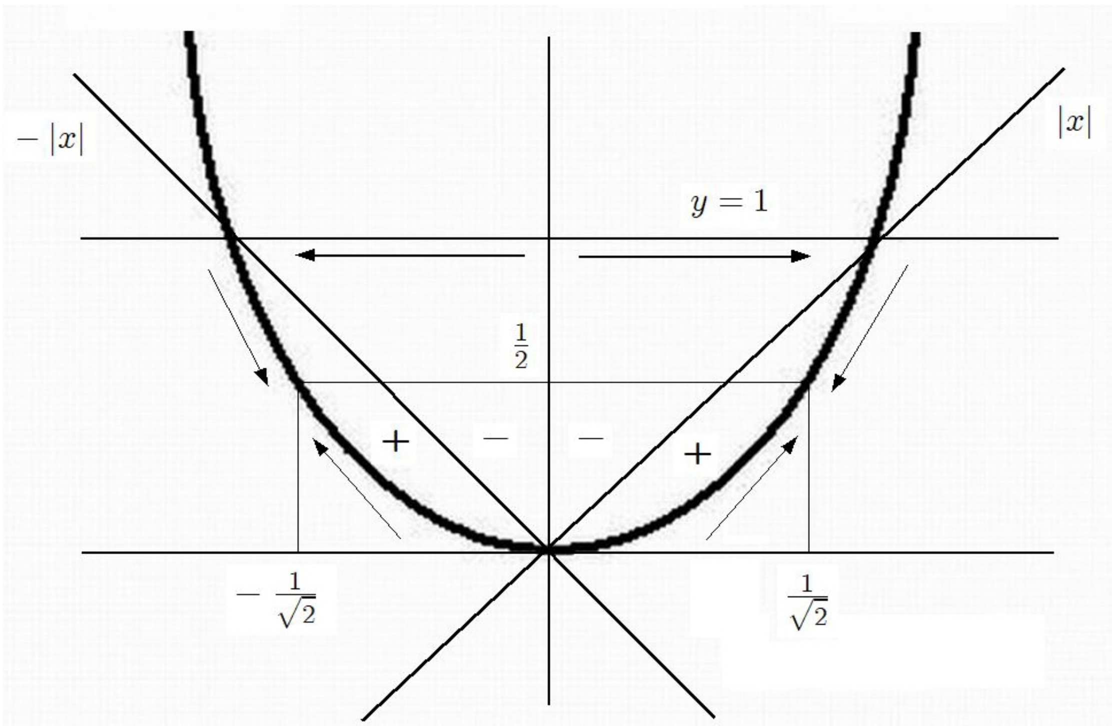
I punti $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ sono punti di massimo con $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.
Studiamo la funzione obiettivo sul vincolo $y = 1$.

Risulta $f(x,1) = x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x \geq 0$ per $x \geq 0$.



Il punto $(0,1)$ è un punto di minimo con $f(0,1) = -1$.

Infine studiamo il punto $(0,0)$. Si ha $f(0,0) = 0$. Poi $f(x,y) = x^2 - y^2 \geq 0$ per $y^2 \leq x^2$ che risulta soddisfatta per $-|x| \leq y \leq |x|$. In ogni intorno del punto $(0,0)$ abbiamo valori sia positivi che negativi e quindi $(0,0)$ è un punto di sella.



II M 2) Data la funzione $f(x,y,z) = x^2 - xy + y^2 + z^2$ determinare esistenza e natura degli eventuali punti stazionari.

Determiniamo i punti stazionari della funzione. Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo: $\nabla f(x,y,z) = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 2x - y = 0 \\ f'_y = -x + 2y = 0 \\ f'_z = 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Quindi applichiamo le condizioni del secondo ordine:

$\mathbb{H}(x,y,z) = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix} = \mathbb{H}(0,0,0)$. Dato che:

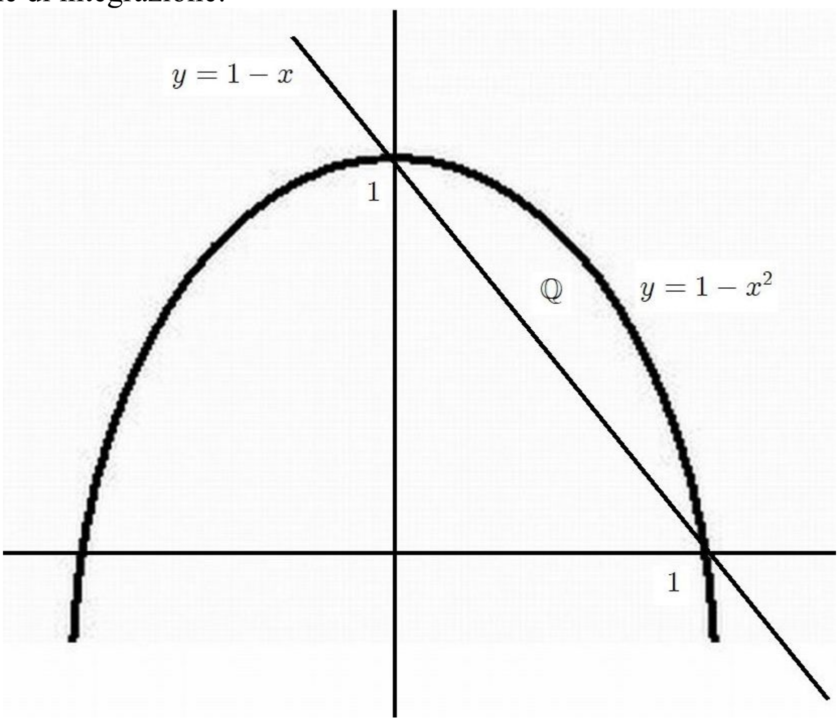
$\begin{cases} |\mathbb{H}_1| = 2 > 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 3 > 0 \\ |\mathbb{H}_3| = 6 > 0 \end{cases}$ il punto $(0,0,0)$ è un punto di minimo.

II M 3) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale lineare non omogenea $y''' - y'' + y' - y = x$.

Risolviamo anzitutto l'equazione omogenea associata determinando le radici del polinomio caratteristico. Essendo $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + 1\right)$ abbiamo le tre soluzioni $\lambda = 1$, $\lambda = i$, $\lambda = -i$ e quindi la soluzione generale $y(x) = c_1\, e^x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos x$.
Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, usiamo la $y_0 = ax + b$. Da cui $y_0' = a$, $y_0'' = y_0''' = 0$ e quindi sostituendo avremo: $0 - 0 + a - ax - b = x$ da cui ricaviamo $\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$ e quindi $a = b = -1$ per cui $y_0 = -x - 1$. Per cui la soluzione generale dell'equazione differenziale lineare non omogenea sarà:
$y(x) = c_1\, e^x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos x - x - 1$.

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 - x \le y \le 1 - x^2\right\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Vista la regione di integrazione:



avremo:

$$\iint_{\mathbb{Q}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left(\frac{1}{2}\,y^2\Big|_{1-x}^{1-x^2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\,x\left[\left(1 - x^2\right)^2 - (1 - x)^2\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x^5 - 3x^3 + 2x^2\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\,x^6 - \frac{3}{4}\,x^4 + \frac{2}{3}\,x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{24}\,.$$