COMPITO di ANALISI MATEMATICA 13/1/2021

I M 1) Sapendo che $e^z = \frac{\sqrt[3]{e}}{2}\left(\sqrt{3} - i\right)$, calcolare z.

Applicando la definizione di esponenziale complessa: $e^{x+iy} = e^x\,(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)$ e dato che $e^z = \frac{\sqrt[3]{e}}{2}\left(\sqrt{3} - i\right) = e^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right) = e^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right)$ si ha $e^z = e^{\frac{1}{3}+i\,\frac{11\pi}{6}}$ e quindi $z = \frac{1}{3} + i\,\frac{11\pi}{6}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,|x^2-y^2|}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ k & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$, determinare l'opportuno valore di k che rende la funzione continua nel punto $(0,0)$, e determinare poi se in tale punto la funzione risulti anche differenziabile.

Calcoliamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,|x^2-y^2|}{x^2+y^2}$ passando a coordinate polari ed avremo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3\cos\vartheta\,|\cos^2\vartheta\, - \mathrm{sen}^2\,\vartheta|}{\varrho^2} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho\cos\vartheta\,|\cos 2\vartheta| = 0\,.$$

La convergenza è uniforme in quanto $\varrho\,|\cos\vartheta|\,|\cos 2\vartheta| \le \varrho$.
Quindi la funzione è continua in $(0,0)$ se $k = 0$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\,|h^2-0|}{h^2+0}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0\,|0-h^2|}{0^2+h^2}\cdot\frac{1}{h} = 0\,.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (1,0)$.
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x\,|x^2-y^2|}{x^2+y^2} - x\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x\,|x^2-y^2| - x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0\,.$$

Passando a coordinate polari si ha:

$$\lim_{\varrho\to 0}\frac{\varrho^3\,(\cos\vartheta\,|\cos 2\vartheta| - \cos^3\vartheta - \cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta\,)}{\varrho^3} = \cos\vartheta\left(|\cos 2\vartheta| - \cos^2\vartheta - \mathrm{sen}^2\,\vartheta\right) =$$

$= \cos\vartheta\,(|\cos 2\vartheta| - 1\,)$. Dato che il limite è uguale a 0 solo per particolari valori di ϑ, la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) L'equazione $f(x,y,z) = 2xy - e^{z-x} - e^{z-y} = 0$, soddisfatta nel punto $(1,1,1)$, definisce una funzione implicita $(x,y) \to z(x,y)$; di questa funzione z determinare le derivate prime nonchè l'espressione dei differenziali totali primo $\mathrm{d}z$ e secondo d^2z. Determinare poi l'espressione esplicita di $z = z(x,y)$.

La funzione $f(x,y,z)$ è differenziabile $\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, con $f(1,1,1) = 2 - 1 - 1 = 0$.

Risulta poi: $\nabla f(x,y,z) = (2y + e^{z-x}; 2x + e^{z-y}; -e^{z-x} - e^{z-y})$.
Quindi $\nabla f(1,1,1) = (3;3;-2)$.
Dato che $f'_z(1,1,1) = -2 \neq 0$ si può definire una funzione implicita $(x,y) \to z(x,y)$ le cui derivate prime saranno uguali a:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1;1) = -\frac{f'_x(1,1,1)}{f'_z(1,1,1)} = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2};\ \frac{\partial z}{\partial y}(1;1) = -\frac{f'_y(1,1,1)}{f'_z(1,1,1)} = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

E quindi anche $\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}(1;1)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}(1;1)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\,\mathrm{d}y$.

Abbiamo poi $\mathbb{H}(x,y,z) = \left\| \begin{array}{ccc} -e^{z-x} & 2 & e^{z-x} \\ 2 & -e^{z-y} & e^{z-y} \\ e^{z-x} & e^{z-y} & -e^{z-x} - e^{z-y} \end{array} \right\|$ da cui poi:

$\mathbb{H}(1,1,1) = \left\| \begin{array}{ccc} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \right\|$ e dalla: $\mathrm{d}^2 z = -\frac{\mathrm{d}^2 f(x,y,z)}{f'_z}$ si ha:

$$\mathrm{d}^2 z = -\frac{(-1)\cdot(\mathrm{d}x)^2 + (-1)\cdot(\mathrm{d}y)^2 + (-2)\cdot(\mathrm{d}z)^2 + 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 2\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(-2)} =$$

$$\mathrm{d}^2 z = -\frac{(\mathrm{d}x)^2}{2} - \frac{(\mathrm{d}y)^2}{2} - (\mathrm{d}z)^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}x\mathrm{d}z + \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

e sostituendo $\mathrm{d}z = \frac{3}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\,(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$ otteniamo:

$$\mathrm{d}^2 z = -\frac{(\mathrm{d}x)^2}{2} - \frac{(\mathrm{d}y)^2}{2} - \frac{9}{4}(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{3}{2}\,\mathrm{d}x(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) + \frac{3}{2}\,\mathrm{d}y(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) =$$

$$\mathrm{d}^2 z = \left(-\frac{1}{2} - \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\right)(\mathrm{d}x)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\right)(\mathrm{d}y)^2 + \left(-\frac{9}{2} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\mathrm{d}^2 z = -\frac{5}{4}(\mathrm{d}x)^2 - \frac{5}{4}(\mathrm{d}y)^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Da $f(x,y,z) = 2xy - e^{z-x} - e^{z-y} = 0$ segue $2xy - e^z e^{-x} - e^z e^{-y} = 0$ da cui:

$$e^z(e^{-x} + e^{-y}) = 2xy \Rightarrow e^z = \frac{2xy}{e^{-x} + e^{-y}} \Rightarrow z = \log\left(\frac{2xy}{e^{-x} + e^{-y}}\right) =$$

$$\Rightarrow z = \log\left(\frac{2xy\,e^{x+y}}{e^x + e^y}\right).$$

I M 4) Data $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$, siano v e w i versori di $(1,1)$ e $(1,-1)$. Sapendo che $\mathcal{D}_v f(\mathrm{P}_0) = \sqrt{2}$ e che $\mathcal{D}_w f(\mathrm{P}_0) = 2\sqrt{2}$, si determini P_0 e si calcoli poi $D^2_{v,w} f(\mathrm{P}_0)$.

La funzione $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$ risulta differenziabile due volte $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Quindi $\mathcal{D}_v f(\mathrm{P}_0) = \nabla f(\mathrm{P}_0) \cdot v$ e $\mathcal{D}^2_{v,w} f(\mathrm{P}_0) = v \cdot \mathbb{H} f(\mathrm{P}_0) \cdot w^T$.
Da $\nabla f(x,y) = (2x - 3y; 4y - 3x)$ otteniamo :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_v f(\mathrm{P}_0) = \nabla f(\mathrm{P}_0) \cdot v = (2x - 3y; 4y - 3x) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \\ \mathcal{D}_w f(\mathrm{P}_0) = \nabla f(\mathrm{P}_0) \cdot w = (2x - 3y; 4y - 3x) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4y - 3x = 2 \\ 2x - 3y - 4y + 3x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x = 2 \\ 5x - 7y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ 5x - 7x - 14 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y = -7 \end{cases}.$$

Quindi $\mathrm{P}_0 = (-9, -7)$. Risulta poi $\mathbb{H}(x,y) = \left\| \begin{array}{cc} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{array} \right\| = \mathbb{H}(-9,-7)$ per cui:

$$\mathcal{D}^2_{v,w} f(\mathrm{P}_0) = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{5}{\sqrt{2}} \\ -\frac{7}{\sqrt{2}} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -1 \,.$$

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x(y+1) \\ \text{s.v.:} \begin{cases} x \le 1 - y^2 \\ 1 \le x + y \end{cases} \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.
Per risolvere il problema utilizziamo le condizioni di Kuhn-Tucker.

Scriviamo il problema nella forma $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x(y+1) \\ \text{s.v.:} \begin{cases} x + y^2 - 1 \le 0 \\ 1 - x - y \le 0 \end{cases} \end{cases}$.

Formiamo la funzione Lagrangiana:
$\Lambda(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = x(y+1) - \lambda_1\big(x + y^2 - 1\big) - \lambda_2\,(1 - x - y)\,.$

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y + 1 = 0 \\ \Lambda'_y = x = 0 \\ x + y^2 - 1 \le 0 \\ 1 - x - y \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ 0 + 1 - 1 \le 0 \\ 1 - 0 + 1 \le 0 : \text{NO} \end{cases} \Rightarrow (0, -1) \notin \mathcal{E}\,.$$

2) caso $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y + 1 - \lambda_1 = 0 \\ \Lambda'_y = x - 2\lambda_1\, y = 0 \\ x = 1 - y^2 \\ 1 - x - y \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda_1 - 1 \\ x = 2\lambda_1\,(\lambda_1 - 1) = 2\lambda_1^2 - 2\lambda_1 \\ 2\lambda_1^2 - 2\lambda_1 = 1 - (\lambda_1 - 1)^2 \\ 1 - x - y \le 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \lambda_1 - 1 \\ x = 2\lambda_1\,(\lambda_1 - 1) = 2\lambda_1^2 - 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1^2 - 4\lambda_1 = \lambda_1(3\lambda_1 - 4) = 0 \\ 1 - x - y \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ \lambda_1 = 0 \\ 1 - 0 + 1 \le 0; \text{NO} \end{cases} \cup \begin{cases} x = \frac{8}{9} \\ y = \frac{1}{3} \\ \lambda_1 = \frac{4}{3} > 0 \\ 1 - \frac{8}{9} - \frac{1}{3} \le 0 \end{cases};$$

Essendo $\lambda_1 = \dfrac{4}{3} > 0$ il punto $\left(\dfrac{8}{9}, \dfrac{1}{3}\right)$ potrebbe essere di Massimo.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \ne 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y + 1 + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = x + \lambda_2 = 0 \\ y = 1 - x \\ x + y^2 - 1 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda_2 \\ y = -1 - \lambda_2 \\ -1 - \lambda_2 = 1 + \lambda_2 \\ x + y^2 - 1 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \lambda_2 = -1 < 0 \\ 1 + 0 - 1 \le 0 \end{cases}.$$

Essendo $\lambda_2 = -1 < 0$ il punto $(1,0)$ potrebbe essere di Minimo.

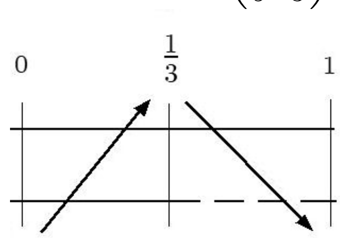
4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y + 1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = x - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ y = 1 - x \\ x = 1 - y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ 1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ 2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

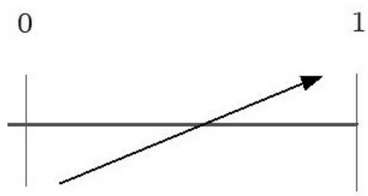
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ \lambda_1 = -2 < 0 \\ \lambda_2 = -4 < 0 \end{cases}.$$

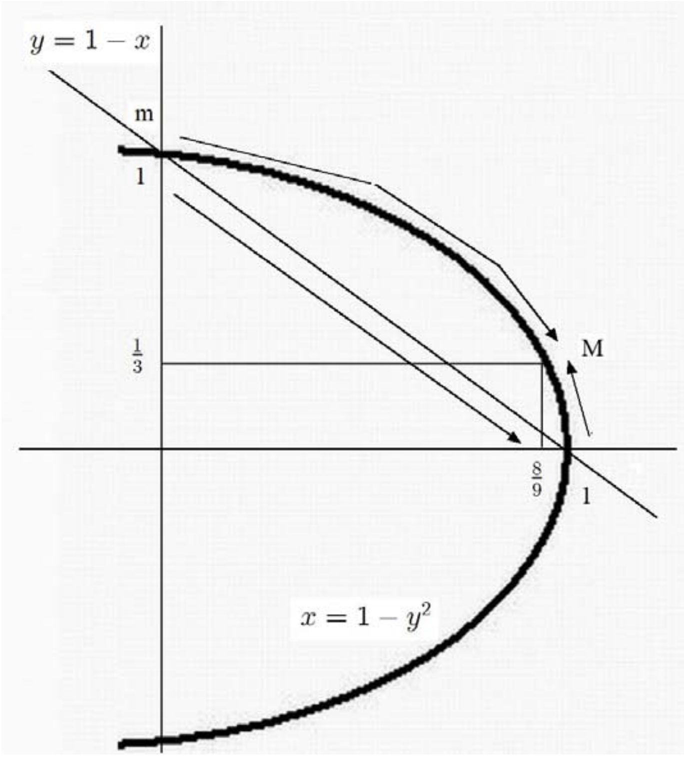
Essendo i valori dei λ non positivi, i punti $(1,0)$ e $(0,1)$ potrebbero essere di minimo.

Studiamo la funzione obiettivo sul vincolo $x = 1 - y^2$.
Si ha $f(1-y^2, y) = (1-y^2)(y+1) = y + 1 - y^3 - y^2 \Rightarrow f'(y) = 1 - 3y^2 - 2y \geq 0$.
Da cui $3y^2 + 2y - 1 \leq 0 \Rightarrow y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \dfrac{-1 \pm 2}{3}$. Quindi:
$f'(y) \geq 0$ per $-1 \leq y \leq \dfrac{1}{3} \Rightarrow 0 \leq y \leq \dfrac{1}{3}$. Se $y = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = \dfrac{8}{9}$.
Il punto $\left(\dfrac{8}{9}, \dfrac{1}{3}\right)$ risulta essere di Massimo con $f\left(\dfrac{8}{9}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{32}{27}$.



Studiamo la funzione obiettivo sul vincolo $y = 1 - x$.
Risulta $f(x, 1-x) = x(1-x+1) = 2x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - 2x \geq 0$ per $0 \leq x \leq 1$.
Se $x = 0 \Rightarrow y = 1$. Il punto $(0,1)$ risulta essere un punto di minimo con $f(0,1) = 0$.
Se $x = 1 \Rightarrow y = 0$. Il punto $(1,0)$ non è un punto di minimo e neppure di massimo.





II M 2) La matrice $\mathbb{H} = \left\| \begin{matrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ k-1 & 1 & k+1 \end{matrix} \right\|$ è la matrice Hessiana di una funzione differenziabile due volte, calcolata in un punto stazionario. Si determini la natura di tale punto stazionario.

Dato che la funzione è differenziabile due volte, la matrice Hessiana è sicuramente una matrice simmetrica, quindi $k = 1$.

Quindi sarà $\mathbb{H} = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix} \right\|$.

Applichiamo le condizioni del secondo ordine e studiamo i minori di guida:

$$\begin{cases} |\mathbb{H}_1| = 1 > 0 \\ |\mathbb{H}_1| = 2 > 0 \\ |\mathbb{H}_1| = 2 > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} |\mathbb{H}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 > 0 \\ |\mathbb{H}_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 > 0 \end{cases};$$

$$|\mathbb{H}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0 .$$

Quindi $\begin{cases} |\mathbb{H}_1| > 0 \\ |\mathbb{H}_2| > 0 \\ |\mathbb{H}_3| > 0 \end{cases}$ ed il punto risulta di minino.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = 2x + 2y \\ y' = x + 3y + \operatorname{sen} t \end{cases}$.

$$\begin{cases} x' = 2x + 2y \\ y' = x + 3y + \operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow \begin{Vmatrix} D-2 & -2 \\ -1 & D-3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ \operatorname{sen} t \end{Vmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} D-2 & -2 \\ -1 & D-3 \end{vmatrix} (x) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ \operatorname{sen} t & D-3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(D^2 - 5D + 4\right)(x) = (D-3)(0) + 2 \operatorname{sen} t = 2 \operatorname{sen} t .$$

Da $x'' - 5x' + 4x = 0$ otteniamo $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$ e quindi le soluzioni $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$, da cui la soluzione generale dell'equazione omogenea per $x(t)$ che sarà: $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{4t}$.

Per trovare una soluzione della non omogenea usiamo $x_0 = m \operatorname{sen} t + k \cos t$.

Quindi $x_0' = m \cos t - k \operatorname{sen} t$ e $x_0'' = -m \operatorname{sen} t - k \cos t$.

Sostituendo in $x'' - 5x' + 4x = 2 \operatorname{sen} t$ si ha :

$(-m \operatorname{sen} t - k \cos t) - 5(m \cos t - k \operatorname{sen} t) + 4(m \operatorname{sen} t + k \cos t) = 2 \operatorname{sen} t$

$(-m + 5k + 4m) \operatorname{sen} t + (-k - 5m + 4k) \cos t = 2 \operatorname{sen} t$

$(5k + 3m) \operatorname{sen} t + (3k - 5m) \cos t = 2 \operatorname{sen} t$ e quindi:

$$\begin{cases} 5k + 3m = 2 \\ 3k - 5m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\,\frac{5}{3}m + 3m = \frac{34}{3}m = 2 \\ k = \frac{5}{3}m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{17} \\ k = \frac{5}{17} \end{cases} .$$

Quindi $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{4t} + \dfrac{3}{17} \operatorname{sen} t + \dfrac{5}{17} \cos t$.

Dalla prima equazione ricaviamo $y = \dfrac{1}{2}(x' - 2x)$ e quindi:

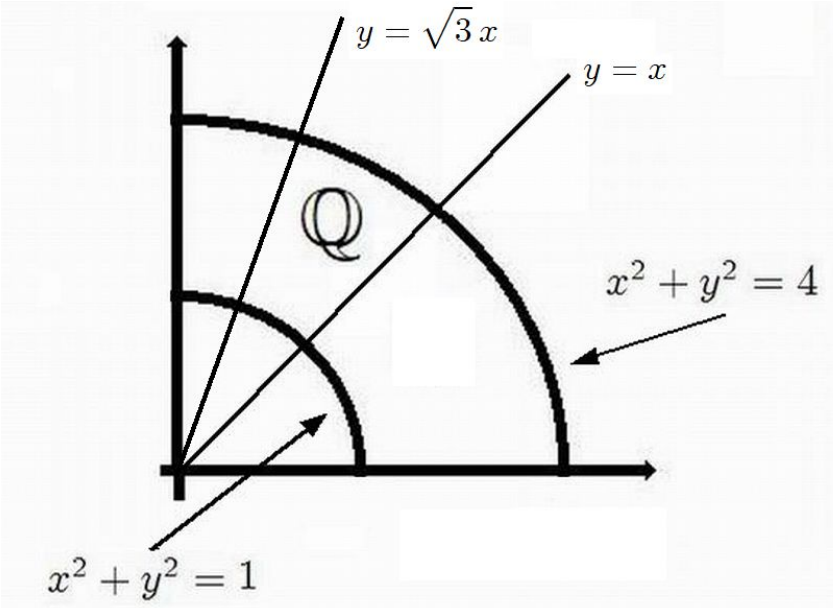
$$y(t) = \frac{1}{2}\left(c_1 e^t + 4c_2 e^{4t} + \frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\operatorname{sen} t - 2\left(c_1 e^t + c_2 e^{4t} + \frac{3}{17}\operatorname{sen} t + \frac{5}{17}\cos t\right)\right)$$

e quindi:

$$y(t) = -\frac{1}{2} c_1 e^t + c_2 e^{4t} - \frac{11}{34} \operatorname{sen} t - \frac{7}{34} \cos t .$$

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \le y \le \sqrt{3}\,x; 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}$, calcolare: $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ mediante opportuna sostituzione in coordinate polari.

Vista la regione di integrazione:



operando la sostituzione in coordinate polari, si ha:

$$\iint\limits_{\mathbb{Q}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{1}^{2} \varrho^2 \cos\vartheta \,\mathrm{sen}\,\vartheta \cdot \varrho \,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{1}^{2} \varrho^3 \cos\vartheta \,\mathrm{sen}\,\vartheta \,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{4}\,\varrho^4\Big|_1^2\right) \cos\vartheta \,\mathrm{sen}\,\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (16-1) \cos\vartheta \,\mathrm{sen}\,\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{15}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{sen}\,\vartheta \cos\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{15}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{sen}\,\vartheta \,\mathrm{d}(\mathrm{sen}\,\vartheta) = \frac{15}{4}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta\,\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\right. =$$

$$= \frac{15}{8}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{32}\,.$$